高等学校经济及管理类专业基础课教材

JINGJISHUXUE

经济数学

微积分部分

刘桂茹　孙永华　编著

南開大學出版社

高等院校经济及管理类专业基础课教材

经济数学

微积分部分

刘桂茹　孙永华　编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

经济数学．微积分学部分/刘桂茹，孙永华编．—天津：南开大学出版社，2002.11
ISBN 7-310-01762-5

Ⅰ．经…　Ⅱ．①刘…②孙…　Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材
Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 050615 号

出版发行　南开大学出版社
地址：天津市南开区卫津路 94 号　邮编：300071
营销部电话：(022)23508339　23500755
营销部传真：(022)23508542
邮购部电话：(022)23502200

出版人　肖占鹏
承　印　天津宝坻第二印刷厂印刷
经　销　全国各地新华书店
版　次　2002 年 11 月第 1 版
印　次　2002 年 11 月第 1 次印刷
开　本　880mm×1230mm　1/32
印　张　15.375
字　数　440 千字
印　数　1－3000
定　价　24.00 元

内 容 提 要

本书是根据国家教委高教司颁布的《经济数学基础》教学大纲编写的，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理、不定积分、定积分、空间解析几何简介、多元函数微分学、二重积分、级数、常微分方程与差分方程等。本书可作为大学本科经济类专业和管理类专业的教材，也可作为三类和四类数学的考研参考书。

每章选编了数量较多的习题，书末附有答案，便于学生自学。

前　　言

本书是根据教育部颁发的《经济数学基础》教学大纲编写的，可作为高等院校经济类和管理类专业《高等数学》课程的教材，也可作为三类和四类数学的考研参考书。

在内容的深度上，本书注意加强了基本概念和基本方法的讲述，并阐述了应用这些基本理论解决实际问题的分析思想。在章节的安排上，力求由浅入深，逐步展开，方便教和学。另外，每章都配有足够数量的习题，并给出了简单的答案或提示，选题侧重于基本方法的练习，同时也选了一些有一定难度的综合性及应用性题目，用于训练学生分析问题和解决问题的能力。

本书的第一章至第六章和第十一章由刘桂茹编写，第七章至第十章由孙永华编写。在编写过程中，吸收了许多教师的教学经验，贾兰香、柴巧珠、张建华、王作友、黄宝堃、荆洪刚老师都提出了宝贵意见，南开大学出版社和周才思同志给予了大力的支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎批评指正。

编　者

2002年6月

目　录

第一章　函　　数

函数研究变量之间的依赖关系，是微积分学研究的主要对象.

§1.1　函数概念

一、变量与常量

所谓变量，就是变动着的量. 说得更确切一点，就是在某一过程中可以取不同数值的量. 例如，一天的温度、某商品的销售量、人口的数量等等. 变量的取值范围称为该变量的变域.

所谓常量，就是在所考察的过程中，始终取同一数值的量. 我们也常常将常量看成一种特殊的变量.

二、函数的定义

在现实中，无论是自然现象还是社会现象，经常会同时出现几个变量，这些变量并不是彼此独立变化的，而是按照一定的规则互相关联着. 函数就是变量间这种确定的依赖关系的一个数学描述.

本章只讨论两个变量的情形，超过两个变量的情形将在第八章专门讨论，先看几个例子，然后再给出函数的定义.

例 1　在平面直角坐标系 Oxy 中，方程

$$y=x^2$$

表示了抛物线上点(x,y)的两个坐标之间的依赖关系.

给定 $x=x_0$，就确定了 y 的对应值 $y_0=x_0^2$，如图 1.1 所示.

例 2　气象台用自动记录仪将一天的气温记录下来，画出了一条如图 1.2 的曲线. 这条曲线表示了气温 T 与时间 t 的依赖关系.

例 3　设某产品的生产成本为 C，该产品的产量为 x. 当产量为一

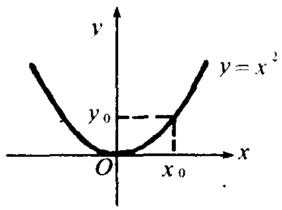

图 1.1

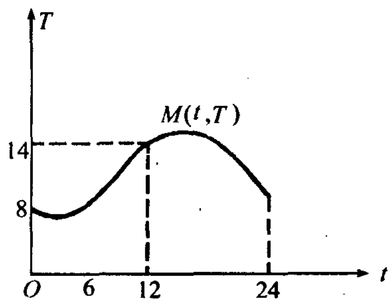

图 1.2

确定的非负值时，成本也就有了一个确定的数值与之对应，所以，成本 C 与产量 x 之间存在一种依赖关系.

例 4 人口数随时间的变化而变化，人口与时间之间存在一种依赖关系.

从以上几个例子可以看出，虽然变量所代表的实际意义不同，但所涉及的两个变量之间都存在着一种确定的依赖关系. 这就是数学中函数概念的实质.

下面给出函数的定义.

定义 1.1 设 x,y 是两个变量，x 取值于实数集合 X. 如果对于每一个 $x\in X$，都可以按照某一给定规则 f，惟一地确定一个 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x), x\in X.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量 x 的变域 X 称为函数的**定义域**，因变量 y 的变域

$$Y=\{y \mid y=f(x), x\in X\}$$

称为函数的**值域**.

为了正确理解函数的定义，再作如下几点说明：

(1)定义中的“f”表示变量 x 与 y 之间的确定的依赖关系，是一种抽象的函数符号. 也可以采用别的记号来表示，例如，$y=\varphi(x)$，$y=y(x)$等. 当同时考虑几个函数时，通常取不同的符号代表不同的函数，

以免混淆.

(2)当自变量 x 取某个值 x_0 时,对应的因变量的值称为**函数值**,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 例如,对函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,有 $f(0)=1,f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{1}{5},f(x+1)=\frac{1}{1+(x+1)^2}$等等.

(3)在定义 1.1 中,对自变量 x 的一个确定的取值,y 只能有惟一的一个值与之对应,称这种函数为单值函数,本书中简称为函数. 若对自变量 x 的一个确定的取值有多个 y 值与之对应,称这种函数为多值函数. 多值函数不是定义 1.1 意义下的函数. 例如,由关系式 $y^2=x$ 所确定的 y 关于 x 的函数,对于 $x=1$,y 有 1 和 -1 两个值与之对应,这是一个多值函数. 遇到这种情况,可将其分解成两个单值函数

$$y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty)\text{和 }y=-\sqrt{x},x\in[0,+\infty)$$

然后使用定义 1.1,如图 1.3.

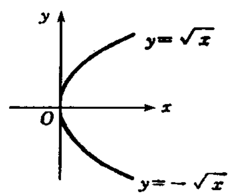

图 1.3

(4)在函数定义中,有两个基本要素,一是自变量的变域(定义域),另一是对应规则. 因此,只有当自变量有相同的变域,而且有相同的对应规则时,才能说这两个函数是相同的. 例如,函数

$$y=x^2,x\in(1,2)$$

与 $y=x^2,x\in(-2,-1)$,

虽然有相同的对应规则,但由于 x 的变域不同,所以它们是不相同的函数.

三、函数的定义域

在函数的定义中已经指出,自变量的变域称为函数的定义域. 在研究函数时,必须注意函数的定义域,因为只有当自变量在定义域内取值时,函数关系才有意义.

对于一个用数学式子表示的函数,其定义域就是使这个式子有意义的自变量的取值范围.

例 5 确定函数

$$y=\frac{\sqrt{5-x}}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$$

的定义域.

解 要使这个数学式子有意义,必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ 5-x\geqslant 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\leqslant 5,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

得函数的定义域为

$$X=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,5].$$

如果所研究的函数是由实际问题提出来的,它的定义域应由自变量的实际意义来确定.

例 6 用边长为 $a(a>0)$ 的正方形铁片,从四个角各剪去边长为 x 的小正方形,做成一个无盖铁盒,其体积 V 是 x 的函数,即

$$V=x(a-2x)^2,$$

考虑问题的实际意义,函数的定义域应为

$$X=\left(0,\frac{a}{2}\right).$$

四、函数的表示方法

函数关系可用不同的方法来表示,常用的表示法有解析法、列表法和图像法.其中解析法是微积分学表示函数的主要方法,图像法是直观了解函数的重要手段.

1. 列表法 所谓列表法就是将自变量的一组常数值与其对应的一组函数值列成一个数表,其优点是便于查找函数值.例如,三角函数表,对数函数等常用的数学用表,银行中的外汇兑换表等.

2. 图像法 所谓图像法就是用坐标平面上的点或曲线来表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数.如图 1.4 所示.

例 7 函数 $y=\frac{|x|+x}{2}$ 的图像如图 1.5 所示,这个函数也可以表示为

$$y=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

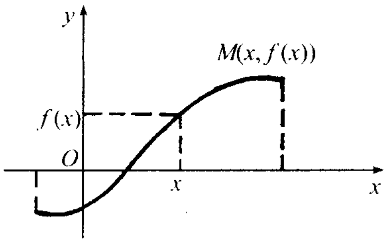

图 1.4

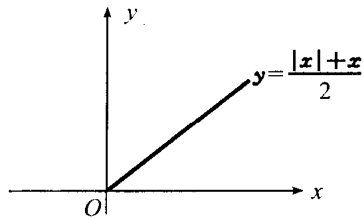

图 1.5

例 8 函数 $y=[x]$，这里$[x]$表示不大于 x 的最大整数，称为 x 的整数部分，即若 $x=m+r$，其中 m 为整数，$0\leqslant r<1$，则$[x]=m$. 其图像见图 1.6.

用图像表示函数，其优点是直观，便于观察函数的整个变化趋势. 几何直观可以帮助我们理解微积分中的概念、结论和方法.

3. 解析法 所谓解析法就是将自变量与因变量之间的关系用方程表出. 这些方程通常称为函数的**解析表达式**. 例如：

(a) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(b) $y=\sin x-\lg(1+x)$；

(c) $y+\sin y=x+\lg x$；

(d) $y=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ 0, x<0\end{cases}$

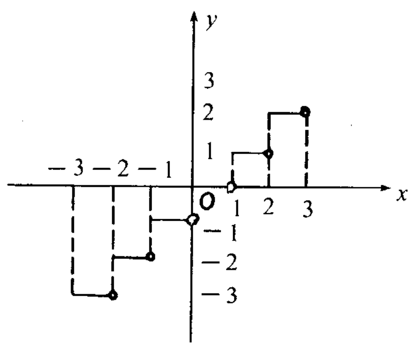

图 1.6

都是函数 y 的解析表达式. 下面分三种情况进行较深入地讨论.

(1)显函数 在(a)、(b)中，函数 y 已由 x 的解析式直接表示出来，称这种形式的函数为**显函数**.

(2)隐函数 在(c)中，y 未由 x 的解析式直接表出，所以不是显函

数，称其为隐函数. 一般地，若一个函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定的，并且 y 未被解成 x 的显函数的形式，则称这个函数为**隐函数**.

显然，隐函数是函数的更一般的形式. 这是因为：其一，显函数可看成隐函数；其二，一个隐函数 $y(x)$ 未必总能从其满足的方程 $F(x,y)=0$ 中解成显函数的形式.

(3)分段函数　在函数的解析表示法中，有些函数在其定义域的不同范围，具有不同的解析表达式，这种函数称为**分段函数**. 例如，(d)中所给的函数就是一个分段函数. 应该注意的是，分段函数是用几个解析式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数. 我们再给出几个分段函数的例子.

例 9　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，**这个函数称为符号函数**，如图 1.7.

用符号函数表示某些分段函数有时是方便的，例如

$$y=|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

例 10　函数

$$y=\begin{cases}-1-x^2, x<0,\\ 1+x^2, \quad x>0\end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域为 $X=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，如图 1.8.

五、反函数

在函数的定义中，有两个变量，一个叫自变量，一个叫因变量，一主一从，地位不同. 但在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量，并不是绝对的，要依所研究的问题而定. 在一定的条件下，函数的自变量与因变量的地位可以交换，这就得到一个新的函数，这个函数叫做原来那个函数的反函数. 一般地，有下列定义：

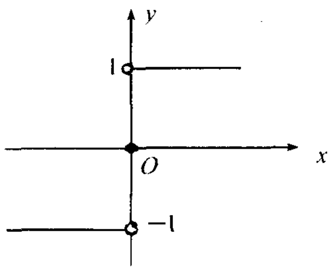

图 1.7

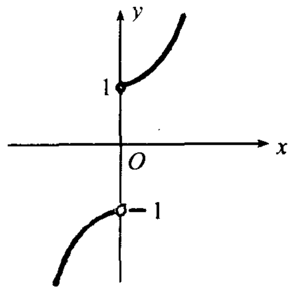

图 1.8

定义 1.2 设给定函数 $y=f(x)$，定义域为 X，值域为 Y. 如果对 Y 中的任一 y 的值，按关系式 $y=f(x)$，总有惟一的一个 $x\in X$ 与之对应，这样就得到一个以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数.

一般地，$y=f(x)$ 的反函数记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$.

因习惯上往往用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示因变量，所以总是将 $y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Y$.

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

值得注意的是，并非任何函数都具有反函数，因为对于某些 $y\in Y$，在 X 中可能有多个 x 值使得 $f(x)=y$. 例如，函数 $y=x^2$，$x\in X=(-\infty,+\infty)$，其值域为 $Y=[0,+\infty)$. 对每一 $y\in[0,+\infty)$，在 X 中有 x 的两个值 $x=\pm\sqrt{y}$ 使得 $x^2=y$，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=x^2$ 不存在反函数. 那么，在什么条件下 $y=f(x)$ 才具有反函数呢？现不加证明地给出下述定理.

定理 1.1 若 $y=f(x)$ 在其定义域上单调，则 $y=f(x)$ 存在反函数，且其反函数也是单调的（单调的概念将在 §1.2 中给出）.

例如，$y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 存在反函数 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$；$y=x^2$，$x\in(-\infty,0]$ 存在反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

六、复合函数

函数关系是可以传递的，就是说，如果变量 y 是变量 u 的函数，而 u 又是变量 x 的函数，那么在一定条件下，y 也是 x 的函数.

定义 1.3 设 $y=f(u)$，$u\in U$ 和 $u=\varphi(x)$，$x\in X$. 若 $u=\varphi(x)$的值域包含在 $y=f(u)$的定义域 U 中，将 $u=\varphi(x)$代入 $y=f(u)$得函数 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in X$，则称 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in X$ 为 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数. 其中 u 称为该复合函数的中间变量.

复合函数实际上是把一个函数代入另一个函数得到的，这种把一个函数代入另一个函数的运算称为**复合运算**. 当然，复合运算需要满足一定的条件.

复合函数可以推广到含有多个中间变量的情形.

例 11 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in[0,+\infty)$，且 $u=\varphi(x)=1-x^2$，$x\in[-1,1]$，则 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$是一个定义在$[-1,1]$上的复合函数.

例 12 设 $f(x)=\sqrt{x}+1$，$\varphi(x)=x^2$，求 $f[\varphi(x)]$及 $\varphi[f(x)]$，并求它们的定义域.

解 $f[\varphi(x)]=\sqrt{\varphi(x)}+1=\sqrt{x^2}+1=|x|+1$，其定义域为 $X_1=(-\infty,+\infty)$.

$\varphi[f(x)]=[f(x)]^2=(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1$，其定义域为 $X_2=[0,+\infty)$.

七、函数关系的建立

建立函数关系往往是用数学方法解决实际问题的第一步. 要把实际问题中变量之间的函数关系正确地抽象出来，首先应分析哪些是常量，哪些是变量；然后确定选取哪一个变量为自变量，哪一个变量为因变量；最后根据所给条件确立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

例 13 把一半径为 R 的圆形铁片，自中心处剪去圆心角为 α 的扇

形后，围成一无底圆锥，试将圆锥的体积 V 表为 α 的函数.

解　设圆锥底半径为 r，高为 h（如图 1.9）

$$r=\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}=R-\frac{\alpha R}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-\left(R-\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},$$

即

$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},\alpha\in(0,2\pi).$$

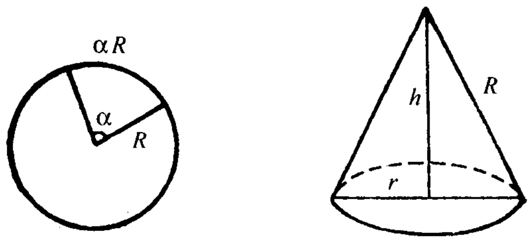

图 1.9

例 14　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元；超过 a 公里部分每公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解　根据题意可列函数关系如下：

$$m=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a,\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a.\end{cases}$$

本题中，m 关于 s 的函数关系是用分段函数表示的，其定义域为 $(0,+\infty)$.