线代数计算方法

〔苏联〕Д.К.法捷耶夫　B.H.法捷耶娃　著

上海科学技术出版社

統一书号 13119·676
定　价 3.70元

綫代数計算方法

〔苏联〕Д. К. 法捷耶夫　В. Н. 法捷耶娃　著

刘光武　殷国华　苏錦祥　譯

徐桂芳　游兆永　汪德順　校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书共分九章．第一章是綫代数基本知識，其余八章都是計算方法，主要內容可以分为三个方面：解綫性方程組，求逆矩陣，解全部和部分特征值問題．解这些問題的数値方法可以分为两类：精确法和迭代法，分別在第二至第八章中討論．第九章讲述通用算法，包括用保角映射法解綫性方程組的問題．本书可供計算数学专业作为主要教学用书，也可供計算工作者参考．

本书系根据原文 1963 年第二版譯出。

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева

Физматгиз · 1963

綫代数計算方法

刘光武　殷国华　苏錦祥　譯

徐桂芳　游兆永　汪德順　校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷五厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 25 4/32　排版字数 556,000

1965 年 9 月第 1 版　1965 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

統一书号 13119·676　定价(科六) 3.70 元

原　　序

本书专門叙述解綫代数基本問題的計算方法．所謂綫代数的基本問題，就是指下面几个問題：解綫性方程組、求逆矩陣、解全部特征値問題和部分特征値問題．

目前出現了很多解上述基本問題的数值方法，作者感到有必要将这些方法加以系統化，并以某种一般的观点来加以叙述．同时，要在叙述过程中尽可能利用綫代数的概念，而不涉及其他数学領域的知識．例如，作者有意識地避免使用連分数理論，而代之以正交多項式理論．后者应理解为在綫代数意义下的正交性．

本书几乎未涉及关于舍入誤差对計算結果所生影响的問題．

本书共分九章，第一章带有緒論性质，其余八章叙述計算方法．这几章的部分內容曾在 В. Н. Фаддеева 著《綫代数計算方法》一书（1950 年出版）中讲过．

书后附有关于綫代数計算方法及矩陣特征值的分布和估計的参考书目．在这些参考书目的編集过程中，曾得到了 И. А. Лифшиц 和 Р. С. Александрова 的重大帮助，作者謹向他們表示感謝．

本书原稿曾由 В. Н. Кублановская 閱过，承提出了許多宝貴意見，特致謝意．对于本书的編輯 Г. П. Акилов 以及有关編輯工作中的全体同志，作者也向他們表示謝意．

第二版序

在第二版里，作者保持了原书的結构和第一版所包括的全部內容．某些章节作了补充．例如，对于利用逆矩陣作迭代的方法作了更广泛的叙述（§55）．重写了§82～§85．凡直接或間接与Gauss变换有关的方法，都指出了它們对不定方程組和超定方程組的应用．

由于最近新的文献大量出現，本书后面的参考文献有所增加，并有部分更正．

作者仍未正式涉及到过程的稳定性問題和誤差估計問題，但有关这方面的有意义的文献最近却出現很多．同时也沒有反映出关于松弛法应用于数理方程的工作．

В. Н. Кублановская 对本书一直就很关怀，并且提出了很多宝貴意見，作者謹向她表示感謝．在修改和补充参考文献的过程中，Р. С. Александрова 曾給予很大帮助，在此一并致謝．

目　录

第 一 章

綫代数基本知識

§1 矩 陣

1. 定义 排成 n 行 m 列矩形格式的数的集合称为**矩陣**，一般說来，这些数是复数。

这种矩陣可写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

或者簡写为

$$A=(a_{ij}) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

两个矩陣称为是相等的，如果它們的对应元素相等。

只有一行組成的矩陣簡称为行；只有一列組成的矩陣称为列。由一个数組成的矩陣 $A=(a)$ 就恒等于該数。行数 n 和列数相等的矩陣称为**方陣**。在这种情形下，数 n 叫做矩陣的**阶**。

在各种方陣之中，对角綫方陣起着很重要的作用。所謂**对角綫方陣**，就是只有位于主对角綫上的元素不等于零而其余元素全等于零的方陣。对角綫方陣記为

$$[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n],$$

故

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}. \tag{2}$$

如果这里所有的 α_i 彼此相等，則方陣叫做**純量陣**，記作

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha\end{bmatrix}, \tag{3}$$

而在 $\alpha=1$ 时，則称为**单位矩陣**(或称为么陣)：

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=(\delta_{ij}), \tag{4}$$

此处 δ_{ij} 就是所謂 Kronecker 符号，即 $\delta_{ij}=0$ 当 $i\neq j$; $\delta_{ii}=1$.

最后，元素都等于零的矩陣称为**零矩陣**，用 0 表示.

把矩陣

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

的行和列互换位置，便得到所謂**轉置矩陣**

$$A'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}. \tag{5}$$

当且仅当方陣 A 是**对称陣**即 $a_{ij}=a_{ji}$ 时，A 才与它的轉置陣 A' 相等.

很明显，由行矩陣轉置而得的矩陣就是由同样元素构成的列矩陣. 今后为了书写方便,我們常要用到这个事实,例如,把列

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

写成$(4, 2, 3, 5)'$.

把矩陣元素换成对应的共軛复数，便得到与 A 成复共軛的矩陣 $\overline{A}$. 如果矩陣 A 的元素都是实数,则 $\overline{A}=A$.

与 A 的轉置矩陣成复共軛的矩陣 A^* $(A^*=\overline{A}')$ 称为与矩陣 A **共軛**. 显然

$$(A^*)^*=A.$$

如果矩陣 A 是实的，则与 A 共軛的矩陣同 A 的轉置矩陣重合.

以某一方陣的元素为元素的行列式称为該方陣的**行列式**. 方陣 A 的行列式用 $|A|$ 表示.

其次，以矩陣的部分行和列組成的任何一个行列式称为該矩陣的**子式**. 詳細地說,矩陣 A 的 k 阶子式就是由 A 中位于某 k 个行和某 k 个列相交处的元素全体,按原来次序組成的 k 阶行列式.

矩陣 A 中不等于零的子式的最高阶数，称为該矩陣的**秩**. 换句話說，矩陣的秩是这样一个数 r，即在矩陣的所有子式中，存在不等于零的 r 阶子式,而所有 $r+1$ 阶和更高阶的子式或者都等于零,或者不可能組成.

2. 矩陣与数的乘法,矩陣的加法　矩陣 $A=(a_{ij})$ 各元素乘以数 α 所得的矩陣叫做矩陣 A 与数 α 的乘积:

$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

两个行数与列数都相等的矩陣 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 的和，就是这样一个矩陣 C，它的元素等于 A, B 两矩陣的对应元素之和，亦即

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

不难看出，上面所导出的运算，具有下列性质：

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
2. $A+B=B+A$.
3. $A+0=A$.
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
6. $1\cdot A=A$.
7. $\alpha(\beta A)=\alpha\beta A$.

其中，A, B 和 C 是矩陣，而 α 和 β 是数.

3. 矩陣的乘法　两个矩陣 A 与 B 相乘，只有在第一个因子 A 的列数等于第二个因子 B 的行数的情况下才能定义. 在这种假定下，乘积 C 的元素，用下面方法来确定：矩陣 C 的第 i 行第 j 列的元素等于矩陣 A 的第 i 行各元素与矩陣 B 的第 j 列各对应元素之积的和，即

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

这里，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;j=1,\ \cdots,\ p). \tag{9}$$

我們注意到两个矩陣之积仍然是一个矩陣，其行数等于第一矩陣的行数，其列数等于第二矩陣的列数．例如，一个方陣与一个列矩陣之积是一个列矩陣．

一般説来，矩陣相乘时交换律是不成立的．容易看出，只有对同阶的方陣 A 和 B，关于 AB 和 BA 相等的提法才有意义．事实上，仅当第一矩陣的行数等于第二矩陣的列数，而第一矩陣的列数等于第二矩陣的行数时，AB 和 BA 才同时有意义．如果满足上述条件，則 AB 和 BA 都是方陣，但若 A 和 B 不是方陣，則 AB 和 BA 的阶数是不同的．一般来説，即使对同阶的两个方陣，也有 $AB\neq BA$．

例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -9 & 7\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

在某些个别情况下，矩陣的乘法可能是满足交换律的．在这种情况下，矩陣称为**可交换的**．例如，純量方陣可以和同阶的任何方陣交换位置．因为

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn}\end{bmatrix}.$$

从这个公式可以看出，在矩陣相乘时单位矩陣所起的特殊作用．即单位矩陣在給定阶数的所有方陣之中所起的作用，和数值1在数中所起的作用相同．事实上，

$$AE=EA=A.$$

矩陣的乘法是可結合的．就是說，当 AB 和 $(AB)C$ 有意义时，BC 和 $A(BC)$ 也有意义，并且

$$A(BC)=(AB)C.$$

事实上，$(AB)C$ 的第 i 行第 j 列元素等于

$$\sum_{\beta}[\sum_{\alpha}a_{i\alpha}b_{\alpha\beta}]c_{\beta j}=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}a_{i\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta j},$$

而 $A(BC)$ 的第 i 行第 j 列元素等于

$$\sum_{\alpha}a_{i\alpha}[\sum_{\beta}b_{\alpha\beta}c_{\beta j}]=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}a_{i\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta j}.$$

这样，矩陣 $(AB)C$ 与矩陣 $A(BC)$ 的各对应元素都相等，因而两矩陣相等．

矩陣乘积还具有下列性质：

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B),$$
$$(A+B)C=AC+BC,$$
$$C(A+B)=CA+CB.$$

此处 A, B, C 是矩陣，而 α 是数．

下面的乘积轉置規則成立：

$$(AB)'=B'A'. \tag{10}$$

事实上，矩陣 $(AB)'$ 的第 i 行第 j 列元素等于矩陣 AB 的第 j 行第 i 列元素，即等于

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jm}b_{mi}.$$

显然，这个式子等于矩陣 B' 的第 i 行元素与矩陣 A' 的第 j 列对应元素之积的和，也就是等于矩陣 $B'A'$ 的第 i 行第 j 列元素．

同样可知

$$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B},$$

$$(AB)^*=B^*A^*. \tag{11}$$

如上所述，如果矩陣 A 的行数 n 等于矩陣 B 的列数，则 AB 是方陣．用 m 表示矩陣 A 的列数(它等于矩陣 B 的行数，因为只有在这种条件下乘积 AB 才有意义)．由行列式理論可知，当 $n>m$ 时，矩陣 AB 的行列式等于零，而当 $n\leqslant m$ 时，它等于矩陣 A 中所有的 n 阶子式与矩陣 B 中对应的同阶的子式的乘积之和．更确切一些，即当

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

且 $n\leqslant m$ 时，则

$$|AB|=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}\begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ni_1} & \cdots & a_{ni_n} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{i_11} & \cdots & b_{i_1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i_n1} & \cdots & b_{i_nn} \end{vmatrix}.$$

例如，当 $m=n$ 时，

$$|AB|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即，**两个方陣的乘积的行列式等于这两个方陣的行列式之积**．

4．矩陣的分块　把高阶矩陣的計算化为低阶矩陣的計算有时是比較合适的，这个轉化借助于将已知矩陣分成所謂块的方法来实現．就是說，每个矩陣都可以看作是由某些低阶的矩陣組成，而且，組成的方法很多．例如