数学小丛书

算周问题

11

蔡宗熹

π

i

科学出版社

www.sciencep.com

数学小丛书 11

等 周 问 题

蔡 宗 熹

科 学 出 版 社
2002

内 容 简 介

等周问题的典型例子之一是“周长相等的所有封闭平面曲线中,怎么样的曲线所围成的面积最大?”这本小册子主要是介绍它的初等解法及一系列有趣的应用. 念过平面几何及三角的读者完全能看懂它.

本册先从简单的三角形谈起,接着论述:四边长度给定的一切四边形中,内接于圆的四边形具有最大的面积;周界长度给定的所有 n 边形中,正 n 边形具有最大的面积. 进而给出了上述等周问题解答的两个证明和海伦公式的推广. 最后证明了一切体积相同的立体中,球体具有最小的表面积.

图书在版编目(CIP)数据

等周问题/蔡宗熹. —北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.等… Ⅱ.蔡… Ⅲ.等周问题-普及读物
Ⅳ.O176.2-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010496 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 5 月第 一 版 开本:787×960 1/32
2002 年 5 月第一次印刷 印张:3 1/8 插页:1
印数:1—5 000 字数:45 000

全套书定价: 99.00 元(共 18 册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算π之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经300多年终于在20世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

前　　言

等周问题，就是要在周长条件等同的所有区域中，找出面积最大的区域．所以等周问题属于极值问题范畴．

等周问题是一个古老的问题，同时又是一个有着广泛应用的，并在不断发展的问题．

学习方法是多种多样的，可以先看本书后记，在了解了本书的主要精神之后，再从头来认真阅读正文，领会“对称性”和“反射法”．

目　　录

1 自然现象之谜

你小时候吹过肥皂泡吗? 肥皂泡像无数五色缤纷的小球在空中飞舞着,多有趣! 可你是否想过:为什么吹出来的肥皂泡总是一个个的圆球? 你从来没有见到吹出像蕃茄、辣椒那样形状的肥皂泡吧!

也许你还遇见过下列这些现象:

假如你一不小心,打破了一支水银温度计,水银落到桌面上,你将看见许多银色的珍珠在桌面上滚动着.

如果你参观过机械工厂的翻砂车间,翻砂时溢出来的铁水凝成许多球形的弹子.

要是你生长在农村,当你大清早绕过荷塘时,你会看到在荷叶的中心露水聚成一个"水银球",晶莹欲滴.

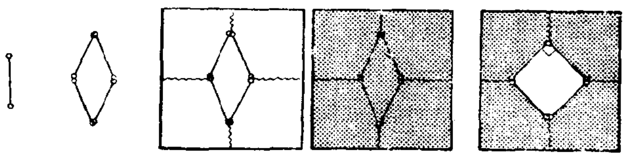
…………

对于这些自然现象,你也许会立即用物理知识加以解释,因为中学物理书里告诉我们:

“在表面张力的作用下，液体有力求使其表面积达到最小的趋势.”可是，由于水珠、水银珠等变形时它们的体积是不变的，因此要使人们信服这一物理解释，就无异于要求人们承认：“在一切具有相同体积的几何形体中，球体具有最小的表面积.”这一个数学命题的正确性是有待于严格证明的.

让我们来做另外的两个有趣的实验：

【实验一】取四根一样长的细铁丝，在每一根铁丝的两端各绕上一个小圆圈(图1(a)).将每一根上的小圆圈与另一根上的小圆圈套起



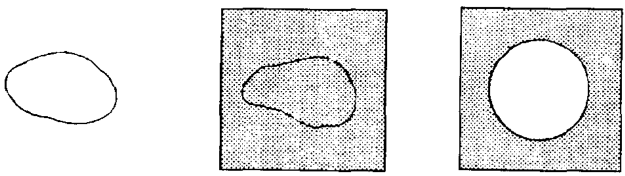
(a) (b) (c) (d) (e)

图 1

来，做成一个菱形(图1(b)).菱形每边的长度是固定的，四个顶角可以自由活动.将这个菱形的四个顶点用细线结在铁框上(如图1(c)).这时，若将铁框在肥皂液中浸一下，铁框以及菱形的表面立即张蒙了一层肥皂膜(图1(d)).如果用小针将菱形内的薄膜刺破，菱形就立刻变成一个正方形(图1(e)).

我们知道,当菱形内的薄膜消失后,由于外部肥皂膜的表面张力的收缩作用,菱形的面积就尽可能地张大.实验的结果表明:菱形最后变成了正方形.于是,这个实验便向我们提出了一个数学命题:“在周长相同的一切菱形中,以正方形的面积为最大.”

【实验二】将一条有固定长度的柔软细丝的两头连接起来,围成一条有任意形状的封闭曲线(图2(a)).将此曲线轻轻地搁置在一个蒙有肥皂膜的铁框上(图2(b)).如果用小针将曲线内的薄膜刺破,这条曲线就立刻变成一个圆(图2(c)).



(a) (b) (c)

图 2

用与前一个实验同样的理由来解释这实验的结果,必然地引导出另一个新的数学命题:“在周长相同的所有封闭平面曲线中,以圆所围的面积为最大.”

上面两个数学命题有一个相同的特点,即在对周界加上一些限制后,断言某些平面图形

具有最大的面积.这一类型的数学问题统称为**等周问题**.前面提出的就是等周问题的几个特例,它们的正确性当然有待于用严格的数学方法来加以证明.除上面提出的几个特殊的等周问题外,还有不少著名的等周问题.高等数学里关于这类问题已经有了非常丰富的理论.这本小册子的主要任务是用中学平面几何和平面三角的方法来讨论某些简单的等周问题.

2 几个简单的引理

我们从最简单的关于三角形的几个等周问题谈起.

先考虑这样一个问题:在两边长度给定的所有三角形中,怎样的三角形面积最大? 任取长度给定的一边 CA 为底,其对应的高将随着两给定边 CA、CB 的夹角 θ 而改变(图 3). 从图上可以看出,开始时面积随着 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的增大而增大;但当 θ 增大到了 $\frac{\pi}{2}$ 以后,面积却随着 $\theta\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)$ 的增大反而减小. 从这个变化

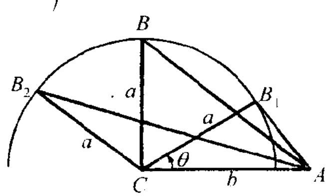


图 3

过程可以导出：

引理 1 两边长度给定的所有三角形中，以给定的两边相互垂直时的三角形的面积最大.

证明 设两给定边的长度为 a、b，夹角为 θ（图 3）. 此时，三角形面积 S 的表达式是

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，正弦函数具有最大值. 因此，三角形面积也就具有最大值.

下面我们再考虑：在底边及项角给定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大？在底边及另外两侧边之和给定的所有三角形中，怎样的三角形面积最大？这些简单的等周问题在往后的讨论中起着重要的作用.

引理 2 在底边及顶角给定的所有三角形中，以等腰三角形的面积最大.

证明 以给定的底边 AB 为弦，做圆弧 $\overset{\frown}{BCA}$，使其所张的圆周角等于给定的顶角 $\angle BCA$（图 4）. 由顶点 C 到底边 AB 引垂线 CD，三角形的面积等于 $\frac{1}{2}AB \cdot CD$. 由于 AB 是给定的，故当 CD 取最大值时，三角形的面积亦取最大值. 易知，当 C 点位于圆弧 $\overset{\frown}{BCA}$ 的中点

时，高 CD 具有最大值，因而 $\triangle ABC$ 的面积亦最大. 而此时，显然有 $BC = AC$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

为了使用方便起见，我们把引理二表成另一种形式：

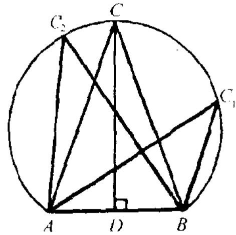


图 4

引理 2* 以圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弦 AB 为底，顶点 C 在圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的所有三角形中，当顶点 C 位于圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，三角形的面积最大.

引理 3 在底边及两侧边的长度之和分别给定的所有三角形中，以等腰三角形的面积最大.

证明 作等腰三角形 ABC 和不等腰三角形 ABC'，其公共底边 AB 等于定长，C 与 C' 在 AB 的同侧，且 $AC + BC = AC' + BC'$ 亦为定长（图 5）. 容易看出 $\triangle ABC'$ 的顶点 C' 不可能落在 $\angle BCA$ 或其对顶角内，否则将有

$$AC' + BC' < AC + BC$$

或

$$AC' + BC' > AC + BC,$$

这是不允许的. 因此，C' 只能落在同 $\angle BCA$ 相邻的 $\triangle ABC$ 的一个外角内. 由于 $\triangle ABC$ 是等

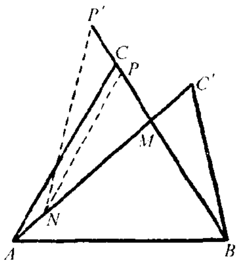


图 5

腰三角形，不妨设 C' 落在 BC 边的外侧，AC' 与 BC 相交. 设 AC' 和 BC 相交于 M，交点 M 将 AC' 和 BC 各分为两段 AM、MC' 及 BM、MC. 由于

$$\angle MAB < \angle CAB,$$

而

$$\angle CAB = \angle CBA = \angle MBA,$$

所以

$$\angle MAB < \angle MBA.$$

因此，在 $\triangle MAB$ 中，$AM > BM$.

这样，我们就可以在线段 AM 上取一点 N，使 $MN = MB$；再在直线 MC 上取一点 P，使 $MP = MC'$. 如果 P 点落在线段 MC 上，那么在 $\triangle NPM$ 和 $\triangle BC'M$ 中，由于 $MN = MB$，$MP = MC'$ 且 $\angle NMP = \angle BMC'$，所以 $\triangle NPM \cong \triangle BC'M$. 因此，$\triangle NPM$ 的面积 $S_{\triangle NPM}$ 也就等于 $\triangle BC'M$ 的面积 $S_{\triangle BC'M}$. 于是

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle NMP} + S_{\square ANPC}$$

$$= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BC'M} + S_{\square ANPC}$$

$$> S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BC'M} = S_{\triangle ABC'}.$$

这就是我们要证的结果.由此,问题全部归结为证明 P 点落在线段 MC 上.如果不是这样,设 P 点落在 MC 的延长线上(记为 P'),那么由于

$$AC + BC = AC' + BC',$$

而

$$BC = BM + MC = BM + MP' - CP',$$

$$AC' = AM + MC' = AN + NM + MC',$$

从而有

$$AC + BM + MP' - CP'$$

$$= AN + NM + MC' + BC'.$$

由于

$$MP' = MC', \quad MN = MB,$$

$$\triangle NP'M \cong \triangle BC'M, NP' = BC'.$$

所以上式可简化为

$$AC - CP' = AN + BC' = AN + NP',$$

即

$$AC = AN + NP' + P'C.$$

这显然是不可能的,因为两点间直线最短.故知

P 点必落在线段 MC 上.

用完全相同的步骤可以证明:

引理 3* 设两三角形的底边长度及两侧边长度之和分别相等,那么两侧边之差较小的三角形具有较大的面积.

附注 引理 3 有一简单的证明:

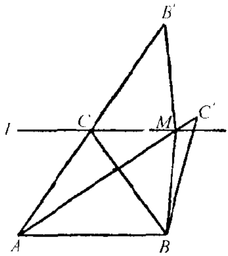


图 5*

设$\triangle ABC$ 为等腰三角形,$\triangle ABC'$不等腰,其公共底边 AB 等于定长,且 $AC+BC=AC'+BC'$(图 5*).兹证:

$$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle ABC'}.$$

不妨设 C、C'在 AB 的同侧,过 C 引直线 l 平行 AB,现只需证 C'落在 l 与 AB 之间.不然,若 AC'与 l 相交于 M(可能 M 和 C'重合,但 M 和 C 必不重合).作 B 关于 l 的对称点 B',即延长 AC 至 B',使 $AC=CB'$,连 BM、$B'M$,则有

$$\begin{aligned}AC'+BC'&\geqslant AM+BM=AM+MB'\\&>AC+CB'=AC+BC.\end{aligned}$$

这是不可能的.

这证明方法虽言简单,但它不能用来证明引理 3*.