初級中学課本

平面几何

PINGMIANJIHE

（暂用本）

第二册

人民教育出版社

初級中学課本

平 面 几 何

（暫用本）

第 二 册

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社編輯出版（北京景山东街）

河北人民出版社重印

河北省新华书店发行

北京新华印刷厂印刷

統一书号：K7012·1273　字数：137 千

开本：850×1168 毫米　1/32　印張：6 13/16

1962 年第一版

第一版 1962 年 12 月第一次印刷

天津：1—70,300 册

定价 0.55 元

附：三角函数表（0° 到 90° 間整数度数的角）

角　度	正　弦	余　弦	正　切	余　切	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	—	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68°
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63°
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60°
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59°
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58°
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54°
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52°
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50°
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47°
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45°
	余　弦	正　弦	余　切	正　切	角　度

目　录

第四章　圓

I. 圓的一些重要性質

4.1　圓　在前几章里，我們已經学过由直綫所組成的一些几何图形的性質．現在我們来研究关于圓的一些重要性質．

和一个定点的距离等于定长的点的軌迹叫作圓，这个定点叫作圓心，这个定长叫作半徑．

圓可以用符号“⊙”来表示，以 O 点为圓心的圓記作“$\odot O$”．

图 4.1 是以 O 为圓心，以 r 为半徑的圓．从图 4.1，我們很容易看到 $OA=r, OB<r, OC>r$．因此，我們可以得出如下的定理．

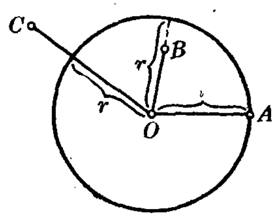


图　4.1

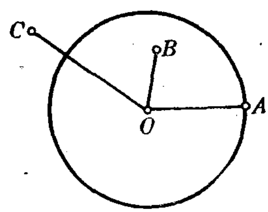


图　4.2

定理　**圓上的点到圓心的距离等于半徑；圓内的点到圓心的距离小于半徑；圓外的点到圓心的距离大于半徑．**

現在我們来証明这个定理的逆定理．

逆定理　**到圓心的距离等于半徑的点在圓上，到圓心的距离小于半徑的点在圓内，到圓心的距离大于半徑的点在圓外．**

已知　$\odot O$ 的半徑等于 r．$OA=r, OB<r, OC>r$(图 4.2)．

求証 (1) A 在⊙O 上, (2) B 在 ⊙O 內, (3) C 在 ⊙O 外.

証明 (1) ∵和 O 点距离等于 r 的所有的点都在 ⊙O 上,

$OA=r$,

∴ A 点在 ⊙O 上.

(2) B 点的位置必定是如下三种情形中的一种. 就是: 在⊙O 上, 在⊙O 外, 或者在⊙O 內.

如果 B 点在⊙O 上, 那么 OB 就等于 r, 这和已知条件 $OB<r$ 相矛盾, 所以这种情形是不可能的.

如果 B 点在 ⊙O 外, 那么 OB 就大于 r, 这也和已知条件 $OB<r$ 相矛盾, 所以这种情形也是不可能的.

既然 B 点在⊙O 上和在 ⊙O 外都不可能, 那么 B 点就一定在⊙O 內.

(3) 学生可以仿照(2)的証法自己来証明.

上面(2)的証明中所用的方法叫作**反証法**. 这种方法是, 先假定定理中結論的反面成立, 推出和定理中巳知条件相矛盾的結果, 从而断定定理中的結論的反面不可能成立, 因而断定定理中的結論一定正确.

4.2 弦、直徑和弧 連結圓上任意两点的綫段叫作**弦**(如图 4.3 的 CD). 經过圓心的弦叫作**直徑**(如图 4.3 的 AB).

关于同圓或者等圓(半徑相等的圓)的直徑和弦, 有如下的一些定理.

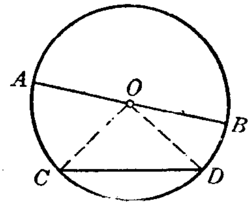


图 4.3

同圓(或者等圓)的直徑相等, 等于半徑的 2 倍.

同圓(或者等圓)的直徑大于不經过圓心的任何一条弦(如图 4.3, $AB=OA+OB=OC+OD>CD$).

把 $\odot O$(图 4.3)沿着它的任何一条直徑 AB 对折，AB 两边的两部分就重合在一起. 因此，**圓的任何一条直徑都把圓分成两个半圓,圓是軸对称图形,任何一条直徑都是它的对称軸.**

圓上任意两点間的部分叫作**弧**. 弧可以用符号"$\frown$"来表示,以 C 和 D 为端点的弧可以記作"$\overset{\frown}{CD}$". 因为圓上任意两点把圓分成两条弧,所以为了区别这两条弧,我們有时在两个大写字母中間添上一个字母,如图 4.4的两条弧分别記作 $\overset{\frown}{CmD}$ 和 $\overset{\frown}{DnC}$.

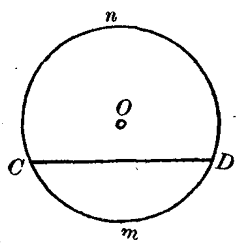


图 4.4

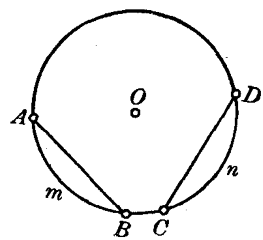


图 4.5

在同圓(或者等圓)上的两条弧，可以用迭合的方法来比較它們的大小. 如图 4.5 把 $\overset{\frown}{AmB}$ 放在 $\overset{\frown}{CnD}$ 上，使 A 点和 C 点重合,因为同圓(或者等圓)的半徑相等,所以 $\overset{\frown}{AmB}$ 就順着 $\overset{\frown}{CnD}$ 落下,如果 B 点和 D 点也重合,那么 $\overset{\frown}{AmB}=\overset{\frown}{CnD}$; 如果 B 点不和 D 点重合,而落在 $\overset{\frown}{CnD}$ 上，那么 $\overset{\frown}{AmB}<\overset{\frown}{CnD}$; 如果 B 点落在 $\overset{\frown}{CnD}$ 外,那么 $\overset{\frown}{AmB}>\overset{\frown}{CnD}$. 必須注意，不在同圓(或者等圓)上的两条弧，我們不能用迭合的方法来比較它們的大小.

小于半圓的弧叫作**劣弧**(如图 4.4 的 $\overset{\frown}{CmD}$),大于半圓的弧叫作**优弧**(如图 4.4 的 $\overset{\frown}{DnC}$). 对于劣弧，可以只用表示它的两个端点的字母来表示,如图 4.4 的劣弧 $\overset{\frown}{CmD}$ 可以只記作 $\overset{\frown}{CD}$.

4.3 不在一直綫上的三点确定一个圓 我們知道,經过两点能画一条直綫,并且只能画一条直綫. 这就是說,两点确定一

条直綫．那么，几点确定一个圓呢？

我們先来看一看，經过一点 A 能画几个圓(图 4.6)．

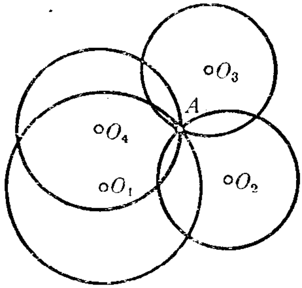


图 4.6

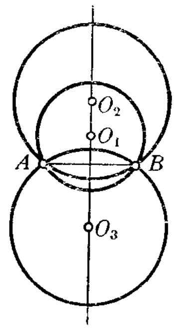


图 4.7

很明显，在平面內任取一点为圓心，以这点到 A 点的距离为半徑所画的圓都經过 A 点(如图 4.6 的 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$)．因此，經过一点能画无数个圓，这些圓的圓心可以任意选擇．

再来看一看，經过两点 A 和 B 能画几个圓(图 4.7)．

我們知道，在綫段的垂直平分綫上的点和这綫段两端的距离相等．根据这个性質可以知道，以 AB 綫段的垂直平分綫上的任何一点为圓心，以它到 A 点的距离为半徑所画的圓都經过 A 和 B 两点．因此，經过两点能画无数个圓，这些圓的圓心都在連結这两点的綫段的垂直平分綫上(因为和一条綫段的两端距离相等的点，在这条綫段的垂直平分綫上)．

現在来看，經过 A、B、C 三点能画几个圓(图 4.8 和 4.9)．

先設 A、B、C 三点不在同一条直綫上(图 4.8)．这时，連結 AB、BC、CA 就成 $\triangle ABC$．分别画 $\triangle ABC$ 的两条边 AB、BC 的垂直平分綫 MN 和 PQ，得交点 O，那么 O 点和 A、B 的距离相等，又和 B、C 的距离相等，所以 O 点和 A、B、C 三点的距离都相

等. 因此，以 O 点为圆心，以 OA 为半徑所画的圓，一定經过 A、B、C 三点. 因为 AB 和 BC 的垂直平分綫只有一个交点 O，OA 的长是一定的，所以这样的圓只能有一个. 由此得到如下的定理.

定理　不在一直綫上的三点确定一个圓.

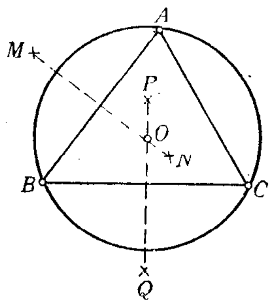


图　4.8

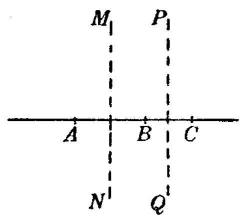


图　4.9

再設 A、B、C 三点在同一条直綫上(图 4.9). 这时，因为 AB 和 BC 的垂直平分綫 MN 和 PQ 平行，沒有交点，所以找不到和 A、B、C 三点距离相等的点. 因此，經过在一直綫上的三点不能画圓.

图 4.8 的三角形的三个頂点都在圓上. 頂点在一个圓上的多边形叫作这个圓的**內接多边形**，这个圓叫作这个多边形的**外接圓**. 如图 4.8，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的內接三角形，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圓. 外接圓的圓心簡称**外心**. 如图 4.8，O 点是 $\triangle ABC$ 的外心.

图 4.8 的 $\triangle ABC$，两条边 AB 和 BC 的垂直平分綫的交点是 O，$OA=OB$，$OB=OC$，所以 $OA=OC$，因此，O 点一定在 AC 边的垂直平分綫上. 由此可以得到如下的推論.

推論 三角形三边的垂直平分綫相交于一点，这点就是三角形的外心.

例 求一个已知弧的圓心.

已知 $\overset{\frown}{AC}$.

求作 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心 O.

作法 在弧上任意取三点 A、B、C (图 4.10)，連結 AB 和 BC; 分别作 AB、BC 的垂直平分綫 MN 和 PQ. 設 MN、PQ 相交于 O，那么 O 点就是所求的圓心.

証明 根据作法，已知弧是經过 A、B、C 三点的圓的一部分，O 点是經过 A、B、C 三点的圓的圓心. 但是經过这三点的圓只有一个，所以 O 点就是已知弧的圓心.

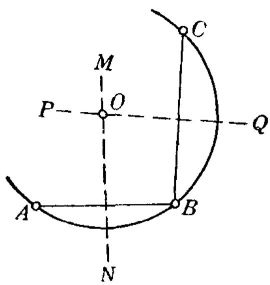


图 4.10

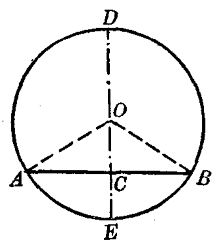


图 4.11

4.4 垂直于弦的直徑 現在我們来研究有关弦和弧的一些性质，先来研究垂直于弦的直徑.

定理 垂直于弦的直徑平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

已知 在⊙O 中，直徑 DE 垂直于弦 AB，交点是 C(图 4.11).

求証 $AC=BC$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

証明 連結 OA、OB，那么 $OA=OB$，所以 $\triangle OAB$ 是等腰三角形.

因为 $DE\perp AB$，所以 DE 是等腰三角形 OAB 的对称軸；又 DE 是 $\odot O$ 的直徑，所以 DE 又是 $\odot O$ 的对称軸. 因此，当半圓 EBD 迭合在半圓 EAD 上时，B 点和 A 点重合，BC 和 AC 重合，$\overset{\frown}{BE}$ 和 $\overset{\frown}{AE}$ 重合，$\overset{\frown}{BD}$ 和 $\overset{\frown}{AD}$ 重合. 由此可知

$$AC=BC,\quad \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE},\quad \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}.$$

从这个定理我們还可以得出如下的推論.

推論 1 **平分弦的直徑垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.**

推論 2 **弦的垂直平分綫經过圓心，并且平分这条弦所对的两条弧.**

例 1 如图 4.12，两个同心圓(就是有公共圓心的圓)中大圓的弦 AB 交小圓于 C、D，求証 $AC=DB$.

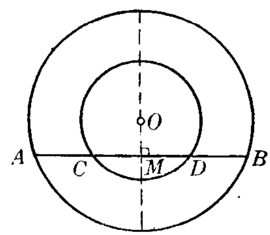


图 4.12

已知 两个以 O 为公共圓心的圓，大圓的弦 AB 交小圓于 C、D.

求証 $AC=BD$.

証明 經过 O 点作弦 AB 的垂綫，交 AB 于 M. 那么

$AM=BM$，$CM=DM$(垂直于弦的直徑平分这条弦)，

$$\therefore\quad AM-CM=BM-DM,$$

就是 $\quad AC=BD.$

例 2 平分一条已知弧.

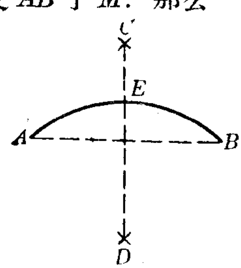


图 4.13

已知 $\overset{\frown}{AB}$(图 4.13).

求作　平分 $\overset{\frown}{AB}$ 的点.

作法　連結 AB. 作 AB 的垂直平分綫 CD, 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 E 点. E 点就是所求的点.

証明　CD 是弦 AB 的垂直平分綫,

$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$(弦的垂直平分綫平分这条弦所对的弧).

例 3　已知⊙O 的直徑 AC 是6cm, 弦 AB 与 AC 的交角是30° (图 4.14), 求 O 到 AB 的距离 OD 以及弦 BC 的长.

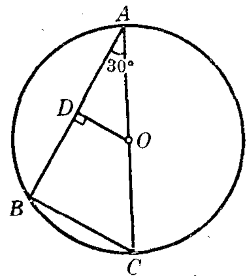


图　4.14

解　因为 $OD\perp AB$, 所以 OD 平分 AB. 在直角三角形 AOD中, $\angle A=30°$, 所以

$$OD=\frac{1}{2}AO$$

$$=\frac{1}{4}AC$$

$$=1.5(\mathrm{cm}).$$

因为 O、D 分别是 AC 和 AB 的中点, 所以 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位綫, 因此

$$BC=2OD=3(\mathrm{cm}).$$

4.5　弧、弦、弦心距之間的关系　圓心到一条弦的距离叫作这条弦的弦心距. 如图 4.15, ⊙O 中的 $OE\perp AB$, OE 就是弦 AB 的弦心距.

定理　在同圓或者等圓中:

(1) 如果弧相等, 那么所对的弦相等, 并且弦心距也相等;

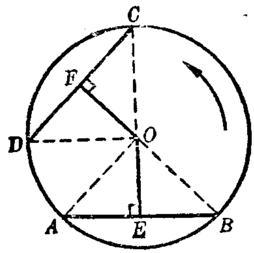


图 4.15

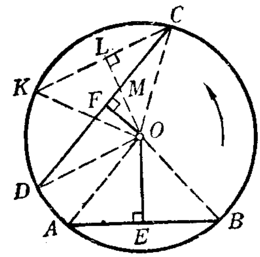


图 4.16

(2) 如果两条劣弧不等，那么大弧所对的弦較大，并且大弧所对的弦的弦心距較小.

(1) **已知** 在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$ (图 4.15).

求証 $AB=CD$, $OE=OF$.

証明 連結OA、OB、OC、OD. 把$\overset{\frown}{AB}$連同它两端的半徑繞着圓心O，依图中箭头所指的方向旋轉，使半徑OA和半徑OC重合.

$\because$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$重合，弦AB和弦CD重合，弦心距OE和弦心距OF重合(从一点到一条直綫只能引一条垂綫).

$\therefore$ $AB=CD$, $OE=OF$.

(2) **已知** 在$\odot O$中，$\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{AB}$, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$ (图 4.16).

求証 $CD>AB$, $OF<OE$.

証明 把$\overset{\frown}{AB}$連同它两端的半徑繞着圓心O，依图中箭头所指的方向旋轉，使半徑OA和半徑OC重合.

$\because \quad \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$,

$\therefore \quad$ B 点落在 $\overset{\frown}{CD}$ 上的 K 点处，$\overset{\frown}{CK} = \overset{\frown}{AB}$.

連結 CK、OC、OD、OK，并且作 $OL \perp CK$，交 CK 于 L，交 CD 于 M，就得

$$\angle COD > \angle COK, \quad CK = AB, \quad OL = OE.$$

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OCK$ 中，

$OC = OC, OD = OK$,

$\angle COD > \angle COK$,

$\therefore \quad CD > CK$.

因此 $\quad CD > AB$.

其次，在直角三角形 OFM 中，OM 是斜边，OF 是直角边，

$\therefore \quad OF < OM$.

但 $\quad OM < OL$,

$\therefore \quad OF < OL$.

因此 $\quad OF < OE$.

上面是在同圓中来証明的．对于等圓来說，只要把两个圓迭合成一个圓，就和同圓的情形完全一样．以后遇到类似的問題，我們也只就同圓来研究．

用反証法可以証明上述定理的逆定理．

逆定理 在同圓或者等圓中：

(1) 如果弦相等，那么弦心距相等，并且所对的劣弧也相等．

(2) 如果弦心距相等，那么弦相等，并且弦所对的劣弧也相等．

(3) 如果弦不等，那么大弦的弦心距較小，并且大弦所对的劣弧較大.

(4) 如果弦心距不等，那么弦心距大的弦較小，并且弦所对的劣弧也較小.

例 以 $\angle A$ 的平分綫上的一点 O 为圆心作一个圓，在 $\angle A$ 的两边上截得两条弦 BC 和 DE(图 4.17). 求証:

$BC=DE, \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$.

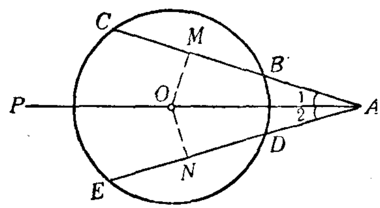


图 4.17

已知 AP 是 $\angle A$ 的平分綫，O 是 AP 上的任意一点，$\odot O$分别交 $\angle A$ 的两边于B、C 和 D、E.

求証 $BC=DE, \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$.

証明 作 $OM\perp BC, ON\perp DE$.

$\because$ O 点在 $\angle A$ 的平分綫 AP 上,

$\therefore$ $OM=ON$.

$\therefore$ $BC=DE, \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$(弦心距相等的弦相等，并且弦所对的劣弧也相等).

习 題 十 四

1. 已知綫段 AB. 以 AB 的中点为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 的长为半徑画一个圓(只要画出图形，在图上注明字母，就可以了，不必写作法和証明，以后凡是画图的題目，都是这样要求).

2. 用反証法証明 § 4.1 逆定理中的(3).

3. (口答)$\odot O$ 的半徑是 3cm. 設有 A、B、C 三点，已知 $OA=3.8$cm, $OB=2.7$cm, $OC=3$cm. 这三点哪个在圓上？哪个在圓內？哪个在圓外？

4. 已知 O 是矩形 $ABCD$ 的两条对角綫的交点，求証 A、B、C、D 四个頂点都在以 O 为圓心，以 OA 为半徑的圓上.

5. 画一个圓，再画出它的一条半徑、一条直徑和一条不經过圓心的弦，并且在图上注明它們的名称.

6. (1) 画一个直徑等于 4cm 的圓.

(2) 任意画一个圓和它的一条半徑，然后以这条半徑为直徑画一个圓.

7. 已知 AB 是 $\odot O$ 的一条直徑.

(1) 从 A 画一条弦，使它的長等于 $\odot O$ 的半徑. 能不能再画一条？

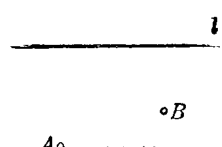
(2) 从 A 画一条弦，使它和 AB 所夾的角等于 30°。这样的弦能画几条？

8. 設 A 是 $\odot O$ 外的一点，AO 交 $\odot O$ 于 B 点，AO 的延長綫交 $\odot O$ 于 C 点，D 是 $\odot O$ 上另一点. 求証(1) $AB<AD$; (2) $AC>AD$.

9. (口答) (1)一个圓是不是軸对称图形？它有几条对称軸？(2)一个圓是不是中心对称图形？它有几个对称中心？

10. A、B 两点的距离是 3cm. (1)任意画一个經过 A、B 两点的圓；(2)画經过 A、B 两点并且半徑等于 2cm 的圓，这样的圓可以画几个？

11. 如图，已知 A、B 两点和一条直綫 l. 现在要經过 A、B 两点作一个圓，并且使圓心在 l 上，应該怎样作图？(要写作法和証明，以后凡是作图的題目，都



(第 11 題)

是这样要求.）

12. 画边长是下列长度的三角形，并且画出每一个三角形的外接圆：

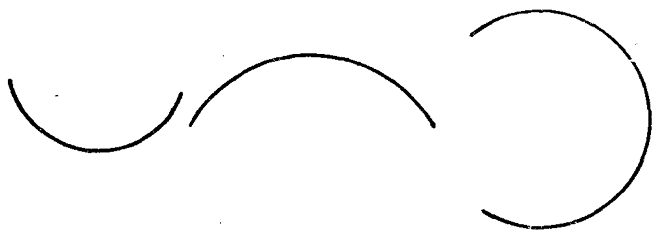
(1) 2cm、1.5cm 和 2.2cm；

(2) 2cm、1.5cm 和 2.5cm；

(3) 2cm、1.5cm 和 3.2cm.

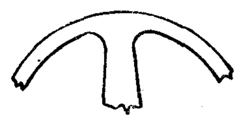
13. 有一块圆形的鋼板，要在它的圆心处鉆孔，怎样找出鉆孔的位置？（要写作法和証明.）

14. 用不同的圆形片画出一些弧来，求这些弧的圆心（只要画图），然后量出原来圆形片的直徑.



（第 14 題）

15. （口答）要根据如图所示的破皮带輪鑄一个和它原来一样的新的皮带輪，怎样决定它的大小？



（第 15 題）

16. 用不同的圆形片画出一些弧来，再把它們分成二等分、四等分（只要画图）.

（第 16 題）

17. 从圆上一点所作的互相垂直的两弦，它們和圆心的距离分别是 6 厘米和 10 厘米，求这两弦的长.

18. 已知 AB、CD 是 $\odot O$ 中互相垂直的弦，并且 AB 把 CD