機械原理

南京工學院 譯

長春汽車拖拉机學院 翻印

一九五七年四月

印出的幾句話

一、去年暑假我們在哈尔濱工業大学开全國机械原理經驗交流会的时候，向交通大学借了一本 Кожеников 1949 版上册（結構和运动学部份）譯稿，作为教学上参考之用。当时有些院校覺得也需要，因此我院就把它作为交流資料印出。

二、交大譯稿封面上寫有“譯者南京工学院机械原理教研室”。据云：这譯稿是几年前有些同志作为学習俄文而譯出的，我們从經驗交流会上借來，全部照原稿印出，僅將其中筆誤和印錯的地方稍作改正。因此我們要着重声明：这册子僅供教研室同人手头翻閱参考材料，不能把它当作一本書籍。至于文意的出入，譯名的对否，字句的差異，須請同志們自行評正了。

三、我們拿回來半年，到今天才能印出，这固然由於我們工作上的缺点，但紙張的缺乏，也是不易解決的問題。曾經有些兄弟院校來閣催索，我們也無以回答，躭誤了大家的需要，深致歉意！据“机械原理簡訊”說：柯氏 1954 版譯書即將出版，想起來这旧版的参考价值也就不大了。

長春汽車拖拉机学院机械另件教研室

1957 年 3 月

第一章 機構的結構分析

§1. 自由度及制約条件

質点在平面內的位置被兩坐标 x 及 y（圖 1）所决定. 若其中任一坐标不知，則点 A 在平面內可佔据任意的位置，沿着 x 軸的移动与沿着 y 軸的移动不相关. **即自由的点有可能在兩方向獨立其中每一獨立的运动稱作自由度. 這樣在平面运动中，自由質点，具有兩個自由度**，可以限制質点 A 的运动的自由，例如強制它循着曲線运动，設独立地採取兩坐标中的一个位移，則可依照已知曲線函数式 $y=f(x)$ 完全决定出次一位移. 即点在其本身运动中已經受了限制，約束，它以前所有的能动性之一是損失了，在这种情况下，所以說，点加上了以数学表示的函数式 $y=f(x)$ 的制約条件. **加在自由的点的运动上的限制叫做制約條件.**

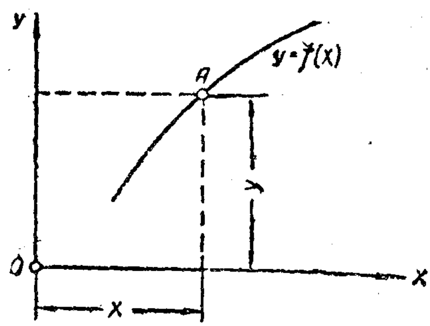

圖 1

設已知兩独立的制約条件函数 $y=f_1(x)$ 及 $y=f_2(x)$，則点的移动可能性將被剝奪，因为它同时要在兩个曲線上，而僅有在这种情况下有可能，即此点与曲線交点相重合.

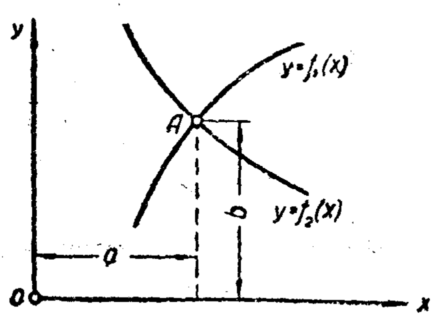

圖 2

函数式 $y=f_1(x)$ 及 $y=f_2(x)$ 的根决定 A 点的坐标 a 及 b.（圖 2）表明加了上述数学函数式表

示的制約条件后，自由質点的一双能动性便被消滅了.

从所述得出結論，**自由度與制約條件是相互排斥的概念**. 加上去的制約条件不可用相同的等式表示，因为在此情形下，第二个制約条件不能限制点的运动. 因此就不是制約条件.

具有完全自由的兩点，它們总共得到四个自由度，此兩点指示出，可以給点以完全任意的四个移动，以循坐标軸絕对地移动的形式，或以一点为絕对移动形式，第二点相对於第一点而移动. 与一点的情形相似在此兩点中的每一点上，可以加上制約条件來破坏它的絕对的或相对的移动.

在兩点A及B的相对的移动上，可以加上任意形式的制約条件，可是在下面我們僅論及一种可能的制約条件，即加上的制約条件为点A到点B間距离不变. 假使点A的坐标为 x_1 及 y_1，而点B的坐标为 x_2 及 y_2，那么此种制約条件可用下列等式表示之:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1}$$

任意兩点間的距离保持不变的物体人們理解为絕对剛体，凡兩点間建立方程式(1)所决定的关系者，可考慮屬於剛体上的兩点. 因此，对於平面运动的自由剛体，其互不連系的兩点的四个自由度僅留下了三个自由度，这样，对於自由的固体僅須給出点A及B的三个坐标而第四坐标可从等式1求得.

平面运动的固体有三個自由度.

不难相信，剛体上其他任一点，如点 C，並不改变獲得的自由度数目，事实上若每一新点是独立的話，它便有兩个自由度，但是他在固体上，对於点A及点B的位置可由下列等式决定（圖3）之:

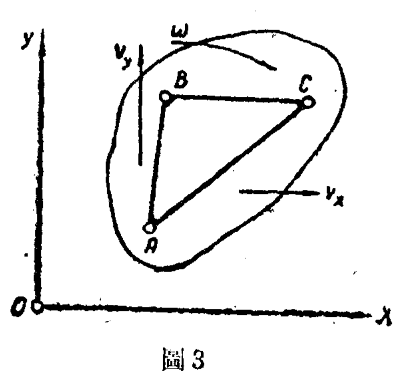

圖 3

$$AC=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \quad 及$$

$$BC=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2} \tag{2}$$

所以，如上所述每一新的点除了具有兩个自由度，同时也導入兩个制約条件.

自由固体独立的位移可以是固体上一点，例如A点沿坐标軸的位移，及物体繞A点的旋轉，也就是說自由固体在平面中运动时有兩个独立的直線运动及一个繞垂直於坐标軸平面 xy 的軸而旋轉的运动.（圖 3）

点在空間的位置由三個坐標决定，因此，若既不知点的坐标，又不知坐标間的函数关系，則**点具有三個自由度**. 点可以循三个坐标軸独立地移动. 若已知其中一坐标，例如 $z=a$，或坐标間的关系式 $z=f(x, y)$，則正被研究的点在第一种情况下僅可在平面內移动，——**在第二種情況下点僅能沿着面移动**. 点僅有兩个自由度，一个自由度为加上的条件所消滅. 若加二个制約条件 $z=f_1(x, y)$ 及 $z=f_2(x, y)$ 到点上，則点一定沿着面的交線移动，而僅有一个自由度，在这种情况下，僅給予任一坐标的数值，例如 x，而其他兩个坐标可以从所加制約条件的等式确定.

研究自由固体在空間的运动，可以斷定，**一個固体有六個自由度**，就是沿着三个坐标軸移动及繞三个坐标軸旋轉的运动.

機構是相對运动剛体的總合，組成機構的每一剛体稱爲連件.

把机構看作是具有一定能动性的剛体系統，必須注意到連件运动的限制（制約条件），此条件保証了机構的同样的相对位移，因为僅有在此种情况下，机構可以完成規定的运动.

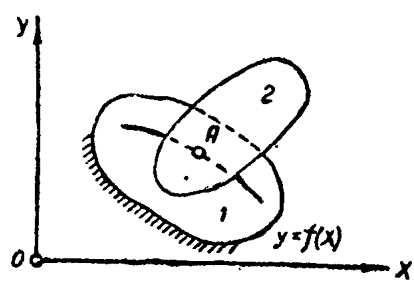

圖 4

我們且來看看在兩个連件相对移动时加制約条件的可能情况. 設已知在坐标系 x, y 中的兩自由固体. 若我們僅研究兩已

知物体間的相对移动，則其中一物体可認为静止的，在这种情况下，第二連件相对於第一連件运动时，有三个自由度.

对於連件的相对运动加上一个制約条件，即連件2的A点应沿着已知曲線移动.（圖4）連件2便剩下兩个独立的相对运动：一个移动一个轉动，对於連件的相对运动加上兩个制約条件，可能產生兩种变相，即或者可以強制連件2上的A及B兩点，在連件1上沿兩曲線 $y=f_1(x)$ 及 $y=f_2(x)$ 移动.（圖5），或給予連件2的A点相对於連件1的位置的坐标 $x=a$, 及 $y=b$, 在此，a及b是常数.（圖6）在第一种情形僅能產生一移动，此移动决定第二个移动的大小及物体旋轉角的大小，而在第二种情形，僅可以給予一旋轉角.

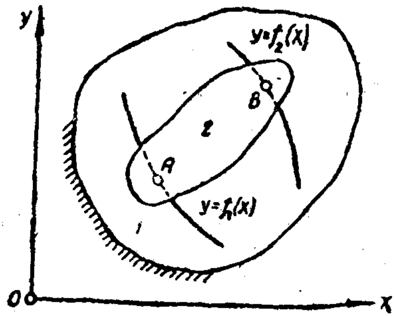

圖5

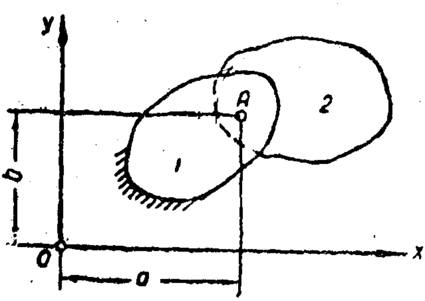

圖6

在个别場合下，当 $y=f_1(x)$ 及 $y=f_2(x)$ 的几何曲線为平行直線，連件2相对於連件1而移动.

設观察兩連件間的絕对运动的关系，則对於圖4的系統我們得五个自由度,（連件1的三个自由度及連件2相对运动时的2个自由度）. 而在圖5及6的系統——四个自由度.

相似地，在圖7所示的n个自由物体的系統上，可用不同方式对

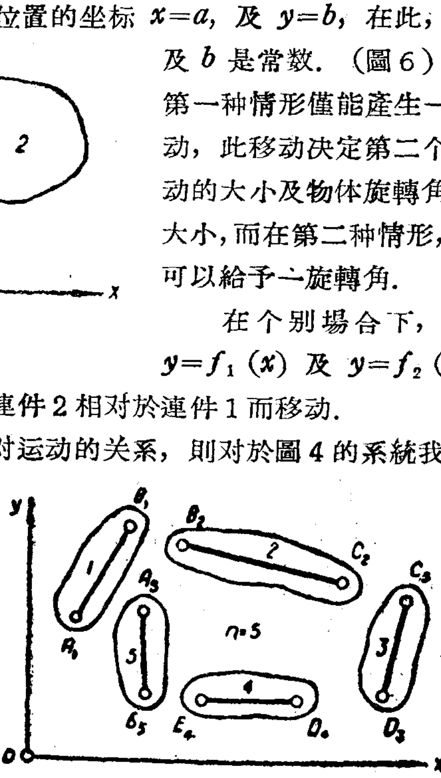

圖7

相对运动加上制約条件，(自由度数值的不同互相区别的系統的性質得到新的变相，正如按照導入系統中的不同連件的相对运动的特性)．依照此种方式的差别，得到性質上新的系統．这些系統按照自由度的数量以及参与系統中个别連件的相对运动的性質，而各各不同．

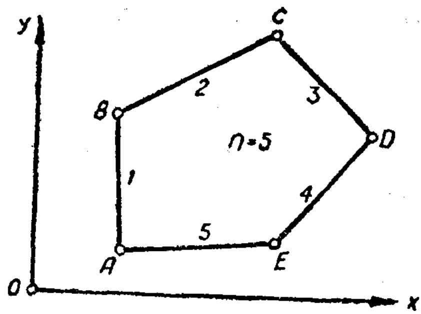

圖 8

例如，設連接連件B_1及B_2点，C_2及C_3点，D_3及D_4点……等（圖 8）則加到系統上十个制約条件（当$n=5$时）以数学等式表示如下:

$$x_{A5}=x_{A1}，\quad x_{B1}=x_{B2}，\quad x_{C2}=x_{C3}\cdots\cdots 等$$

$$y_{A5}=y_{A1}，\quad y_{B1}=y_{B2}，\quad y_{C2}=y_{C3}\cdots\cdots 等$$

在加制約条件前，系統有十五个自由度．將連件連接后剩下五个自由度．它們确定整个連件系統的三个絕对移动，和連件系統內部的兩个相对移动．在这种系統上还可以加上补充的制約条件，俾使全部的或部份地消滅留下的能动性．

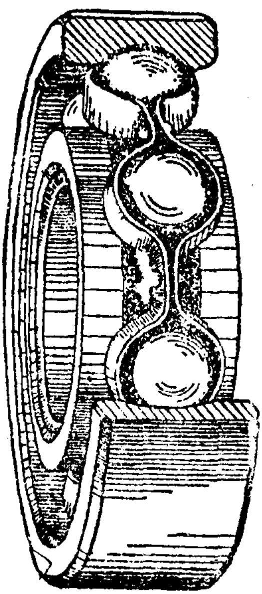
圖 9

§ 2. 运动副及其分类

互相連接的兩运动連件，其表面常互相作点，線或面的接触，圖 9 示徑向的滚珠軸承，其中滚珠与內环及外环都是点接触，圖 10 示凸輪 1 与滚子 2 沿直線接触．最后，圖 11 介紹**圓柱体連接**，在其中实心圓柱体 1 与空心圓柱体 2 的全部的点相接触．

兩个物体作点或線的接触时，应当区别兩种情形，一种是一个物体上

确定的点或線在另一物体表面上滑动，一种是兩个相連接物体的运动的表面互相接触在点或線.（圖 9 及 10），这兩种情形在制約条件的几何观点上是完全一样的. 可是从它的工作观点. 假使注意到接触元件材料的摩損，第二种連接的情形优於第一种.

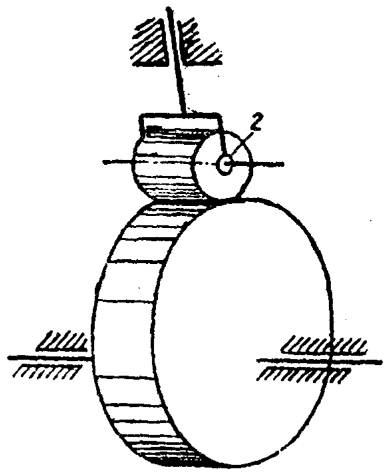

圖 10

一連件進入与另一連件接触的点，線，或面称为运动副的元件.

限制兩連件相对运动的元件的組合称为运动副.

由此可見运动副决定了不同制約条件的組合，这些不同制約条件表明兩連件活动連接的特性.（运动副决定表明兩連件能动性的制約条件的总数.）

为了便於分析机構的構造，平面机構的运动副按照不同的特征來区分，即按照对於連件相对运动所加的制約条件数区分，按照相对运动的特征区分，而最后，按照接触元件的特征区分. 此外区分运动副为一方面制約或兩方面制約.

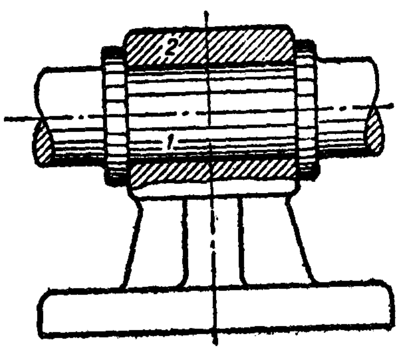

圖 11

按照加上的制約条件数，平面机構的运动副可以是兩类，受一个制約条件的运动副屬於第一类，受兩个制約条件的屬於第二类. 圖 12 介紹第一类的兩种不同运动副. 在圖 12a 中，当滚子在平行平面間运动时，A 点循直線移动而与此無关，滚子僅傳遞移动，或移动並轉动，在圖 12б 的运动連接中滚子中心 A 沿着曲線（等距离曲線）移动，此曲線与靜止連件的表面間的垂直距离等於滚子的半徑而与滚子的

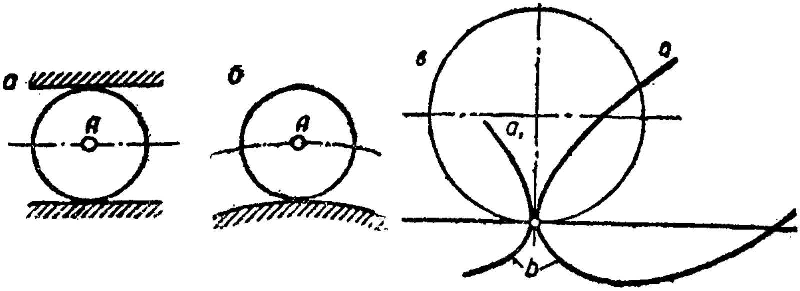

圖 12

运动無关，圖 13 介紹第二类运动副的例子，在平行平面間完成直線移动的矩形物体 d，其上的点 A 及 B 沿着直線运动．正如§1所指出，这种运动連接加上了两个制約条件，圖 13 б 圓柱体 d 的軸心 A 点相对於圓柱体 e 是静止的，所以，在这种情况下运动副加上了两个制約条件．

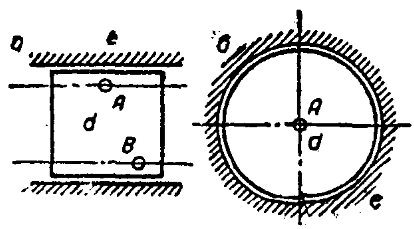

圖 13

在确定运动副的种类时，常常不易於提供制約条件数，这些条件是由適当的等式所确定，最簡易的由連件相对运动中所剩余的自由度数值來决定运动副种类，加上的制約条件数及剩余的自由度的总和等於三，因此，假使在相对运动中連件自由度的数值确定了，則 3 与此数值的差便决定运动副的种类，这样，依照圖 13 a 矩形物体僅可完成一相对移动，因此运动副加上了两个制約条件，依照 12 a 連接的滚子可以完成独立的移动及轉动．因此，运动副僅加上了一制約条件．

第二种分类的运动副依照相对运动的特性区分为移动副及迴轉副．圖 13 a 介紹各种移动副中之一．而圖 13 б 介紹迴轉副或换种說法**簡單的鉸鏈**．

依照元件接触的特征，运动副区分为低副及高副．

凡元件係互相包圍的表面或它們的分開部分的运动副屬於低

副. 这样，移动副及迴轉副一定是低副，因为第一种情形連件在矩形 a 的表面的所有点接触，而第二种情形，在整个圓柱体表面的点接触.

运動的交替是低副的特点. 运动的交替可如下解釋，在圖 13 a 中連件 d 点上的任一点相对於連件 e 的运动，完全和連件 e 上任一点相对於連件 d 的运动一样，均是沿着直線移动. 在迴轉副中連件 d 及 e 上的任意点在相对运动时沿着圓周移动. 这样，相对軌跡的性質与从那一連件上选擇点無关，同样，假使不同連件上的兩点至中心的距离取得相等，則它們的軌跡重合.

若运動副的元件是点接觸，或線接觸，則這樣的运動副稱爲高副. 可以用圖 9, 10 及 12 的运动連接作为高副的例子. 以高副連接的連件，在相对运动时，可以是純滚动，滚动及滑动以及純滑动.

高副不能有运動的交替. 直線及圓周接触於一点（圖12в），若圓周沿着直線滚动，則圓上任意点描繪出擺線（$a\ a_1$ 曲線），可是，直線沿著圓周滚动时，直線上任意点沿着圓的漸伸線 b 移动. 在直線接触或点接触的場合下，相对运动的軌跡是不相同的，因此，运动是不可以交替的.

运动副可以是單方面制約或双方面制約. 例如，在圖 12б 的运动連接僅在一方面閉合，因此之故滚子可以离开靜止的連件而副不存在. 为此，为了避免副的破坏，滚子应借力以經常緊压於靜止的連件上. 例如彈簧之力，兩方面閉合的运动副（圖 12a）保証了滚子与導路間的永久的接触.

作空間运动的連件，运动連接的結果形成空間运动副. 把此种副的形成看作是加上制約条件的結果，每一制約条件消除一独立的运动或建立兩可能相对运动間的函数关系，我們可以得到五类空間运动副。第一类空間运动副消除一个可能的相对运动，第二类——兩个运动……等.

圖 14 介紹不同类的空間运动副.

第一类空間运动副僅可以是如此，在其中僅限制了一个移动. 此种运动副的元件是一連件的面切另一連件的面於一点. 在

一部份情况下球及平面能是第一类运动副的元件。(圖14а)圖14б及в表示第二类的空間运动副，圖14б的运动副取消了两个可能存在的移动运动而在圖14в——一移动及一轉.

圖14г，д，е所示为第三类运动副，其中第一个为球形接

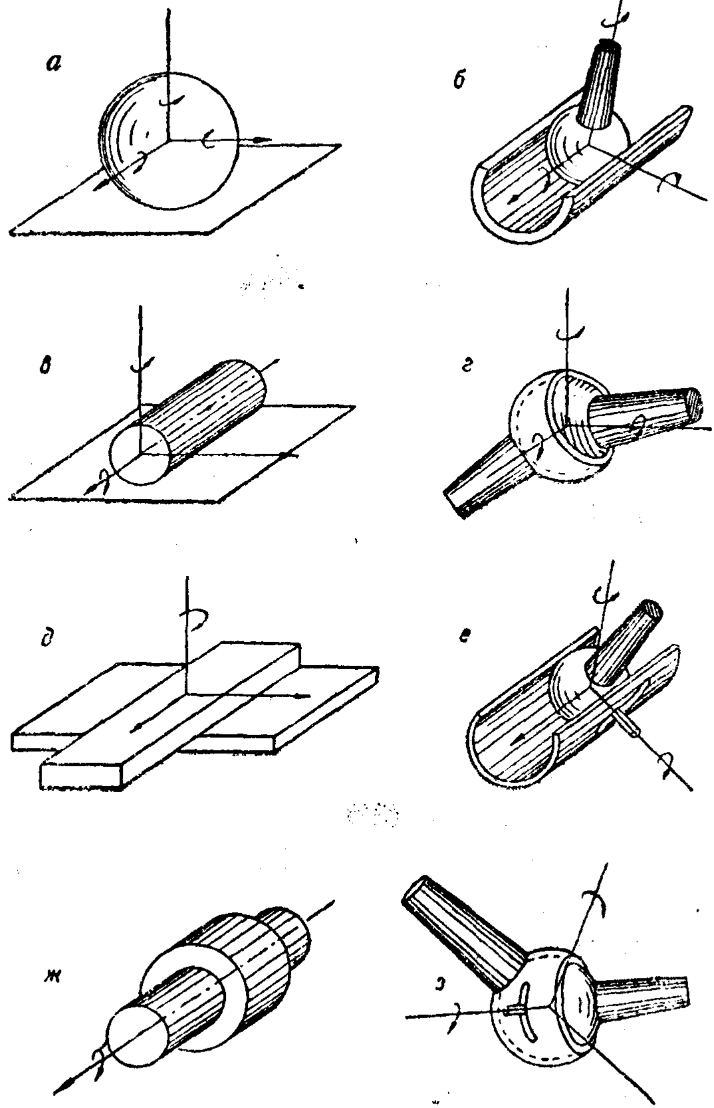

圖 14

头，它的三个移动取消了，在第二个——一个移动及兩个轉动运动．最后在第三个——一轉动及二个移动．

圖 14，ж，з，介紹第四类的运动副——在圓柱形副中兩轉动及兩移动取消了，而具有兩自由度的球形接头，在其中取消了三个移动及一轉动．

圖 32б 介紹螺旋运动副，假使螺距等於無窮大其特殊情况为移动副，假使螺距等於零而其特殊情形为圓柱形接头．圖 14 所介紹的是普通的运动副．就是，在其中一定运动形式存在的可能性被取消了，可是空間运动副的組成还不僅限於这些．选擇適当的形式的运动副元件，可以建立連件相对的移动及轉动間的一定型式的函数关系．

在建立运动副的种类时，首先適当建立独立相对运动的数值，六与此数值的差即等於确定运动副的种类的制約条件数．

§ 3. 运动鏈

借运动副之助的一連串連件的連接称为运动鏈，运动鏈可以是簡單的，假使每一連件与其他二連件形成运动的連接，或复雜的，假使在鏈中包含了不止連接兩个連件的复雜的連件，这样的鏈，簡單的及复雜的，如圖15所示．联接迴轉中心的線段（圖15a 及 15б 的連件 1，2等……）表示簡單連件，而复雜的——多角形，以連接相鄰迴轉中心的線段为多角形的边．（圖 15б 的連件 3 及 7）圖 15a 及 15б 所示运动鏈称为不封閉鏈或开放鏈．

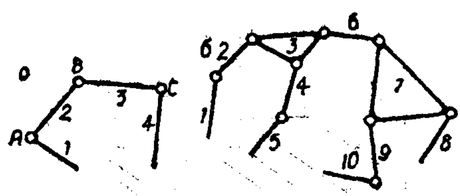

圖 15

簡單的开放鏈可以是封閉的，假使最后連件与第一个連件連接．复雜的开放鏈也是如此，假使最后的連件互相連接或借助於运动副与开放鏈的中間連件連接．

簡單运动鏈封閉后給予一封閉的輪廓（圖 16a）；复雜的运动鏈——几个輪廓，它的数值根据自由的末端連件的数目以及它

們的連接方式．最大的輪廓数是与自由的末端数相附合，並且若輪廓系由三个連件所組成，則所得的輪廓从运动的观点看來已把一定的連件組变为一个連件了，（为一連件的輪廓）（若輪廓由三連件組成从运动的观点能得到轉变确定的連件組．）

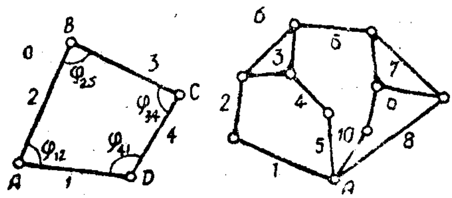

圖 16

圖 16 *a* 示封閉鏈，系从圖 15 *a* 的鏈藉迴轉鉸鏈副連接連件 1 及 4 而成．圖 16 *b* 示复雜的閉合鏈，系从 15 *b* 的鏈以接头 4 連接連件 1，5，10 及 8 而成．

在实用上可以遇到开放的边可以遇到封閉的运动鏈，我們可以指出普通秤作为开放的运动鏈，在机械制造上多半是採用封閉的运动鏈．

若所有連件的点在平行平面內运动，則运动鏈是平面的．

空間鏈上的点描繪空間曲線或不平行平面內的平面曲線．

在实用上，平面运动鏈被廣泛应用．其連件系以迴轉副或移动副相連接．

根据連件及运动副的数值，封閉运动鏈具有一定的自由度数值及变化度，至於运动鏈的变化度，我們系指連件相对运动的自由度数值，它決定触立参变数的数目，这些参变数可以是已知的，**另一方面一連件被固定不動，运動鏈的自由度數值正是變化度的數值**．若已知任意一个独立变数，則变化度等於 1，**變化度 2——爲已知二獨立變數等等**．若运动鏈中含有 n 个連件，則整个系統的总的自由度等於 $3n$．其中某些自由度被加到运动副上的独立制約条件所取消．

若在鏈中第二类运动副为 p_2，第一类运动副为 p_1，則运动鏈总的自由度 w_K 是

$$w_K = 3n - 2p_2 - p_1$$

而变化度 $$w = 3(n-1) - 2p_2 - p_1$$

对於圖 15 *a* 的开放运动鏈，当 $n=4$，第二类运动副 $p_2=3$，

第一类运动副 $p_1=0$，其自由度数为

$$w_K=3\cdot4-2\cdot3=6$$

而变化度为 $$w=3\cdot3-2\cdot3=3$$

这样，圖 15a 的运动鏈可給予三个任意的相对位移．即第二連件相对於第一連件的轉动，第三連件相对第二連件的轉动，最后，第四連件相对於第三連件的轉动．若其中每一旋轉均为已知，則可求得在任何时間中連件的相对位置．

从圖 15a 導入一接头而獲得的如圖 16a 的封閉运动鏈，其連件数 $n=4$，$p_2=4$ 則

$$w_K=3\cdot4-2\cdot4=4$$

$$w=3\cdot3-2\cdot4=1$$

对於这个封閉的运动鏈僅可給予一独立变数，它也决定連件的相对位置，即系僅可給予角 φ_{12}，φ_{23}，φ_{34} 及 φ_{41} 中的一个．

例如，設已知角 φ_{12}．則当連件長不变时，我們得到一定数值的对角線 BD．假使把 C 点看作三角形 BDC 的頂点，那么它相对於 BD 的位置便易於决定．只要找到点 C 的位置，則連件 3 及 4 相对於連件 2 及 1 的位置便固定了．

这样，假使运动鏈具有的变化度等於 1，則为了确定連件的相对位置，僅須給予一个变数（一般的坐标）．假使变化度等於 2，則相似地極易証明，为了决定运动鏈所有連件的相对位置，必須給予兩个独立的变数（一般的坐标）．

§4. 机構

在封閉运動鏈中若使一連件固定不動（支架）則得到機構，它的自由度數値與運動鏈的變化度附合．因为一個連件固定後取消了運動鏈三個自由度．

运动鏈中一个連件的固定，或照通常的說，轉变运动鏈的一个連件为支架，应該体会到是相对的，若机構包含在固定的机械中，則所謂固定系理解为把它連在机架上，而机架支持在地上．每一連件相对於地的位移或相对於与机架連接的支架的位移，即系絕对位移，但是在許多場合下不可能指示机械中靜止的連件，

因为机架本身相对於地面而运动．这些屬於航空机械，水上运输机械，車輛机械……等等．

对於飛机馬达，馬达支架是机架，它随着飛机而运动．对於輪船發动机船殼是机架，对於机車——座架等等，所以在列举的情况中沒有一个連件是靜止的．可是在研究組成被包含在运动机械的机構的运动时，我們說的靜止的連件是指那随着机車，飛机等运动的机架，而絕对的位移是指相对於机架的位移（支架），从运动的几何观点來看，我們並沒有導入誤差．当研究力学的問題，确定作用在机構个別連件上的力时，假使我們不研究机架的运动在某种情形下我們可能導入誤差，这大多是屬於那些情况，即当运动的机械不以直線及等速运动时，在等速直線运动的条件下，假使我們把相对於机架的位移当作絕对的位移，那末在动力学的計算上，我們得到完全准确的結果，注意到上述的情形，确定机構自由度的公式可以寫成下式

$$w=3(n-1)-2p_2-p_1 \tag{5}$$

在此 n，p_2，及 p_1 的意义同前．

当 $p_1=0$，及 $w=1$ 等式(5)採用下式

$$3n-2p_2=4 \tag{5^1}$$

公式(5^1)是雪貝涉夫 П. П. Чебышеву 公式

运动規律已知的連件称为原动連件或运动的曲柄、原动連件始終用运动副与靜止的連件相連而在运动草圖上註上箭头，指示其运动的方向（圖17原动連件 4 註上了弧形箭头)．

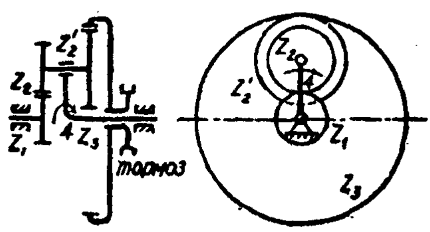

圖 17

原动連件可以繞靜止点完成整个的轉动或者作某种角度的搖擺，原动連件也可以是作移动的連件如活塞是．

根据机構自由度数值可以給予組成机構的連件的一个，二个或几个独立的运动．也就是原动連件数值与机構的自由度数值应当相符，僅有在这种情况下我們可以得到連件一定的同一数值，

运动將随計算自由度时所沒有考慮到的偶然原因而定．假使自由度数值小於原动連件数，在較好的情况下，一个原动連件事实上轉变为机構的从动連件，也就是原动連件不再存在，最坏的情况下，可以使机構最弱的連件發生破坏，在轉变为机構的运动鏈中不应有第一种及第二种的情况．

为了指出为什么在w的数值大於原动連件的数目时，运动將随偶然的原因而定．我們來更詳細的研究一下这个問題．

在机構的連件上，通常作用了一定的力和阻力矩，其中也包括摩擦力在內，假使原动連件数小於自由度数，某些連件受阻力作用后，应当停止不动，即某些連件已从全系的运动中分离出來，或賴摩擦力的作用帶动它以一定的速度而运动，可是預先已經指出，不論任一連件停止不动或連件間無一定的速度关系，这是不可能的，因为在組成机構的連件系的簡單几何研究中，除了运动副所加的条件，決不能考慮其他制約条件．

首先必須把机械的制約条件列於这种条件之內，这些机械的制約条件以阻力的形式加在机構上，表現为摩擦力，慣性力，迫使点依照一定的曲線移动．

因此，連件运动的規律不僅須随原动連件的已知运动規律而定．並且也随机械上的补充的制約条件而定．

假使机械的制約条件是偶然的，則在被研究的情形下，机構連件的位移当然是不确定的，因此，在实用上，不能利用这样的机構．为了建立連件运动的确定性，必須或者增加原动連件的数目使与由公式(5)算出的自由度数目符合，或者加上补充的几何制約條件，俾使原动連件数与自由度的数值相符合．研究某些实例．

圖 17 所示为差动齒輪傳动裝置，其中齒輪 z_2 及 z'_2 繞連接在連件 4 上的軸旋轉，同时又繞靜止軸旋轉，在这机構中，运动連件数 $n=1=4$，第二类运动副——迴轉副——$p_2=4$．第一类运动副的数目——齒輪的連接——$p_1=2$．依照公式(5)自由度数值等於

$$w=3\cdot4-2\cdot4-1\cdot2=2$$

现在假定在机構中僅有一原动連件，例如連件4（臂）且加阻力矩於从动連件 z_1 上，若無任何阻力加到 z_3 輪上，則齒輪 z_1 受阻力作用后靜止不动，輪 z_2 將循着靜止輪 z_1 旋轉並通过 z_2 傳遞完全一定的运动給 z_3 輪. 可是开始預先假定从动連件不应是 z_3 而是 z_1 輪. 为了迫使 z_1 輪运动，克服加在它上面的阻力，必須或者加一制动的力矩軋住 z_3 輪或者傳給它以完全确定的运动，把它作成第二个原动連件.

假使預先不靠特殊机構將任何連件軋住，則在臂4旋轉时上面受有較大阻力的連件便停止不动，因为接头中总有摩擦. 由此可見，在正被研究的机構中实际上系以一个自由度進行运动的. 因为按照公式(5)計算自由度数値时並未顧及机械方面的制約條件，在这种情况下运动可以不同於所求的.

可是为了实用的目的，可以利用此种机構，其从动連件的运动是完全确定的. 並且是強制的. 因此，必須用完全确定的制約來消滅其第二个自由度，这种完全确定的制約系加在一定的位置且不是偶然的. 所以在差动机構中（圖17）为了求連件 z_1 的运动确定不变，若 z_3 是运动的必須給予連件4角速度 w_4 外，还須給予一定的阻力矩 M_3 或是 w_3. 在火車輪的輪緣与軌道之間存在摩擦力形式的机械的制約條件，因此火車以一定速度進行.

在这个制約除去时（滑动）火車运动的确定性破坏了.

圖18所示为比例画器簡圖，用以放大或縮小圖形. 假使迫使 A 点沿着曲線 y 移动，則 B 点描繪出縮小几倍的曲線 x.

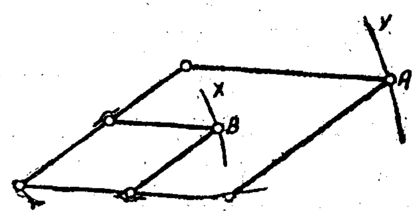

圖 18

僅考慮迴轉副加上的制約條件，按公式(5)計算比例画器的自由度数値，得到 $w=2$. 可是由於 A 点全部时間停留在曲線 y 上，故在工作过程中便加上了运动方面的补充制約條件，因此所有連件得到一定的运动，而連件上的点描繪完全确定的曲線，