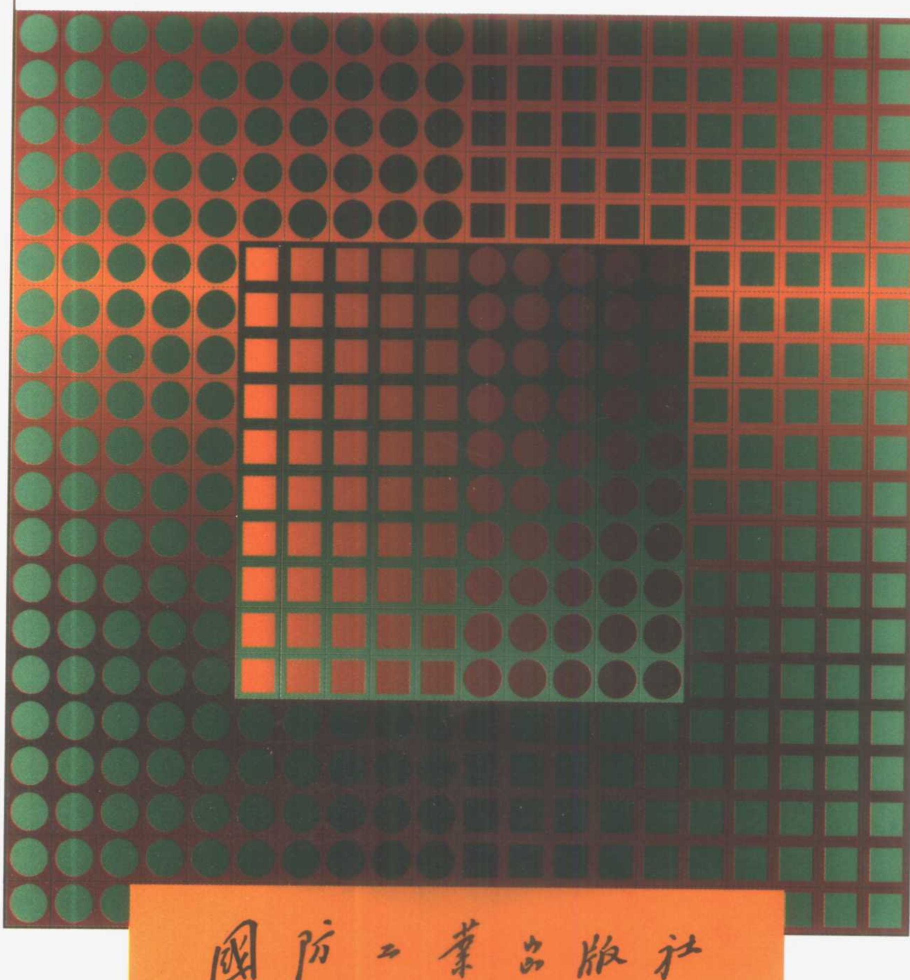
有限元法基础

YOUXIANYUANFA JICHU

李人宪　编著



国防工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限元法基础/李人宪编著. --北京:国防工业出版社,2002.5

ISBN 7-118-02810-X

Ⅰ.有… Ⅱ.李… Ⅲ.有限元法 Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009347 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张 7⅛ 186 千字

2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月北京第 1 次印刷

印数:1—3000 册 定价:12.00 元

前　言

有限元法作为一种数值计算方法已经在工程技术的许多领域内得到了广泛的应用，它可以较方便地解决工程中许多过去感到棘手甚至无法解决的问题，已成为求解固体力学问题、热传导问题、流体流动问题和电磁场、声场等问题的一种有效的计算方法。从事设计计算的工程技术人员应该了解和掌握有限元法的基本理论和基本过程。工科专业的学生，特别是机械、土木、力学等专业的学生将会遇到桁架系统、刚架系统的受力变形问题，连续体的受力变形问题，薄板弯曲问题，以及工程部件的温度场计算问题和流场计算问题。这些问题都可以用有限元法求解。因此，有限元法已经成为这些专业的一门必修或选修课程。

由于有限元法的广泛应用和快速发展，论述有限元法的著作非常之多，可以作为教材的也绝非鲜见。然而它们或篇幅过大，或涉及面较窄，或起点太高，还无法适应当前教学改革所希望的少学时多内容的授课要求，也常常使只有材料力学和线性代数基础的本科学生难以入门。为此，作者试图编写一本起点较低、难点分散、循序渐进的教材，希望能使读者对有限元法的基本原理、计算方法和应用前景有一个概括的了解，为深入钻研打下基础。

本书是在 1992 年编写的用于机械类本科各专业《有限元法基础》选修课讲义的基础上改编而成。本着难点分散的原则，通过不同的问题，逐步引入推导有限元方程的直接刚度法、能量原理（虚功原理）、变分原理和加权余量法的计算过程，使读者在求解具体问题的过程中了解和掌握一些相对较复杂的数学、力学原理。全书分为九章，第一章简要介绍有限元法的概念、发展和基本思想及特点；第二章从弹簧系统入手介绍桁架系统有限元求解方法，引入

直接刚度法的概念;第三章采用直接刚度法和虚功原理两种方法推导了刚架系统的有限元计算格式,引入位移插值函数的概念;第四章在简要介绍弹性力学一般知识的基础上,运用第三章引入的虚功原理和推导过程推导了连续体平面力学问题的有限元列式,着重介绍了三角形单元和矩形单元;第五章介绍应用最为广泛的等参数单元,并引入数值积分的概念;第六章通过热传导问题引入变分法的基本概念并采用变分原理推导温度场问题有限元计算格式;第七章通过流体流动问题介绍加权余量法及采用加权余量法推导流场问题有限元计算格式的过程;第八章介绍薄板弯曲问题的有限元计算方法,讨论了薄板弯曲方程的特殊性;第九章简要介绍了有限元法应用中前、后处理的有关内容。

本书的编写过程中得到了俞文钦副教授的热情帮助,并提出了许多建设性的意见,使本书增色不少;全书经北京航空航天大学费斌军教授和西南交通大学潘亦苏教授审阅,在此一并表示感谢。由于编者水平所限,书中仍有不少缺憾之处,希望各位老师和同学在使用中不吝赐教。

编　者

2002 年 1 月

内容简介

本书介绍了有限元法的概念、杆件结构的有限元法、刚架结构的有限元法、平面问题的有限元法、等参数单元、热传导问题的有限元法、流体流动问题的有限元法、薄板弯曲问题的有限元法、有限元法的前后处理。

全书内容由浅入深，主次分明，难点分散，便于自学。可作为大专院校教材使用，也可供工程技术人员参考。

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 概 述

有限元法是适应电子计算机的使用而发展起来的一种比较新颖和有效的数值计算方法。这种方法大约起源于20世纪50年代航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析是结构力学的一种分析方法。结构矩阵分析方法认为:整体结构可以看作是由有限个力学小单元相互连接而组成的集合体,每个单元的力学特性可以比作建筑物中的砖瓦,装配在一起就能提供整体结构的力学特性。

为什么要首先分析力学小单元的特性呢?直接分析整体结构不是更好吗?我们说人类的认识能力是有限的,不可能一下子就弄清楚很复杂的东西。因此往往把复杂系统分解成性态容易了解的单个元件或"单元",研究其性态。再将这些元件重建原来的系统以得到整体性态。这是工程技术人员和科学家经常采用的分析问题的方法。

有些系统由有限个已经完全确定的元件组成,我们称它为离散系统:例如:电阻及其电阻网络,杆件及其由杆件组成的桁架,水管和由它们组成的水管网络等等。另外一些系统则可以无限地被分割,这其中的问题只有利用无穷小这一数学概念才能定义,它意味着有无限个单元组成。我们称这种系统为连续系统。例如一块受力平板,一个活塞,一根轴等。

随着数字电子计算机的出现,求解离散系统问题一般比较容易,即使单元数目非常大时也是如此。例如桁架结构,过去结构力

学的方法只能求解比较简单、杆件数目比较少的结构。有了计算机之后，基本上还是用结构力学的办法，可以求解杆件数目成千上万个的大型平面或空间立体桁架中各个杆件的受力及变形。例如大型体育场馆的屋顶或雨棚现在多采用球体连接的空间立体网架，它在风、重力等载荷的作用下各个杆件受多大力，有多大变形，是否安全，都可以由结构矩阵分析的方法，根据有限元的思想，利用计算机求出。而对于连续系统，由于实际上有无限个单元，而计算机的存储量总是有限的，因此由计算机不容易处理。一般来讲，连续系统只有通过数学运算才能精确求解。但是工程中能得到精确解的问题很少，只有在非常简单的情况下才是可能的。例如弹性力学中的薄板弯曲问题，只有矩形板或圆形板而且支撑和载荷都非常简单的情况才可能求出解析解。对传热学中的热传导问题也是如此。而工程中的构件形状一般都是比较复杂的。如内燃机活塞的温度是如何分布的，连杆的应力是如何分布的，到目前为止都还是无法精确求出的。工程上处理连续体问题的方法之一是将连续系统离散化，通过离散，使连续系统变成离散系统，从而可以采用解决离散系统问题的方法，用计算机进行处理。这种离散当然都带有近似性，但是，它是这样一种近似：当离散变量的数目增加时，它可以逼近真实的连续解。有限元法用于求解连续系统问题时就是一种一般的离散化方法。

有限元法最初是用于分析飞机的结构强度，通过这一方法可求得组成飞机结构的各杆件的受力和变形的数值计算结果。这是离散系统的弹性杆系问题。1960 年飞机结构工程师 Clough 在他的论文中第一个采用有限元(Finite element method)这一术语，并用有限元的思想求解了平面弹性问题。从此，不但工程技术人员开始认识有限元法的功效，数学家和力学家也看到了有限元法的巨大前景，相继从理论上对有限元法进行了深入的探讨。使有限元法建立在更为坚实的理论基础之上。在工程技术人员和理论工作者的共同努力下，有限元法真正走入了连续介质力学之中，成为解决各种力学问题的最有效的方法之一。20 世纪 70 年代，在英

国科学家 O. C. Zienkiewicz 等人的努力下，将有限元法的应用推广到了热传导、电磁场、流体力学等领域。经过多年的发展，目前有限元法几乎可以用来求解所有的连续介质和场问题，包括静力问题和与时间有关的变化问题以及振动问题。在国内，60 年代中科院计算所的冯康教授独立推导了有限元计算的数学过程，70 年代中期，复旦大学数学系与江南造船厂合作，将有限元法应用于船舶设计计算，使有限元法在中国工程界开始大规模应用。目前，有限元法已成为工程设计中不可或缺的一种重要方法，在大型结构作用力分析、变形分析、失效分析、传热分析、电磁场分析、流体流动分析等方面扮演着越来越重要的角色。

§1-2　有限元法的基本思想及特点

一、有限元法的基本思想

(1) 假想把连续系统(包括杆系，连续体，连续介质)分割成数目有限的单元，单元之间只在数目有限的指定点(称为节点)处相互连接，构成一个单元集合体来代替原来的连续系统。在节点上引进等效载荷(或边界条件)，代替实际作用于系统上的外载荷(或边界条件)。

(2) 对每个单元由分块近似的思想，按一定的规则(由力学关系或选择一个简单函数)建立求解未知量与节点相互作用(力)之间的关系(力－位移、热量－温度、电压－电流等)。

(3) 把所有单元的这种特性关系按一定的条件(变形协调条件、连续条件或变分原理及能量原理)集合起来，引入边界条件，构成一组以节点变量(位移、温度、电压等)为未知量的代数方程组，求解之就得到有限个节点处的待求变量。

所以，有限元法实质上是把具有无限个自由度的连续系统，理想化为只有有限个自由度的单元集合体，使问题转化为适合于数值求解的结构型问题。

二、有限元法的特点

(1) 概念清楚,容易理解。可以在不同的水平上建立起对该方法的理解。从使用的观点来讲,每个人的理论基础不同,理解的深度也可以不同,既可以通过直观的物理意义来学习,也可以从严格的力学概念和数学概念推导。

(2) 适应性强,应用范围广泛。有限元法可以用来求解工程中许多复杂的问题,特别是采用其他数值计算方法(如有限差分法)求解困难的问题。如复杂结构形状问题,复杂边界条件问题,非均质、非线性材料问题,动力学问题等。目前,有限元法在理论上和应用上还在不断发展,今后将更加完善和使用范围更加广泛。

(3) 有限元法采用矩阵形式表达,便于编制计算机程序,可以充分利用高速数字计算机的优势。由于有限元法计算过程的规范化,目前在国内外有许多通用程序,可以直接套用,非常方便。著名的有 SAP 系列,ADINA,ANSYS,ASKA,NASTRAN, MARK,ABAQUS 等。

(4) 有限元法的主要缺点是解决工程问题必须首先编制(或具有)计算机程序,必须运用计算机求解。另外,有限元计算前的数据准备、计算结果的数据整理工作量相当大。然而,在计算机日益普及的今天,使用计算机已不再困难。对于后一缺点可通过用计算机进行有限元分析的前、后处理来部分或全部地解决。

三、学习有限元法所需的理论基础

要真正掌握有限元方法并运用自如,决非一件容易的事情。学习它所需要的理论基础和知识有:

(1) 学科理论——理论力学,材料力学,结构力学,弹性力学,流体力学,传热学等。根据所要解决的问题不同,应具备不同的专门知识。

(2) 数学基础——线性代数,变分原理,加权余量法。

(3) 计算机基础——计算机的一般知识,算法语言,计算机的使用与编程。

这些知识有些我们已经掌握,有些则还没有。但是不能等全部掌握了所有这些知识后再来学习有限元法,只有在学习过程中逐渐掌握。好在有限元法可以在不同的层次上理解和应用。

第二章 杆件结构的有限元法

§2-1 引 言

工程中最简单的结构可以认为是铰支的杆件。它的性质完全类似于图 2-1 所示弹簧。因为铰支杆只能承受拉伸力和压缩力(二力杆)。在图 2-1 所示弹簧系统中力 F 与弹簧伸长量 δ(位移)之间关系由胡克定律有

$$F = k\delta \tag{2-1}$$

式中 k 为弹簧的刚度,是弹簧的固有参数,它对应于力-位移图中 $F-\delta$ 关系直线的斜率。如图 2-2 所示。当 k 与力 F 已知时,可由下式求出弹簧伸长量 δ:

$$\delta = \frac{1}{k}F \tag{2-2}$$

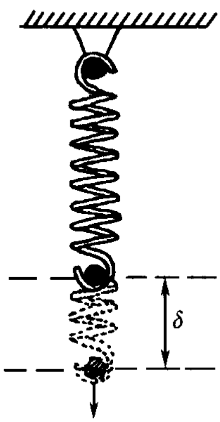


图 2-1 受力弹簧的变形

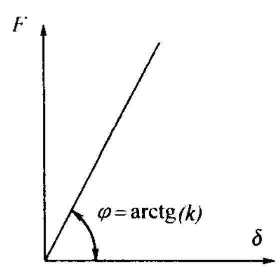


图 2-2 弹簧力-位移间关系

当处理比较复杂的铰支杆系统时,如图 2-3 所示要确定系统在力 P 的作用下,节点 B、C、D 和 E 处的变形,以便计算各杆件的内应力及各杆所受的轴向力,可假设整个杆件系统也具有像式(2-1)中 k 值一样的刚度,这样在力 P 的作用下各点的位移就可以用类似式(2-1)的公式计算了。不过,这时的系统刚度应采用一个矩阵来表示,即 $[\boldsymbol{K}]$。同理,各点的位移也应采用一个矩阵来表示,即 $\{\boldsymbol{\delta}\}$。再加上力矩阵 $\{\boldsymbol{F}\}$,就构成下式:

$$\{\boldsymbol{F}\} = [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\delta}\} \tag{2-3}$$

$[\boldsymbol{K}]$称为对应于施加在系统上各节点力的刚度矩阵。前面固定弹簧的例子中$[\boldsymbol{K}]$为 1×1 阶的矩阵,对于一个复杂一点的结构其刚度矩阵是多少阶的?如何求出?这是本章要介绍的主要内容。那么,为什么着重讨论系统的刚度矩阵呢?因为从式(2-3)可知,知道了刚度矩阵$[\boldsymbol{K}]$,就可以根据系统所受外力求出各杆件节点处的位移,从而可以计算各杆的受力和应力。

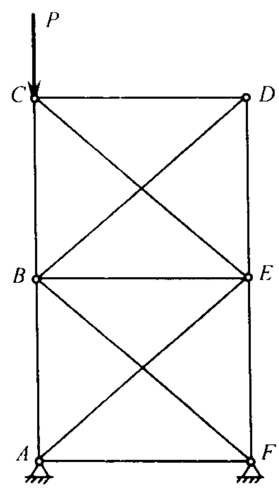


图 2-3 受力铰支杆系

杆件系统类似于弹簧结构,存在一个整体刚度(矩阵)。知道了这个刚度就可以由系统外力求出各节点的位移。这就是本小节应掌握的一个重要概念。

如何求出杆系的刚度矩阵呢？由于杆系的受力及变形类似于弹簧，为简单计，我们从弹簧的刚度矩阵讲起。

§2－2 弹簧系统的刚度矩阵

一、单个弹簧的刚度矩阵

图 2－1 所示弹簧只有一个可能的位移。但一般情况下一根弹簧可能两端都连接在其他弹簧上，因此弹簧的两端都是可以随被连接弹簧而动的节点，从而每个节点都有作用力施加其上。图 2－4 所示弹簧系统中 F_1 和 u_1 是作用于节点 1 上的力和位移，F_2

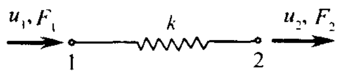


图 2－4　单个弹簧的受力和位移

和 u_2 是作用于节点 2 上的力和位移。因此弹簧的作用力向量为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

位移向量为

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

从而这个弹簧的刚度矩阵是 2×2 阶的。按方程式(2－3)，有

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (2-4)$$

但是 k_{11}，k_{12}，k_{21}和 k_{22}我们还不知道。

为求出它们，将图 2－4 所示弹簧系统看作两个简单的系统，如图 2－5 (a)、(b)所示，然后合成。

(1) 只有节点 1 可以变形，节点 2 固定。如图 2－5(a)所示。这时

$$F_{1a} = ku_1$$

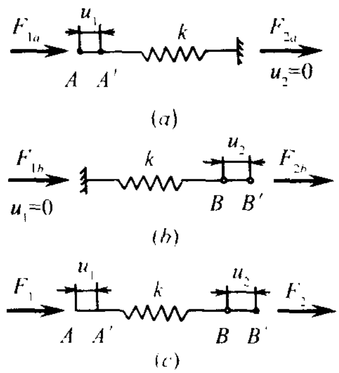


图 2－5　单个弹簧系统的分解与合成

由力的平衡有

$$F_{1a} + F_{2a} = 0$$

则

$$F_{2a} = -F_{1a} = -ku_1$$

(2) 只有节点 2 可以变形，节点 1 固定，如图 2－5(b)所示。这时

$$F_{2b} = ku_2 = -F_{1b}$$

(3) 根据线弹性系统的叠加原理，叠加(1)、(2)两种情形，就得到与原始问题一样的结构，如图 2－5(c)所示。叠加结果为

作用于节点 1 上的合力　$F_1 = F_{1a} + F_{1b}$

作用于节点 2 上的合力　$F_2 = F_{2a} + F_{2b}$

或

$$\begin{Bmatrix} F_1 = ku_1 - ku_2 \\ F_2 = -ku_1 + ku_2 \end{Bmatrix}$$

将这一方程组写成矩阵形式有

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2-5}$$

从而，由式(2－4)给出的一个刚度矩阵$[\boldsymbol{K}^e]$为(e 表示单元)

$$[\boldsymbol{K}^e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

从上式可以看出，这一刚度矩阵是对称的，即 $k_{12} = k_{21} = -k$。另

外，这一矩阵是奇异的，即它的行列式的值等于零。

二、组合弹簧的刚度矩阵

知道了一个弹簧单元的刚度矩阵的求法，可以将它推广到多个弹簧单元的组合系统。首先我们来看看两个弹簧的系统，如图2－6所示。

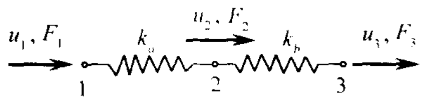


图 2－6　两弹簧受力系统

首先，仍采用分解再合成的方法，如图2－7所示。

(1) 先让 $u_2 = u_3 = 0$，只允许节点1有位移 u_1，如图2－7(a)所示。这种情况下力 F_{1a} 与位移 u_1 之间的关系为

$$F_{1a} = k_a u_1$$

考虑弹簧1－2，由静力平衡条件有

$$F_{2a} = -F_{1a} = -k_a u_1$$

由于 $u_2 = u_3 = 0$，没有力作用于节点3，因此

$$F_{3a} = 0$$

(2) 让 $u_1 = u_3 = 0$，只允许节点2有位移 u_2(见图2－7(b))。这时由于位移的连续性，每个弹簧在节点2要求有相同的位移，即弹簧1－2的伸长量与弹簧2－3的缩短量相等。对弹簧1－2有拉力 $k_a u_2$，对弹簧2－3有压力 $k_b u_2$，因此

$$F_{2b} = (k_a + k_b) u_2$$

分别对两弹簧求静力平衡，有

$$F_{1b} = -k_a u_2, F_{2b} = -k_b u_2$$

(3) 最后让 $u_1 = u_2 = 0$，只允许节点3有位移 u_3(见图2－7(c))。类似于情况(1)，有

$$F_{3c} = k_b u_3, F_{2c} = -F_{3c} = -k_b u_3$$