科學圖書大庫

數學研究叢書(三)

實數與複數分析之研究

譯者　鄧靜華　陳昭政

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學研究叢書(三)

實數與複數分析之研究

譯者 鄧靜華 陳昭政

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鑾　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十三年四月二十日 再版

數學研究叢書(三)

實數與複數分析之研究

基本定價　一元八角

譯者
鄧靜華　淡江文理學院數學系教授
陳昭政　淡江文理學院數學系講師

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱53－2號　電話783686號
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鑾　郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者 大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話979739號

引　言

本册所收集之七篇文章，並非完全假設讀者具備相同的數學背境；大致上，它們是針對着大學高年級生及研究所的一年級生而作。

布來梅曼（H. J. Bremermann）所著的首篇文章係叙述多個複變數之部分近代理論。此文的重點在於數學家們欲完全瞭解值得重視的多個複變數之解析函數的延拓（Continuation）性質，所作之頗爲成功的努力。在此理論中所注意的其他主題，諸如古霧（Cousin）問題及解析集合等，均有簡要的論述。

格雷夫斯（Graves）的文章處理一略欠廣泛的範圍，卽由一巴納赫（Banach）空間到另一巴納赫空間的非線性函數。特別是關係隱函數的定理。文中所考慮的問題，均有詳盡的研討。因爲這些資料已開始成爲高等微積分的教材，能夠有如此的陳述是非常幸運的。格雷夫斯的這篇著作與本叢書第一册中卡斯帕哥夫曼（Casper Goffman）所著的“泛函分析之基礎”（Preliminaries to Functional Analysis）有些相同的資料，若能二篇同時研讀將更爲有益。

希爾（Hille）所著有關半羣（Semi-groups）的文章，在廣泛的分析上給予了簡捷的述描；讀者於是乎引入半羣理論之結構特徵，如預解式及無窮小生成元之研討。同時也給與讀者如何將此一理論應用至隨機過程（Stochestic process）及偏微分方程方面之一提示。希爾之文與上面所提的哥夫曼之文，亦有關聯。

希爾徐曼（Hirschmann）與威德（Widder）所著的文章乃討論一較特殊的問題，此卽拉普拉斯（Laplace）及斯蒂爾結斯（Stieltjes）變換式之實反演式之根源。這些公式及其相應的表示理論在其出現數十年後被視爲全正矩陣及偏差減少變換及其推廣等極廣泛領域中半獨立的一章。

雪佛（Schaefer）之文在本册中與其他文獻完全不同，其中詳盡地討論古典的雷貝格（Lebesgue）與斯蒂爾結斯積分。雪佛之研討方法與但尼爾（Daniel）及黎茨（F. Riesz）之方法同；卽視雷伯格積分爲黎曼積分之推

廣，而測度的理論猶如一副產品出現於本文之末了。以其既簡明又完整，故雪佛的這篇著作對此一較不常見的方法供給了一完美的範例。再者，此文可視爲本册之其他各文所需測度理論的利便來源。

魏斯（Weiss）的論著同時詳盡地研討調和分析之基本部份，並引介一些選出的高等論題。主要之重點在於有關調和分析之古典形式，但也在此處給讀者引介“弱型”(Weak type)的觀念及馬爾辛克維支(Marcinkiewicz)插值定理，這些觀念在近十年來之調和分析方面佔有很重要的地位，此文以局部緊密亞貝爾群(Abelian groups)上抽象調和分析的簡捷討論爲結論。

魏當（Widom）之文討論梯卜李茨(Toeplitz)半無窮算子之反變的特殊問題，它能與本叢書第一册中羅赫(Lorch)所著之“分譜定理”(The Spectral Theorem)一文同時研讀。吾人於此可看出它的理論如何與分譜理論中具體的問題相抗衡，著者在富氏級數(Fourier series)及解析函數之理論中，引出其他之數學部門以求其解。

本册所收集之文獻，僅爲分析上許許多多有趣的文獻中的一小樣，但願它爲有義的選擇，並希望本册爲本叢書第一册“近代分析之研究”(Studies in Modern Analysis)有價值的續篇。

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再邀承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鐸氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千册，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘册，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘册，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衛星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審愼從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘册，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，應即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。
謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

目　錄

一、多個複數變數

布萊梅曼著

．此一理論產生於本世紀初；起先的觀念與方法爲單複變數理論之推廣，但迅即遭遇到許多在單複變數之情形上得以完全有解的問題，在二個或二個以上複數變數中却無法解答，同時哈托格（F.Hartogs）[26]、[27]（於1906～1910間）發現關於"解析延拓（Analytic continuation）與自然邊界（natural boundaries）之深邃結果，對單複變數而言，均不成立。由此知多複變數之理論並非由一個複變數之理論推廣至 n 個者，而其本身爲另一理論。

在哈托格後約二十年，此方向之理論進展甚慢，爾後本克（H. Behnke）卡當（H. Cartan）與居倫（P. Thullen）等從事域的理論及全純包絡之發展。直至柏格曼（S. Bergman）才開始研討核函數與不變度量。（此後沿用此名詞）

1934 年本克與居倫即綜合所有累積至當時的知識於他們所著的書 Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veranderlich [2] 中。（仍然很有趣）

在本克與居倫書中所提出的一些卓越的問題，曾被解決者有(1)朗日(Runge）定理的類似定理，(2)對局部已知極點的逐純函數結構（所謂"加性的古藉問題"）及對局部已知零點的全純函數結構。（所謂"乘性的古藉問題）(3)全純域的局部鑑定法，這些問題的解決多半歸功於阿喀（K.Oka）[32]—[40]。

近年來之研究已進入"複數流型"近更進入"復數空間"，此均與"n 維黎曼曲面"類似者。在流型及複數空間研究函數及函數集合，層論（sheaves）爲一適當且具權威的工具，此理論與巴納赫（Banach）代數間之連繫業已展開，且最近多複變數成爲理論物理方面之重要工具。（如量子場理論）[16]。

目前許多有關多複變數之書籍及講義均成爲可用之文獻，諸如福克斯（B.A.Fuks）之書[21]已完整地修訂出版（已譯成英文）且增加了第二

册[22]量子場理論之重要論題已由烏拉底米諾夫(Vladimirov)[50]加以研究。柏斯(L. Bers)及惠曼德(L. Hörmander)也各編了一部優異的講義[7]及[28]一些較早的資料爲波赫勒與馬丁(Bochner-Martin)[3]及 卡當1951—1952的書報討論[19]。

以下僅就上面所提的問題已經有過研究者申述之。

在此限制的範圍下，不可能詳及"層論""複數流型"(Complex manifolds)及"複數空間"(Complex spaces)而僅觸及之並列出其原始文獻。同時也避開伯格曼之理論，參閱伯格曼[5，第11章]即可得一對於此理論之優異的介紹。比較詳盡的陳述則可在伯格曼[6]中發現。

1. 複數n數組空間C^n

從所熟知的複數可作成n數組，n個複數$z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$成爲一$n$數組$z=(z_1, \cdots\cdots, z_n)$的集合記爲$C^n$，於$C^n$中引入加法運算"+"，定義如下：

$$z^{(1)}+z^{(2)}=(z_1^{(1)}, \cdots\cdots, z_n^{(1)})+(z_1^{(2)}, \cdots\cdots, z_n^{(2)})$$
$$=(z_1^{(1)}+z_1^{(2)}, \cdots\cdots, z_n^{(1)}+z_n^{(2)}),$$

及引入一與複數λ的乘法運算定義如下：

$$\lambda z=\lambda(z_1, \cdots\cdots, z_n)=(\lambda z_1, \cdots\cdots, \lambda z_n),$$

由於加法是定義爲相對應項的相加而每一項爲一複數，故加法滿足結合律及交換律。同樣地，對複數常數的乘法滿足分配律。由此C^n成爲一線性向量空間。

至於滿足線性向量空間所應滿足之一切條件，留待讀者自證之。

1-1. 於C^n中引入一模方$\|\ \|$(norm)，滿足下列各式，而使C^n變成巴納赫空間(Banach space)：

(1) $z\neq 0 \Rightarrow \|z\|>0$；

(2) $\|z^{(1)}+z^{(2)}\|\leq\|z^{(1)}\|+\|z^{(2)}\|$；

(3) $\|\lambda z\|=(|\lambda|\ \|z\|)$，式中$\lambda$爲複數；

(4) 對於模方$\|\ \|$，C^n爲完備(Complete)的，此卽若C^n之一數列$\{z^{(j)}\}$中，當j與k趨向於無窮大時$\|z^{(j)}-z^{(k)}\|$趨近於零，則有一元素$z^{(0)}\in C^n$存在，使得

$$\lim_{j\to\infty} \| z^{(j)} - z^{(0)} \| = 0 .$$

模方之例　歐氏模方為 $\|z\|_e^2 = |z_1|^2 + \cdots\cdots + |z_n|^2$.

最大模方為 $\|z\|_m = \max\{|z_1|, \cdots\cdots, |z_n|\}$.

若定義一點 z^0 之鄰近（neighborhood）為集合 $\{z \mid \|z - z^{(0)}\| < \epsilon, \epsilon > 0\}$ 時，則每一模方均可引出一拓樸（topology），對於任一模方 $\|\ \|$，均存在兩數 $\rho > 0$ 及 $\sigma > 0$，使任意 $z \in C^n$，恒有

$$\rho \|z\|_m \leq \|z\| \leq \sigma \|z\|_m$$

此處 $\|\ \|_m$ 表最大模方。此一事實甚易證明。（讀者可自行導出之）由此事實可得：在 C^n 中由不同之模方所產生之所有拓樸均等價（equivalent）。

1-2. C^n 之任一開集，稱為區（region）；每一連通開集稱為域（domain）。

1-3. 視一自 C^n 至 R^{2n} 的寫像 $z \to (x_1 \cdots\cdots x_n, y_1, \cdots\cdots, y_n)$，內中 $z_j = x_j + iy_j$ 而 $\|(x, y)\| = \|z\|$，可見 C^n 在拓樸觀點及加性群觀點，均與實數 $2n$ 數組所成的加性群 R^{2n} 同構（isomorphic）。

2.　線性子空間

2-1. 吾人謂 C^n 為一" n 維複數空間"

而 p 維複數的線性子空間乃 C^n 中能表為

$$\{z \mid z = \lambda_1 a_1 + \cdots\cdots + \lambda_p a_p ; (\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_p) \in C^p\}$$

之子集合，式中 $a_1, \cdots\cdots, a_p \in C^n$，且為固定。

2-2. 平移的線性子空間

C^n 之子集合

$$\{z \mid z = z^{(0)} + \lambda_1 a_1 + \cdots\cdots + \lambda_p a_p ; (\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_p) \in C^p\}$$

（$z^{(0)}, a_1, \cdots\cdots a_p \in C^n$ 且均為固定）稱之為複數 p 平面。

此定義若不用此參數表示法，一複數平面，亦可書為 $n-p$ 個一次方程組，所應注意者，C^n 中每一複數 p 平面 C^p，在與 R^{2n} 之繫聯下，亦為 R^{2n}

中之一實數 $2p$ 平面，反之不眞，因 R^{2n} 中可能存在一實數 $2p$ 平面，但非爲 C^n 中之一複數 p 平面，讀者可以驗明實數 2 平面。

$$E=\{z \mid x_1=0 \;,\; x_2=0\} \;,$$

非爲 C^2 中之複數 1 平面。

3. 特別域

C^n 中任一域能直覺想像者僅 $n=1$ 之情形，因 C^2 所繫聯的實數空間爲四維實數空間。C^2 中一域 D 之一種摹想方法爲先固定 C^2 所繫聯之四實變數中之一，例如說 y_2，然後對不同的 $y_2^{(0)}$ 之値，研究交集

$$D\cap\{z \mid y_2=y_2^{(0)}\} \;.$$

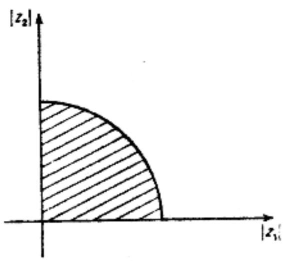
許多有相當對稱性質之域均能由實數空間 R^2 或 R^3 中一點集來示明：

範例：

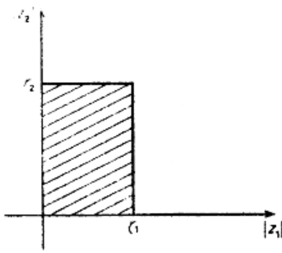
3-1. 超越球體：$\{z \mid |z_1|^2+\cdots\cdots+|z_n|^2<r\}$（此爲歐幾里得模方中以半徑爲 r 之開球）$n=2$ 時之情形能表如圖 1 所示。

3-2. 多面柱：$\{z \mid |z_1|<r_1 ,\cdots\cdots, |z_n|<r_n\}$（當 $r_1=r_2=\cdots\cdots=r_n=r$ 時，即爲最大模方中以半徑爲 r 的開球）。多面柱（參閱圖 2）爲 n 個開圓盤（disc）之直接乘積。

$$\{z_1 \mid |z_1|<r_1\}\times\cdots\cdots\times\{z_n \mid |z_n|<r_n\} \;.$$



圖（1）

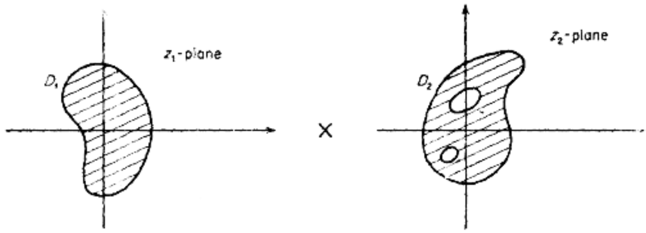


圖（2）

至於一維複數之超越球體，及多面柱均成一圓，對於較高維之情形，此兩集合均適當於圓，但不能互作全純的寫像。（此可由伯格曼核函數構成之不變式示明之）。

3-3. 乘積域：$\{ z \mid z_1 \in D_1, \cdots\cdots, Z_n \in D_n \}$

式中D_1，$D_2 \cdots\cdots D_n$ 均為平面域（參閱圖3），一多面柱為一當 D_j 為圓時之乘積域。

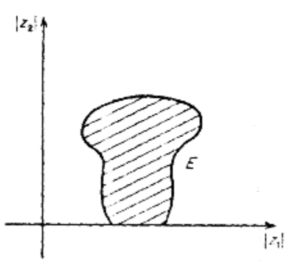


圖（3）

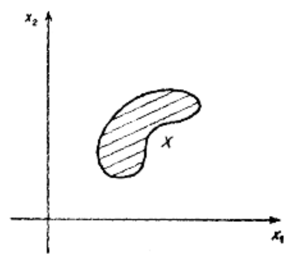
3-4. 圓形域（亦記為雷英哈特（Reinhardt）域）：

$$\{ z \mid (|z_1 - z_1^{(0)}|, \cdots\cdots, |z_n - z_n^{(0)}|) \in E \}$$

式中 E 為（$|z_1 - z_1^{(0)}|, \cdots\cdots |z_n - z_n^{(0)}|$）空間中之一集合。



圖（4）



圖（5）

一圓域可以有下列自同構(automorphism)寫像:

因 $z_k^* - z_k^{(0)} = e^{i\theta_k}(z_k - z_k^{(0)})$, $k = 1, \cdots\cdots, n$

式中 $\theta_1, \cdots\cdots, \theta_n$ 均爲任意實數,(參閱圖 4)。超越球體與多面柱均爲特別的圓域。

3-5. 管形域:$\{ z \mid x \in X, y$ 爲任意$\}$,$z_j = x_j + iy_j$,

$$x = (x_1, \cdots\cdots, x_n), \quad y = (y_1, \cdots\cdots, y_n)$$

且 X 爲實數部分 $(x_1, \cdots\cdots x_n)$ 空間之一域,(參閱圖 5)。

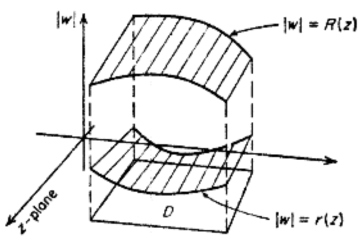
3-6. 哈托格(Hartogs)域:

$$\{ (z, w) \mid z \in D, \ r(z) < |w - w^{(0)}| < R(z) \},$$

式中 D 爲 C^n 中之一域,$w \in C^1$,及 $r(z)$ 與 $R(z)$ 均爲正函數。較普遍言之,哈托格域爲 (z, w) 空間之一域;$z \in C^n$,$w \in C^1$。且具有下列之自同構寫像群:

$$z^* = z, \quad w^* - w^{(0)} = e^{i\theta}(w - w^{(0)}),$$

θ 爲任意實數,(參閱圖 6)。



圖(6)

全純函數(Holomorphic Tunctions)

4-1. 函數爲"定義域"中每一元素與某一"值集合"中一個且僅一個

元素之結合，吾人將考慮函數之値均爲複數（或實數），且其定義域爲 C^n 中之一域，如此之函數的 p 數組可視爲取値於 C^p 中之一函數。

4-2. 單複變全純函數，可由下列不同的四性質所鑑定。即函數 $f(z)$ 在一域 $D\subset C^1$ 中爲全純函數；若且只若

(1) 於 D 之每一點 $z^{(0)}$，$f(z)$ 恒可展開爲冪級數；

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z-z^{(0)})^\nu$$

而在 $z^{(0)}$ 之某一鄰近收斂。

(2) 於 D 之每一點 $z^{(0)}$，$f(z)$ 具有一複數導數；亦即若且只若 $f(z)$ 具有連續偏導數；且於 D 中滿足戈西與黎曼（Cauchy-Riemann）之微分方程式。若引入微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

則應滿足之微分方程，可簡書爲 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=0$．同時亦可定義

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(3) $w=f(z)$ 對屬於 D 而滿足 $f'(z^{(0)})\neq 0$ 之任意點 $z^{(0)}$ 的鄰近作保角寫像。（意即給予任意經過 $z^{(0)}$ 之兩曲線，其兩切線間的夾角，與在 w 平面上之寫像曲線所作切線間的交角，其大小與方向均相同。）

(4) $f(z)$ 於 D 中爲全純，若且只若 $f(z)$ 於 D 中連續，且當 $z^{(0)}$，$z\in D$ 時，積分 $\int_{z^{(0)}}^{z}f(\zeta)\,d\zeta$；與積分路線局部無關。（戈西定理與莫烈拉定理（Cauchy's theorem and Morera's theorem））

這些性質均可推廣爲多變數的情形，且定義一族函數隨之產生一問題；這些函數族是否均與單元函數族全同呢？

4-3. 定義：在一域 $D\subset C^n$ 定義之複數值函數 $f(z)$，如能對於域 D 之每一點 $z^{(0)}$ 能展爲多重冪級數

$$f(z)=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}(z_1-z_1^{(0)})^{\nu_1}\cdots(z_n-z_n^{(0)})^{\nu_n}$$

且在 $z^{(0)}$ 之隣近爲一致收斂者，則稱 $f(z)$ 爲域 D 內在魏爾斯特拉斯（Weierstrass）之意義下的全純函數。

4-4. 定義：在一域 $D\subset C^n$ 之複數値函數 $f(z)$，若且只若在 D 之每一點 $z^{(0)}$ 其偏導數存在且滿足戈西與黎曼之微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0,\qquad j=1,\cdots\cdots,n$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

則稱* $f(z)$ 爲 D 內在戈西黎曼意義下之全純函數。

4-5. "魏氏全純"蘊含着"戈黎氏全純"。

誠然若 $f(z)$ 爲魏氏全純，則

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_{\mu_1,\cdots,\mu_n}(z_1-z_1^{(0)})^{\mu_1}\cdots(z_n-z_n^{(0)})^{\mu_n}.$$

讀者可以示明：若一多重冪級數對一點 $(z_1^{(1)},\cdots,z_n^{(1)})$ 收斂時，則於任意滿足 $r_1<|z_1^{(1)}-z_1^{(0)}|,\cdots,r_n<|z_n^{(1)}-z_n^{(0)}|$ 之多面柱

$$\{z\mid |z_1-z_1^{(1)}|\le r_1,\cdots,|z_n-z_n^{(1)}|\le r_n\},$$

內爲一致收斂。因此上述之多重冪級數在 $z^{(0)}$ 之隣近爲一致收斂。再由熟知之有關一致收斂定理，可作此級數之逐項微分，因爲

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(z_1-z_1^{(0)})^{\mu_1}\cdots(z_n-z_n^{(0)})^{\mu_n}=0.$$

故　$f(z)$ 爲戈黎氏全純。

4-6. 對於 $n=1$ 可證明戈黎氏全純函數能展成如下之冪級數。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta$$

*意即，若於 $f(z)$ 中，以常數置換 $n-1$ 個變數，則 $f(z)$ 在單變數之意義下，成爲 z_j 之一全純函數。

亦可說：$f(z)$ 爲各別的每一變數之全純函數

式中 C 為一圍繞 z_0 之圓。展開

$$\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{\nu}}{(\zeta-z_0)^{\nu+1}}$$

當交換和及積分順序時，即得 $f(z)$ 之泰勒展式。這種變換是可行的，因為此幾何級數為一致收斂，且 $f(\zeta)$ 為連續函數。後者之事實，實為複數導數 f' 存在之結論。

對於定義域為乘積域之多複變的戈黎氏函數，不難作戈西積分公式之一般化如下：

設 $f(z)$ 為乘積域 $D=D_1\times\cdots\cdots\times D_n$ 鄰近內之戈黎氏全純函數，則

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\,d\zeta_2\cdots d\zeta_n$$

此處之積分乃沿邊界 $\partial D_1,\cdots\partial D_n$ 之直乘積。（注意：此處之乘積為 n（實數）維，至於 D 之拓樸邊界則為 $2n-1$ 維）。

誠然每一因子 $\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}$ 均可展開為幾何級數（與單變數類似），但無論如何，不能有 $f(\zeta)$ 為連續之結論，例如：

函數 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^4+y^4}$，$f(0,0)=0$ 為使 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在無論何處均存在之兩元函數，此函數對每一各別的變數而言均連續，但同時對二變數而言，並非連續甚至為非有界者。

因此我們不能像在單變數情形時那樣交換積分及和的順序，而僅能在附加假設 $f(z)$ 在 D 中連續（或至少局部有界）的條件下始能證明。要證明這個假設為不必要的，即等於證明若 $f(z)$ 為戈黎全純，則必為連續。這問題為此理論最初的傑出問題之一，而被哈托格［26］所解出，他用到點集論之定理；此後有關此一定理之證明（未曾被挑剔過）均沿用哈托格的基本構想。該證明在有限的篇幅內重述，略嫌複雜，優良而易讀的證法，可於卡累得阿多利（Caratheodory）書中找到［17，第二册］。吾人乃