

初等数学 思想方法选讲

欧阳维诚 张 垚 肖果能 编著

湖南教育出版社

012
015

初等数学思想方法选讲

欧阳维诚 张垚 肖果能 编著

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学思想方法选讲/欧阳维诚等编著. —长沙:
湖南教育出版社, 2000.1

I. 初... II. 欧... III. 初等数学 - 思想方法
IV. 012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 12781 号

初等数学思想方法选讲

欧阳维诚 张 士 肖果能 编著

责任编辑:郑绍辉

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 643 号)

湖南省新华书店经销 湖南省岳阳印刷厂印刷

787×1092 32 开 印张:10 字数:237000

2000 年 8 月第 1 版 2001 年 10 月第 2 次印刷

印数:1001—4000

ISBN7—5355—3262—4/G·3257

定 价:12.50 元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂调换

序

这本书的作者——欧阳维诚、张垚、肖果能，是我十分熟悉的三位数学教授，他们各自都有非常优秀的工作，有极高的数学修养。

说到数学修养，不只是指对数学知识的掌握，更包括对数学精神的体验，对数学文化的感受，以及他们对数学教育事业的执著。

数学并不是由一串串的计算公式和一系列定理堆砌而成的，数学的精华在于它的思想、精神和理想，正是它的这种精华给了人类文化演进以极其巨大的影响。三位教授著作的选材正在于表现这种精华。

比较丰富的数学知识是形成良好数学修养的基础，而数学修养的增强将使我们能更好地理解数学，从而又促进我们增长和充实数学知识。所以阅读一些关于数学思想、数学方法、数学史的著作是大有益处的。

三位教授撰写的《初等数学思想方法选讲》一书还有其独到之处。

首先，虽然关于数学思想方法方面的著述已陆续出版了一些，但像这部著作这样将数学内容、数学思想、数学方法、数学本质、数学精神以及数学历史有机地融汇在一起，其论说又这样简练，实属罕见。

其次，虽然三位教授涉及的知识面很宽，但基本上是以初等数学为背景材料，即便涉及一些高等内容也尽量采用初等方

法或比较通俗的叙述方式，因而其可读性会更强，相信读者面也会比较宽。

再次，三位教授一直非常关注数学教育，又有丰富的实践经验，因而他们的叙说更贴近实际，数学爱好者、数学专业的学生、某些非数学专业的学生以及数学教师都有可能通过这本书而有新的体验和感受。

相信三位教授是又做了一件大有益于数学研究和数学教育的工作。

张楚廷

2000 年元月

前 言

秘鲁大学教授 J.N.Kapur 曾在他的《数学家谈数学本质》一书的序言中提出这样一个观点：数学本质是每一位数学教员，每一位学习数学的学生，每一位受过教育的人，每一位科学(包括社会科学)技术工作者，甚至每一位学生家长都关心的问题，是世界上几乎每个人都应该感兴趣的问题。

我们认为，把他所说的“数学本质”换成“数学思想方法”也应该如此。

每一位数学教员都应该对数学思想方法感兴趣，因为如果他只理解数学知识而不理解数学的思想方法，那是很难教好这门课程的。

每一位数学专业的学生肯定都对数学思想方法感兴趣。一个人的精力有限，数学的知识无穷，只有掌握了数学思想方法，才能深刻地理解数学、欣赏数学和应用数学。

每一个受过教育的人也应该对数学思想方法感兴趣，因为他多少学过一些数学，无论他是否喜爱数学，是否应用数学，但数学思想方法对他从事的专业一定有所帮助。

每一位科学工作者都应该对数学思想方法感兴趣，因为数学已经向各种科学(包括社会科学)渗透，在他的研究工作中肯定会遇到数学思想方法的挑战。

湖南教育出版社郑绍辉先生多年从事数学教育图书的编辑出版工作，卓有成效。他有鉴于对数学教师、青年学生提供一本数学思想方法方面的读物的重要性，几年前就提出了这个图

书选题。

我们愉快地接受了原来自以为能够勉为其难的任务，但是“事非经过不知难”，具体动起笔来，却碰到了许多意想不到的困难。

困难主要来自两个方面：

首先，什么是数学思想，什么又是数学方法，还没有大家一致认同的明确的界定，名不正则言不顺，这是第一个困难。

其次，数学思想方法内容庞杂，纵横交错，要提纲挈领而理不清头绪，想条陈缕析而把不住脉络，这是第二个困难。

困难当前的情况下，我们只好采取了我行我素的对策，按照我们自己对数学思想方法的粗浅理解去展开我们的讨论。

首先，我们把数学思想分为三类或三个层次：第一是对数学本质的认识方面的思想，它回答“数学是什么”的问题。第二是数学的地位、作用、研究和发展方面的思想，它回答“数学向何处去”的问题。第三是解决具体数学问题的思想，它回答“数学怎样论证”的问题。根据责任编辑的组稿意图，本书主要是讨论第三层次的数学思想，为了方便，我们把它简称为数学解题思想。

其次，我们认为，数学解题思想虽然内容广泛，错综复杂，但都可以归结为“转化”和“构造”这两个范畴，其他的数学思想方法则处于更低层次的、从属的地位。所以，全书就围绕“构造”和“转化”这两条主线来展开讨论。

在这种思想指导之下，我们把全书分作六章：第一章概略地对我们提出的三类数学思想进行了宏观的扫描。第二章简要地介绍了数学史上一些重大的数学思想方法的产生和它们对数学发展的影响，希望能起到“温故而知新”的作用。第三章论述为什么要把“构造”和“转化”作为两大基本数学思想（指第三层

次数学思想或解题思想), 分析它们的意义、方法和作用. 第四章讲述一些具体的构造思想. 第五、第六两章讲述具体的转化思想. 这里我们又把“转化”思想分成两类, 第一类的转化比较自然, 转化前后具有明显的、必然的逻辑联系, 相当于我们通常说的解“常规题”; 第二类的转化跳跃性大, 转化前后缺乏明显的必然的逻辑联系, 相当于我们通常说的解“非常规题”.

本书是在既分工又合作的情况下写成的, 搜集材料、确定章节、提出论点、统一说法等等都是在共同讨论下完成的. 至于执笔成文则分工进行. 其中第一和第六章由欧阳维诚执笔, 第二章和第五章由张垚执笔, 第三章和第四章由肖果能执笔. 作者的署名也是按所写章节的顺序安排的.

我们深深感谢本书的责任编辑郑绍辉先生, 他从提出选题到审读书稿, 付出了艰辛的劳动, 提出了许多中肯的、宝贵的意见, 如果说, 这本小书对读者有所帮助的话, 郑先生的辛勤劳动是功不可没的. 我们也非常感谢我们的学友张楚廷教授, 他在百忙中审读了我们的写作提纲和目录, 并为本书作序.

作 者

千禧之年元旦于长沙

目 录

序	(1)
前言	(1)
第一章 什么是数学思想	(1)
§ 1.1 三个层次的数学思想	(1)
一、数学是什么	(2)
二、数学向何处去	(5)
三、数学怎样论证	(10)
§ 1.2 数学思想的主要特征	(25)
第二章 数学思想发展史概述	(33)
§ 2.1 古代数学思想的两大源泉 ——《几何原本》与《九章算术》	(33)
一、《几何原本》及其影响	(33)
二、《九章算术》及其影响	(40)
§ 2.2 非欧几何的诞生	(45)
一、非欧几何思想的产生	(45)
二、非欧几何创立的历史意义	(48)
§ 2.3 三次数学危机	(52)
一、 $\sqrt{2}$ 的发现与第一次数学危机	(52)
二、无穷小与第二次数学危机	(54)
三、罗素悖论与第三次数学危机	(57)
§ 2.4 近代和现代数学思想的几次重大变革	(62)
一、变量思想进入数学——解析几何与微积分的产生	

及其意义	(62)
二、随机思想的产生——概率论的创立及其意义	(65)
三、代数结构思想的确立——群论的诞生及其影响	(68)
四、模糊思想的产生——模糊数学的建立及其意义	(69)
五、非标准思想的创立——非标准分析的建立及其 意义	(72)
§ 2.5 电子计算机对数学思想发展的影响	(75)
一、促进了数学思想方法的普遍化	(75)
二、形成了新的数学学科和新的数学理论	(76)
三、促进了数学思想方法的新发展	(77)
第三章 数学中的两大基本思想	(81)
§ 3.1 两种基本数学思想	(81)
§ 3.2 转化思想概论	(85)
一、转化的作用	(85)
二、转化的方向	(89)
三、转化的途径	(97)
§ 3.3 构造思想概论	(100)
一、构造思想的意义及构造法的分类	(100)
二、构造思想的发展和作用	(106)
第四章 构造思想	(110)
§ 4.1 数学中的构造思想	(110)
§ 4.2 数学解题中的构造思想	(128)
一、用构造方法解数学问题	(129)
二、在解题过程中构造辅助工具	(150)
§ 4.3 算法化思想与机器证明	(173)
一、算法与算法化	(173)
二、几何定理的机器证明	(180)

第五章 转化思想(上)	(183)
§ 5.1 特殊化思想	(183)
一、寻找特例	(184)
二、分类思想	(189)
三、分步思想	(192)
§ 5.2 一般化思想	(206)
一、模型化思想	(207)
二、强化命题思想	(211)
§ 5.3 变换思想	(214)
一、数式变形思想	(215)
二、变量替换思想	(219)
三、几何变换思想	(223)
四、命题转化思想	(227)
第六章 转化思想(下)	(238)
§ 6.1 映射思想	(238)
一、映射	(239)
二、配对思想	(244)
三、划分思想	(255)
四、赋值思想	(265)
五、表示思想	(274)
六、同态思想	(281)
§ 6.2 数形结合思想	(291)
一、数形转化	(292)
二、以数表形和以形验数	(295)
三、图论知识的简单运用	(303)

第一章 什么是数学思想

顾名思义，数学思想应该是人们在建立数学理论或解决数学问题时所用到的一些思想。但是，数学思想从来就不是数学家的专利，也不是只有在数学领域中才能发挥它的作用。社会正在逐渐走向理性，分析手法逐渐走向定量化，数学几乎渗透到了各个科学领域，数学思想也随之而渗入各个思想领域；反过来，各个科学领域的思想又反作用于数学思想，形成你中有我，我中有你的局面。例如，数学思想促成了电子计算机的发明和发展，而计算机的发展，又促进了数学机械化思想的飞跃。数学机械化思想将与公理化思想一样，受到数学家同样的甚至更大的重视。因此，可以毫不夸张地说，数学思想几乎存在于人类的各种思维活动中，具有最大的广泛性和深刻性。

§ 1.1 三个层次的数学思想

长期以来，人们在使用“数学思想”这一概念时，似乎并没有明确的界定，常常自觉或不自觉地强调了某一方面。一般地说，数学思想似乎可以分成三类或者说分成三个层次：

第一类是对数学本质的认识方面的思想，它回答“数学是什么”的问题。

第二类是关于数学的地位、作用和发展方面的思想，它回答“数学向何处去”的问题。

第三类是解决具体的数学问题的思想，它回答“数学怎样

论证”的问题。它与逻辑、策略以及具体的数学内容相联系。

一、数学是什么

这是一个古老而又新鲜的课题，许多数学家都从不同的角度探讨了这一问题。

1. 众说纷纭的答案

英国著名的哲学家兼数学家罗素曾经说过：“现代数学的主要成就之一，在于我们已经发现了数学实际上是什么。”

罗素所发现的数学实际上是什么呢？他写道：“数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说的是不是真的。”罗素的这一论断支持了古希腊学者柏拉图的论点。

柏拉图说：“数学是现实的核心。”柏拉图把理性世界与现实世界割裂开来，认为永恒不变的关系只能存在于理性世界之中。数学中的关系是不变的，数学与人对现实世界的知觉无关。因此，数学才构成了现实世界的核心。

而马克思主义哲学则恰恰相反，认为数学必须依赖现实世界。恩格斯在《反杜林论》一书中强调说：“数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。”

然而数学家柯朗与罗宾斯在他们合著的《数学是什么》一书中写道：“数学是什么？对于学者和门外汉，这个问题都不是靠哲学来回答的，而是靠从事数学的经验来回答的。”

但是，即使是从事数学的人用经验来回答这个问题，也仍然是众说纷纭的。

本世纪关于数学基础的三大流派都在回答什么是数学这样一个问题。

逻辑主义学派认为，数学是由逻辑派生出来的，数学不过

是逻辑的一个分支。

直觉主义学派认为，数学是建立在可信性和构造性程序上的科学。

形式主义学派认为，数学是一种纯粹的符号游戏，对这种游戏的惟一要求是它不导致矛盾。

上述的各种说法显然有其片面性，还是柯朗与罗宾斯说得好：“有一种观点严重地威胁着科学的生命：认为数学是一门不知所云的学科，它只是从定义和公理出发推导出来的一系列结论，除了这些公理必须互相一致以外，完全出自数学家心灵的自由创造。如果这种意见是正确的话，那么数学就会只由定义、法则和三段论法组成，成为没有动机，没有目标的游戏。

认为有智慧的人可以凭其爱好创造有意义的假设系统。这种概念只对了一半，只有在内在必要性的指导下，自由思想才有可能达到具有科学价值的结果。”

也有一些数学家从数学的作用来回答这一问题，如皮尔斯：数学是得出必要结论的科学。

美国国家研究委员会的一些专家则认为：数学科学是集严密性、逻辑性、精确性和创造力与想像力于一身的一门学问。这个领域已被称为模型的科学。

庞加莱：数学是给予不同东西以相同名称的技术。

上述几种定义，显然有点模棱两可和难以捉摸。

哈佛大学数学家哈里森提出了自己的见解：“数学是关于秩序的科学——它的目的就在于探索、描述并理解隐藏在复杂现象背后的秩序。数学的首要工具就是使我们能够将这种秩序说清楚的一些概念。正因为数学家花费了多少个世纪寻求最有效的概念来描述这种秩序的奇异特点，所以他们的工作就能应用于外部世界，而这个现实世界真可谓集复杂情况之大成，其

中有着大量关于秩序的问题。”

应该怎样理解他所说的“秩序”和“概念”呢？如果他所说的“秩序”是先于人提出的概念而客观存在的，那么，哈里森的说法就是亚里士多德的所谓“实物属性”的翻版。如果“秩序”是依赖于概念而存在的，而概念却是与现实世界无关的，那么，哈里森的说法就会成为柏拉图“理念世界”的翻版。

2. 数学是关于秩序的科学

综合各种观点，我们能否认为

(1) 数学是关于秩序的科学。当人们把现实世界的某些事物或关系抽象为概念之后，在这些概念中就隐藏着大量的、不以人的意志为转移的秩序。数学是通过概念和符号用逻辑推理的形式来表述这些秩序的科学。

(2) 数学的一切进展都不同程度地植根于实际的需要；数学不管它多么抽象，它在自然界中最终必能得到实际的应用。当然，要准确地预测一个数学领域在何时何地将会派上何种用场是不可能的，也是不必要的。

(3) 数学一旦在实际需要的背景下被推动了，它自身就会获得一种巨大的能量自我推进，很快超越直接应用的界限。因此，某种数学在一定的阶段可以是由未加定义的词语和公理组成的抽象系统，不必和自然有任何联系，不是任何事物的模型，而仅仅是因为数学家的兴趣与能力产生出来的，数学家没有把他的结论必须应用到自然中去的先决条件。

但是，如果根据某些数学内容是在远离现实的基础上，从抽象到抽象地产生出来的，就怀疑这些内容永远不会有用了，就必然会受到时间的嘲弄。例如，著名的英国数学家哈代曾经十分自信地断言，抽象的数论不会有什么用处。但是，不到40年，数论竟然与保密工作发生了联系，在军事、经济和国家安

全方面发挥了重要的作用。

二、数学向何处去

这个问题实质上是前一问题的延续。主要有两个方面的问题：一是纯粹数学与应用数学之间的关系；一是纯数学本身发展的关系。毫无疑问，这两个问题都影响到数学发展的方向。

1. 纯数学与应用数学的良性循环

纯数学与应用数学之间的关系，人类文明的发展史已经证明，它们实际上形成了很好的良性循环。人类从现实的应用（诸如测量、生产、占筮、赌博等等）中抽象出了数学的概念，当这些概念一旦形成，数学家们就不再认为原来的那些用以抽象出数学概念的事物对数学本身有任何实际的意义，因而彻底地抛弃它们，依靠本身的动力，在不与数学以外的任何事物进一步接触中自我成长。数学家可以在这个自给自足、自我封闭的天地里充分地发挥自己的想像力和创造力。从这个意义上讲，可以说数学的本质是自由。然而应用数学家不必担心，不管纯数学走得有多远，随着时间的推移，总能为它们找到实际的应用。

不幸的是，为坚持纯数学的抽象方法所必需的各种手段——语言、符号、公式、定理等等掩盖了纯数学与应用数学之间的本质关系，其结果是加大了纯数学与应用数学之间的人为的隔阂，造成了纯数学与应用数学之间表面上的疏远。于是，一方面，纯粹数学家可能认为自己的工作越来越令人不能理解，在那象牙塔的顶尖上感到“高处不胜寒”。另一方面，那些被一大堆抽象的符号和公式所吓倒的人们，越来越认为数学只是一些玩弄公理的游戏，而对它所带来的深刻见解视而不见。

我们不能被这种表面的现象所迷惑，应该努力去保持和发

展纯数学与应用数学之间的良性循环。纯粹数学家可以心安理得地从事自己的研究，不必急功近利地为寻求它的应用而削弱理论的研究。应用数学家可以满怀信心地到已有的数学成果中去寻找对发展自己所研究的学科有用的东西，那里有取之不尽的宝藏，比其他任何资源更为有效、更为廉价。纯粹数学和应用数学好像人的两只眼睛，人们可以闭上一只眼睛去搜寻各自的目标，有时两只眼睛同时睁开可以看得宽一些，有时闭上一只眼睛（例如射击）却可能看得更准。

因此，过分强调数学为现实服务而削弱对基础理论的研究是不恰当的，它有可能阻碍数学甚至整个科学技术的发展。同样的，轻视应用数学对纯数学发展的作用也是不恰当的。过分强调经世致用的中国古代数学发展的道路就说明了这一点。中国古代数学曾经取得过辉煌的成就，但却长期被当作一种应用技术而在纯理论的发展上没有得到应有的重视。正是这种轻视纯数学理论研究而只重视数学应用的思想，在一段时期内延缓了中国纯数学的发展。这不能不说是中国古代（特别是近代）虽然在技术上也有许多发明创造，但整个科学发展却相当落后的主要原因之一。著名的科学家爱因斯坦曾经说过：“西方科学的发展是以两个伟大的成就为基础，那就是：希腊哲学家发明的形式逻辑体系（在欧几里得几何中），以及通过系统的实验发现有可能找出因果关系（在文艺复兴时期）。在我看来，中国的贤哲没有走上这两步，那是用不着惊奇的，令人惊奇的倒是这些在中国全部做出来了。”这就是说，在中国古代，理论科学（特别是纯数学）没有得到应有的重视，虽然也取得了许多技术上的成就，但那要付出更多的代价。

另一方面，经世致用的思想，虽然延缓了我国现代数学的发展，但它却孕育和发展了算法化、机械化的数学思想，对西