

量子力学与原子物理学 学习指导

刘莲君 张哲华 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

量子力学与原子物理学学习指导/刘莲君,张哲华编著. —武汉: 武汉大学出版社, 2000. 12

ISBN 7-307-02709-7

I. 量… I. ①刘… ②张… II. ①量子力学—高等学校—教学参考资料 ②物理学—高等学校—教学参考资料
N. ① O413.1 ② O562

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 00142 号

责任编辑: 史新奎

版式设计: 支 笛

出版: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.whu.edu.cn)

发行: 新华书店湖北发行所

印刷: 湖北日报社印刷厂

开本: 850×1168 1/32 印张: 32.125 字数: 832 千字

版次: 2000 年 12 月第 1 版 2000 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-02709-7/O · 204 定价: 36.50 元

版权所有, 不得翻印; 凡购买我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

本书是与我们编著的教材《量子力学与原子物理学》（武汉大学出版社，一九九七年九月第一版）配套的教学辅助教材。按那本教材，本书共分同样的十一章。每章又分为三部分。第一部分是内容提要，尽可能简要地总结了一章的主要内容，并且对个别内容作了些许扩充。第二部分是例题，全书共有 335 道例题，包括了《量子力学与原子物理学》书中的几乎全部习题；每一道例题都有详细的解答。第三部分是练习题，全书共有 196 道练习题；练习题没有解答，但是在每一道题后都附有答案，有的题还给出了提示。本书从 1987 年起就由武汉大学教务处以讲义的形式分成上、下册刊印，提供给本校学生为指导学习量子力学课程使用；这次正式出版又增补了不少应用量子力学理论求解原子物理学问题的例题和练习题。期望本书能够对学生学习量子力学与原子物理学课程起到指导和辅助作用。

本书的编写工作是由刘莲君策划的；张哲华写出全书的内容提要以及四分之一的例题和练习题，刘莲君写出全书四分之三的例题和练习题。

对本书中的错误和不妥之处，恳请读者批评指正。感谢武汉大学教务处、理学院以及武汉大学出版社的支持，使本书得以出版。

刘莲君 张哲华

一九九九年一月于武汉大学理学院物理系

目 录

第一章 量子力学与原子物理学的实验基础	(1)
第一部分 内容提要	(1)
一、原子结构的卢瑟福核式模型	(1)
1. α 粒子散射实验现象 (1) 2. 卢瑟福的原子核式结构模型 (1)	
3. 卢瑟福散射公式 (2) 4. 卢瑟福散射公式的实验验证 (2)	
5. 经典力学的困难 (3)	
二、原子的电子结构的玻尔-索末菲模型	(3)
1. 玻尔的两条量子假设 (夫兰克-赫兹实验证实) (3) 2. 玻尔氢原子理论的量子化条件 (4)	
3. 玻尔氢原子理论的基本结论 (4)	
4. 对氢原子光谱的解释 (5) 5. 索末菲对玻尔氢原子理论的发展 (6)	
6. 对碱金属原子光谱的解释 (6) 7. 玻尔-索末菲量子论的地位和局限性 (7)	
三、光的波粒二象性	(8)
1. 黑体辐射的普朗克公式 (8) 2. 光电效应的爱因斯坦公式 (8)	
3. X 射线散射的康普顿公式 (9) 4. 光的波粒二象性的爱因斯坦关系式 (9)	
四、实物粒子的波粒二象性	(9)
实物粒子的波粒二象性的德布罗意关系式与电子的晶体衍射实验 (9)	
第二部分 例题	(10)
第三部分 练习题	(68)

第二章 量子力学原理 (I): 波函数及

薛定谔方程	(74)
第一部分 内容提要	(74)
一、量子力学的第一条假设：波函数及其统计解释 ...	(74)
1. 波函数 (74) 2. 波函数的统计解释 (75) 3. 波函数的归一化 (75) 4. 量子态 (78)	
二、测不准关系	(78)
三、态叠加原理	(79)
四、量子力学的第二条假设：薛定谔方程	(80)
1. 薛定谔方程 (80) 2. 连续性方程和几率流密度 (80) 3. 薛定谔方程的经典极限 (81) 4. 体系的时间演化算符 (81)	
五、定态	(85)
1. 定态的定义 (85) 2. 定态薛定谔方程 (85) 3. 一维定态问题 (85) 4. 逆问题 (86) 5. 已知时刻 t' 的非定态波函数 $\Psi(r, t')$ 求时刻 t ($t > t'$) 的 $\Psi(r, t)$ (86)	
第二部分 例题	(88)
第三部分 练习题	(192)

第三章 量子力学原理 (II): 力学量算符及

量子条件	(206)
第一部分 内容提要	(206)
一、量子力学的第三条假设：力学量用算符表示	(206)
1. 算符 (206) 2. 力学量用算符表示 (207)	
二、几个基本的力学量算符	(208)
1. 坐标及坐标的函数 (208) 2. 动量及动量的函数 (209) 3. 轨道角动量 (209) 4. 宇称 (209) 5. 体系的哈密顿算符 (209)	
三、量子力学的第四条假设：量子条件	(209)
1. 基本量子条件的引出 (210) 2. 复变量表示的基本量子条件 (211) 3. 两个力学量算符之间的对易关系 (212) 4. 量子条件的作用 (213)	

四、一般性的测不准关系·····	(213)
五、力学量期望值随时间变化, 体系的守恒量·····	(214)
1. 力学量的期望值随时间的变化 (214)	2. 厄仑费斯特定理 (214)
3. 体系的守恒量 (215)	
六、三个定理·····	(216)
1. 维里定理 (216)	2. 费曼-海尔曼定理 (217)
3. 克喇末表示式 (218)	
第二部分 例题·····	(220)
第三部分 练习题·····	(305)
第四章 中心力场——氢原子和碱金属原子 ·····	(312)
第一部分 内容提要 ·····	(312)
一、粒子在中心力场中运动的一般特点 ·····	(312)
1. 定态薛定谔方程分离变量 (312)	2. 角向方程和角向函数 (313)
3. 径向方程, 径向函数和体系的能量 (313)	4. 束缚定态的能级和波函数 (314)
二、求解束缚定态径向方程的几点说明 ·····	(315)
1. 相似于粒子在一维有效势场中运动的定态薛定谔方程 (315)	
2. 克喇末表示式 (316)	3. 费曼-海尔曼定理的应用 (317)
4. 逆问题 (318)	
三、电子在原子核的静电库仑势场中运动 ·····	(318)
束缚定态的能量、径向函数以及能级简并度 (318)	
四、氢原子和类氢离子问题 ·····	(319)
1. 将两体问题归结为一个电子在库仑场中运动问题 (319)	2. 束缚定态能量 (320)
3. 原子内电子云的角向分布和径向分布 (321)	
4. 原子内的电流密度分布及原子的磁矩 (321)	5. 定态之间的量子跃迁 (322)
五、碱金属原子 ·····	(323)
1. 原子实的势场 (323)	2. 价电子束缚定态的能级, 量子数亏损 (323)
3. 量子数亏损的准经典近似计算 (324)	

六、三维各向同性谐振子.....	(326)
定态的能量、径向函数以及能级简并度	(326)
七、粒子在二维中心势场中运动.....	(327)
哈密顿算符及径向方程, 与三维情况对应	(327)
第二部分 例题	(328)
第三部分 练习题	(414)
第五章 态和力学量的表示方式	(424)
第一部分 内容提要	(424)
一、狄拉克符号和表象表示.....	(424)
二、狄拉克符号.....	(425)
1. 体系态矢量的狄拉克符号: 右矢 (425)	
2. 右矢空间的对偶空间中的矢量: 左矢 (425)	
3. 算符的表示 (426)	
4. 基矢量组的正交归一性和完备性表示式 (427)	
三、表象表示; \hat{Q} 表象: 两类情况	(427)
四、 \hat{Q} 表象: 算符 \hat{Q} 的本征值谱连续情况	(428)
1. 态矢量的表示 (428)	
2. 力学量算符的表示 (429)	
3. 量子力学公式及方程的表示式 (431)	
五、 \hat{Q} 表象: 算符 \hat{Q} 的本征值谱分立情况	(435)
1. 态矢量的表示 (435)	
2. 力学量算符的表示 (436)	
3. 量子力学公式及方程的表示式 (437)	
六、狄拉克符号与表象表示的等价性.....	(439)
七、表象变换及不同表象的等价性.....	(439)
1. 两个表象的基矢量组之间的变换 (440)	
2. 态矢量的表象变换 (440)	
3. 力学量算符的表象变换 (441)	
4. 不同表象的等价性 (441)	
第二部分 例题	(441)
第三部分 练习题	(538)

第六章 电子自旋及一般角动量	(550)
第一部分 内容提要	(550)
一、再定义轨道角动量算符	(550)
1. 定义为空间转动变换算符群的生成元 (550)	
2. 由定义推导出对易关系 (552)	
3. 由定义推导出坐标表象的表示式 (553)	
4. 应用 (555)	
二、电子自旋的假设与实验证实	(556)
三、电子自旋算符	(557)
1. 定义为空间转动变换算符群的生成元 (557)	
2. 对易关系 (557)	
3. 狄拉克符号表示 (557)	
4. 泡利表象 (558)	
5. 算符 $\hat{s} \cdot \mathbf{n}$ (559)	
四、电子自旋态矢量	(560)
1. 本征态矢量 (560)	
2. 一般态矢量 (561)	
3. 旋量 (562)	
4. 自旋极化方向在磁场中进动 (562)	
五、一般角动量算符	(563)
1. 定义 (563)	
2. 对易关系 (563)	
3. 本征值问题 (563)	
4. 矩阵表示 (角动量算符及空间转动变换算符的矩阵表示) (564)	
5. 角动量的施温格谐振子模型 (566)	
六、两个角动量的耦合	(568)
1. 两个独立的角动量算符之和 (568)	
2. 总角动量算符的本征值问题 (568)	
3. 无耦合表象与耦合表象 (569)	
4. 克累布施-戈登系数 (569)	
5. 例一: 一个电子的“轨道”——自旋耦合态 (570)	
6. 例二: 两个电子的自旋耦合态 (572)	
第二部分 例题	(572)
第三部分 练习题	(648)
第七章 原子光谱的精细结构	(658)
第一部分 内容提要	(658)
一、瑞利-薛定谔定态微扰展开	(658)
1. 非简并情况 (659)	
2. 简并情况 (660)	

二、达伽诺-列维斯技巧	(661)
一维运动情况和三维中心力场中运动情况 (663)	
三、布里渊-维格纳定态微扰展开	(664)
四、瑞利-里兹变分法	(666)
五、变分-微扰法	(667)
六、原子光谱的精细结构	(668)
1. 氢原子及类氢离子 (668) 2. 碱金属原子 (669) 3. 电偶极辐射跃迁选择定则 (669)	
七、兰姆位移	(669)
实验现象和简单解释 (670)	
八、原子能级的超精细结构	(671)
1. 核磁矩与电子的相互作用 (671) 2. 核电四极矩与电子的相互作用 (672) 3. 核的有限质量效应 (673) 4. 核的有限体积效应 (673)	
九、氢原子能级间距的数字计算举例	(673)
第二部分 例题	(674)
第三部分 练习题	(737)

第八章 粒子在电磁场中的运动

第一部分 内容提要

一、粒子在电磁场中的运动方程

1. 无自旋粒子运动的哈密顿算符 (742) 2. 几率流密度 (742) 3. 规范变换及规范不变性 (743) 4. 例一：朗道能级 (744) 5. 例二：AB效应 (746) 6. 电子在电磁场中运动计入自旋和相对论性修正后的哈密顿算符 (749)

二、恒定均匀磁场中的原子

1. 体系的哈密顿算符 (750) 2. 强场情况：正常塞曼效应 (750)
3. 弱场情况：反常塞曼效应 (751) 4. 原子的磁矩和磁化率 (751)
5. 氢原子在外恒定均匀强磁场中运动方程的柱面坐标系式 (752)

三、电场中的原子.....	(753)
1. 氢原子在外恒定均匀电场中能级的线性斯塔克分裂 (753)	
2. 碱金属原子在外恒定均匀电场中能级的平方斯塔克分裂 (754)	
3. 原子的电偶极矩和电极化率 (754)	
4. 氢原子在外恒定均匀强电场中运动方程的抛物线坐标系式 (755)	
5. 振荡电场中的原子 (756)	
第二部分 例题.....	(758)
第三部分 练习题.....	(811)
第九章 全同粒子系——多电子原子	(817)
第一部分 内容提要.....	(817)
一、全同粒子系波函数的粒子交换对称性, 量子力学的 第五条假设.....	(817)
1. 全同性原理 (817)	
2. 全同粒子系的粒子交换对称性 (817)	
3. 全同粒子系波函数的粒子交换对称性, 量子力学的第五条假设 (818)	
二、独立粒子模型.....	(818)
1. 体系定态的波函数和能量 (818)	
2. 泡利不相容原理 (820)	
三、氮原子和类氮离子.....	(820)
1. 二电子体系的定态波函数 (820)	
2. 泡利排斥和泡利吸引 (821)	
3. 氮原子和类氮离子 (基态, 单激发态, 直接作用能与交换作用能, 正氮和仲氮, 电偶极辐射跃迁选择定则) (822)	
四、多电子原子.....	(824)
1. 原子的电子壳层结构 (壳层和支壳层, 原子的电子组态) (824)	
2. 原子的定态、项和项能 (LS 耦合, jj 耦合, 中间耦合方式) (825)	
3. 原子能级的反常塞曼分裂 (828)	
4. 电偶极辐射跃迁选择定则 (829)	
五、X 射线	(829)
几个基本公式 (829)	
第二部分 例题.....	(830)
第三部分 练习题.....	(899)

第十章 量子跃迁——原子的光吸收与发射	(909)
第一部分 内容提要	(909)
一、跃迁及跃迁几率	(909)
1. 含时间微扰论 (909) 2. 跃迁几率 (911) 3. 常微扰 (911) 4. 周期性微扰 (912)	
二、能量-时间测不准关系	(912)
三、原子的光吸收与发射	(912)
1. 爱因斯坦 A、B 系数 (912) 2. 电偶极近似下的光吸收系数表示式 (913) 3. 电偶极辐射跃迁选择定则 (913)	
四、另一类情况：绝热近似	(914)
绝热定理及 Berry 位相 (914)	
第二部分 例题	(914)
第三部分 练习题	(948)
第十一章 散射	(951)
第一部分 内容提要	(951)
一、散射截面	(951)
1. 散射截面 (951) 2. 从质心坐标系变换到实验室坐标系 (952)	
3. 位势散射 (952)	
二、定态描述；中心势场散射与分波法	(953)
1. 定态描述，散射振幅与散射截面 (953) 2. 中心势场散射，分波法 (953) 3. 分波法的适用范围 (954)	
三、时间相关描述；玻恩近似	(955)
1. 时间相关描述，跃迁几率与散射截面，玻恩近似 (955) 2. 中心势场散射情况 (956) 3. 玻恩近似的适用条件 (956)	
四、李普曼-施温格方程	(956)
1. L-S 方程 (957) 2. $\psi_k^{(+)}(r)$ 满足散射问题的边界条件 (958) 3. 散射振幅 $f(\theta, \varphi)$ 的表示式及其玻恩级数 (958)	

五、中心势场散射的分波相移的玻恩近似表示式·····	(959)
六、中心势场散射的逆问题·····	(960)
七、全同粒子的势散射·····	(962)
八、带电粒子对原子的弹性散射·····	(963)
1. 高速粒子对原子序数为 Z 、电子数密度分布为 $\rho(r)$ 的原子散射 (963)	
2. 电子-基态氢原子散射 (963)	
第二部分 例题·····	(964)
第三部分 练习题·····	(1008)

附录

一、常用物理学常数·····	(1012)
二、单位换算·····	(1014)

第一章 量子力学与原子物理学的实验基础

第一部分 内容提要

主要叙述两方面的实验事实。一是关于原子的结构(包括卢瑟福的核式结构模型和玻尔-索末菲的核外电子结构模型),另一是关于物质(包括光波和实物粒子)的波粒二象性。

一、原子结构的卢瑟福核式模型

1. α 粒子散射实验现象

1909年盖革(H. Geiger)和马斯顿(E. Marsden)用天然放射性镭发射的 α 粒子照射在金箔上。发现绝大多数 α 粒子的散射角度很小,一般不超过 $2^\circ \sim 3^\circ$,但约有两万分之一的 α 粒子散射角度大于 90° ,有的甚至接近 180° 。实验示出存在 α 粒子大角度散射的事实。

2. 卢瑟福(E. Rutherford)的原子核式结构模型

α 粒子大角度散射的实验事实启发卢瑟福于1911年提出:原子内中心有一个极小的核,它集中了原子的绝大部分质量和全部正电荷;原子内的所有电子都在原子核的外面。这就是原子结构的核式模型。

3. 卢瑟福散射公式

卢瑟福从原子的核式结构模型出发,应用经典力学,推导出 α 粒子束入射一个靶原子的微分散射截面 $\sigma(\theta)$ 与散射角 θ 之间的关系式:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{j} \frac{dn}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (1-1)$$

称为卢瑟福散射公式。式中: E 是 α 粒子的入射能量。

实验中, α 粒子束流是入射到一片金属箔上的。设 α 粒子束流的横截面积为 S , 流密度为 j , 设金属箔单位体积内的原子数为 N , 箔厚为 d , 假定箔很薄, 箔的原子对射来的 α 粒子来说前后不相互遮蔽, 则单位时间内被金属箔散射到角 θ 方向单位立体角内的 α 粒子数为

$$\frac{dn'}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} jSNd \quad (1-2)$$

上式可以与实验测量结果直接比较。

卢瑟福系应用经典力学推导出散射公式, 事实表明这是可以的。在 α 粒子散射问题中, 将 α 粒子在原子内的运动状态用波包描述, 波包的运动行为可以用轨道概念和经典力学方程处理(波包的线度可以小于靶原子的半径, 波包在经过靶原子核的静电库仑势场过程中看来不会有显著的扩散, 因为 α 粒子的质量相对地说很大)。

4. 卢瑟福散射公式的实验验证

1913年, 盖革和马斯顿又仔细地进行了 α 粒子散射实验以检验卢瑟福散射公式(1-1)或式(1-2)。式(1-2)包含如下四种关系:

$\frac{dn'}{d\Omega} \sim d$, $\frac{dn'}{d\Omega} \sim E^{-2}$, $\frac{dn'}{d\Omega} \sim Z^2$ 以及 $\frac{dn'}{d\Omega} \sim \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 。其中, 在入射

α 粒子束流和散射金属箔均确定不变的情况下, $\frac{dn'}{d\Omega} \propto$

$\sin^{-4}(\frac{\theta}{2})$ 是卢瑟福散射公式的最重要特征。实验证实了卢瑟福散射公式,从而证实了原子核式结构模型的正确性。

5. 经典力学的困难

原子结构若按已由实验证实的核式模型,从经典力学看来,原子是不可能稳定地存在的,即原子内的电子不可能处于有确定能量的稳定运动状态(称为定态),电子绕核旋转将不断向外辐射能量,很快就会落到原子核上,原子从而崩溃。但是,自然界中原子却确实稳定地存在着。这揭示了经典力学描述原子内电子的运动有困难,必须引入新的概念和建立新的理论(量子力学)来描述。

二、原子的电子结构的玻尔-索末菲模型

1. 玻尔(N. Bohr)的两条量子假设

第一条假设是原子内部运动只可能处于一些不连续的稳定状态,称为定态。原子在每一个定态下能量分别都有一定的值;原子的能量只允许取量子化的离散值,称为一个个能级。原子处于定态下,原子内电子的运动虽然有加速度也不会发射辐射而导致原子能量改变。

第二条假设是原子的能量不能任意连续地改变,只能通过从一个定态到另一个定态的跃迁而产生跳跃式的改变。原子当从一个能量为 E_n 的定态跃迁到另一个能量为 E_k 的定态时,如果发射或吸收单色辐射,则其频率为

$$\nu_{kn} = \frac{|E_k - E_n|}{h} \quad (1-3)$$

这称为玻尔频率条件,式中 h 是普朗克常数。

玻尔于1913年提出的这两条量子假设与物理学的经典概念和理论有着尖锐的矛盾。但是,夫兰克(J. Franck)和赫兹(G. Hertz)于1914年进行的电子轰击汞原子实验直接证实了原子分

立能级的存在。

2. 玻尔氢原子理论的量子化条件

玻尔将两条量子假设应用于氢原子,假定氢原子内核静止不动,电子绕核作匀速圆周运动,两者由静电库仑吸引力相联系。按照玻尔第一条量子假设,氢原子内部运动只可能处于一系列分立定态,这指的是电子绕核作圆周运动只可能存在一系列半径分立的圆周轨道;电子圆周轨道的半径分立直接对应着原子的能量取值不连续。电子圆周轨道的半径究竟只能取哪些量子化的值,玻尔当时是由对应原理推出的,相当于由量子化条件

$$\oint p dq = nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-4)$$

确定;它指出,只有角动量

$$p_\varphi = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-5)$$

是普朗克常数 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的电子圆周运动轨道才是真正允许存在的。这称为电子轨道运动的角动量量子化。

3. 玻尔氢原子理论的基本结论

将经典力学的电子圆周运动方程

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (1-6)$$

和角动量表示式

$$p_\varphi = mvr \quad (1-7)$$

与式(1-5)联立,就得到氢原子(及类氢离子)内电子圆周运动轨道半径的允许值为

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{4\pi^2 m e^2 Z}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (1-8)$$

将上式代入原子的能量表示式

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r}$$

又得到氢原子(及类氢离子)诸分立定态的能量为

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (1-9)$$

原子能量最低($n = 1$)的定态称为基态,其相应的能量为 E_1 ; $n = 2, 3, 4, \dots$ 的能量 E_2, E_3, E_4, \dots 相应的定态分别称为第一,二,三, \dots 激发态。氢原子($Z = 1$)内电子圆周运动基态轨道半径 $r_1^{(H)}$ 特别地记为 a_0 , 称为氢原子第一玻尔轨道半径,表示式为

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{4\pi^2 m e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{m} \quad (1-10)$$

再引入精细结构常数 α 和里德伯(J. R. Rydberg)常数 R_∞ (∞ 表示将原子核的质量视为无限大), 分别表示为

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 7.297353 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137} \quad (1-11)$$

和

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3 c} = 1.0973731 \times 10^7 \text{m}^{-1}, \quad (1-12)$$

则氢原子(及类氢离子)的定态能量 E_n 式(1-9)还可以写成

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{2\pi^2 m (Ze^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2} = -\frac{(Ze)^2}{(4\pi\epsilon_0) 2a_0 n^2} \\ &= -\frac{(Z\alpha)^2 m c^2}{2n^2} = -\frac{Z^2 R_\infty h c}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (1-13) \end{aligned}$$

实际上,原子核的质量总是有限的,故上式中应将电子的质量 m 代之以折合质量 $\mu = \frac{mM}{m+M}$, M 是核的质量;因而玻尔半径应代之以经修正的玻尔半径 $a_\mu = \frac{m}{\mu} a_0$, 里德伯常数 R_∞ 应代之以 $R_M = \frac{\mu}{m} R_\infty$. 于是,它们对于氢的三种不同同位素原子以及不同的类氢离子来说分别会有稍许不同。

4. 对氢原子光谱的解释

按照玻尔第二条量子假设,由频率条件式(1-3)以及原子能量 E_n 式(1-13)可以得到氢原子(以及类氢离子)光谱线的波数表示