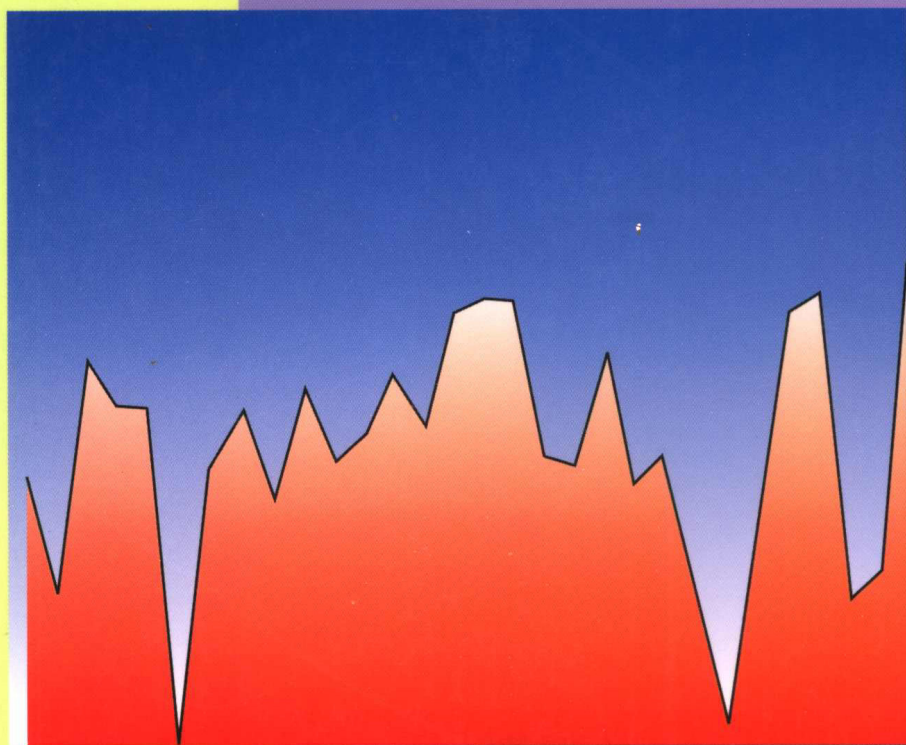


时间序列状态空间建模及其应用

任 光 张均东 著



244

C211.6/
R25

时间序列状态空间建模及其应用

任 光 张均东 著



A1026040

大连海事大学出版社

内 容 提 要

时间序列建模是轮机工程系统、控制工程系统乃至知识经济时代各种系统控制和预测的需要。时间序列建模的方法有多种,本书专门论述其中一种近年发展起来的新方法,即状态空间建模方法。该方法是经典时间序列分析方法与现代控制理论相结合的新成果。它将现代控制理论中状态空间的概念及系统论的方法应用于时间序列分析。本书从系统论的角度,利用奇异值分解理论推导出离散时间系统、连续时间系统和随机系统的时间序列状态空间建模方法,编制出实现该算法的计算机程序,并对轮机工程系统和社会经济系统做了大量的状态空间建模仿真研究。最后给出工程应用实例。

本书读者对象为相关专业的硕士、博士研究生和从事系统建模及时间序列分析的科研工作者。

图书在版编目(CIP)数据

时间序列状态空间建模及其应用/任光,张均东著. —大连:大连海事大学出版社,1999
ISBN 7-5632-1255-8

I. 时… II. ①任… ②张… III. 时间序列分析: 空间分析-数学分析-研究 IV.
0211.61

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第02768号

大连海事大学出版社出版

<http://www.dmupress.com> E-mail: cbs@dmupress.com

(大连市凌水桥 邮政编码 116026 电话 4727996)

大连海事大学印刷厂印刷

大连海事大学出版社发行

2000年6月第1版

2000年6月第1次印刷

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 10.75

字 数: 268千

印数: 001~500册

责任编辑: 史洪源

封面设计: 王 艳

定价: 16.00 元

前 言

众所周知，当今世界正朝着知识经济时代的方向发展。在知识经济时代的人类社会中，人们都期望能够对各种系统，包括工程系统和社会经济系统，进行预测和控制，这样才能使这些系统工作在最佳状态。这样的优化系统，不仅所消耗的能量最少，取得的效益最大，而且还有利于人类生活环境保护。要达到此目标，首先要解决的问题是建立这些系统的数学模型。因为有了系统的较精确数学模型才能对该系统在计算机上进行数字仿真研究，以期达到对系统进行预测和控制的目的。本书介绍一种建立系统数学模型的新方法，即时间序列状态空间建模方法。

时间序列研究的历史比现代控制理论研究的历史要长。传统的时间序列研究是以概率论、数理统计和频谱分析等数学方法为工具，并多用于社会经济系统、天气预报和地矿勘探等多种领域。有关这方面的著作已经出版了多部。这些著作大多是介绍如何将时间序列数据进行线性回归，建立自回归滑动平均模型，即建立时间序列的 ARMA 模型。除此之外，还有将时间序列数据进行聚类分析等等。但是，用状态空间的方法建立时间序列状态空间模型方面的书籍至今国内还没有出版。然而，时间序列状态空间建模方法在西方发达国家已经得到了较深入的研究，有关专著也已经出版了几部。但是，该方法还没有引起我国学者的足够重视。正是在这种情况下，在国家自然科学基金、国家教委优秀年轻教师基金和辽宁省自然科学基金的资助下，基于这些项目的科研成果和博士研究生的研究工作写成本书。

科学史证明，从不同的学科领域研究某一问题往往容易出成果，因为当人们从不同角度、不同假设条件和知识背景出发共同研究这一问题时，一定会有新的结果。同时，人们还可以将不同领域出现的新技术引入到这一问题的研究中。将现代控制理论的状态空间技术引入到时间序列分析中就形成了一种新的方法称为时间序列状态空间建模方法。本书的目的之一在于将这种新方法引入到我国。

本书论述的方法可应用于工程控制系统、轮机工程系统和社会经济系统等多种系统的建模。

书中有不当之处，敬请读者指教。

作 者

1999 年 12 月于大连海事大学

目 录

第一章 引言	1
1.1 课题的提出	1
1.2 时间序列研究现状与研究方法	2
1.3 本书建模的主要方法	4
1.4 主要研究成果	6
1.5 与轮机工程的关系	6
1.6 本书结构	7
第二章 离散系统的数学描述	8
2.1 离散系统的数学描述	8
2.1.1 定常离散系统的一般数学描述	8
2.1.2 输入信号集 U 的扩展	9
2.1.3 状态等价、系统间状态等价和系统等价	11
2.1.4 系统的可达性	14
2.1.5 等价阶次、等价分区和状态集	16
2.2 实现问题与自由解	18
2.2.1 α 的最简自由实现	18
2.2.2 最简实现的状态集	21
第三章 线性时不变系统的实现与建模	22
3.1 线性时不变离散系统的状态空间模型	22
3.2 线性时不变离散系统的性质	25
3.3 输入序列的运算法则与应用	29
3.4 状态空间的建立	31
3.5 状态空间模型中空间映射的确立	31
3.6 全状态矢量与状态空间的选取	35
3.7 响应函数的状态空间模型的建立	37
3.8 映射与映射相关矩阵	38
3.9 根据脉冲响应建立状态空间模型的应用例子	42
第四章 线性时不变系统的数学建模算法	45
4.1 矩阵变换与空间映射之间的关系	45
4.2 系统矩阵的一般算法	57
4.3 系统矩阵的算法和系统的一些特性	67
4.3.1 一般的状态空间模型	67
4.3.2 平衡状态空间模型	73
4.4 正交奇异值分解算法的模型降阶处理	77
4.5 正交奇异值分解算法求状态空间模型的应用例子	79
第五章 线性连续系统的建模算法	81
5.1 连续系统的实现	81
5.2 传递函数的最小实现	85
5.2.1 离散情况	85
5.2.2 连续情况	86

第六章 线性系统的部分实现	88
6.1 线性系统完整重组的最小 Hankel 矩阵	88
6.2 单输入单输出线性系统的部分实现	90
6.3 多输入多输出线性系统的部分实现	96
第七章 随机时间序列的状态空间建模	102
7.1 随机时间序列的状态空间建模	102
7.2 另一随机时间序列的状态空间建模	112
第八章 随机时间序列的状态矢量估计	117
8.1 随机时间序列的预测滤波器	117
8.2 状态预测滤波器的实际求解方法	125
8.3 另一种随机时间序列的预测滤波器	128
8.4 时间序列的估计滤波器	134
8.5 时间序列的 Kalman 滤波器的应用实例	135
8.6 时间序列的预测方程	137
8.6.1 样本外推预测	137
8.6.2 状态空间模型向 ARMA 预测模型的转化	138
8.7 因果可逆性与新信息	139
第九章 连续随机系统的实现	141
第十章 在轮机工程中的应用	144
10.1 单容储液柜	144
10.2 多容储液柜	146
10.3 主柴油机的模型建立	147
10.4 冷却水系统的模型建立	153
10.5 平稳随机过程的状态空间建模	154
10.5.1 平稳随机过程的仿真建模实例	154
10.5.2 平稳随机过程的建模应用实例	157
结束语	161
参考文献	162

第一章 引 言

1.1 课题的提出

在工程、经济和日常生活等各种领域中,经常可以测取一系列等时间间隔的数据。一般,对过去和现有状态的分析以及未来情况的预测都是在分析已测取的数据序列的基础上进行的,如何根据已测取的等时间间隔的数据序列进行分析和预测,建立相应的数学模型是本书所要研究的内容。

所谓时间序列^[3]就是指等时间间隔内取得的不间断的一系列数据,可以小到生活琐事,如一天内的体温变化、情绪波动规律等,也可以大到国家、世界大事,如世界的森林面积的变化、地球的空气污染的变化情况等,像人口出生率、股市行情变化和国民生产总值的变化等都是属于时间序列的研究范畴,这些项目在等时间间隔内所观测得到的一系列数据就是时间序列。对时间序列的研究就是通过分析在过去数据序列中所包含的信息,找出其中所蕴含的变化规律,建立数学模型,再根据模型用于分析、预测和控制。时间序列的研究具有非常重要的意义,在经济、工程和其他各种领域中到处都存在着需要进一步研究的时间序列,例如国家或地方的经济分析、股市行情分析、其他各种大大小小的发展和预测分析等都属于时间序列分析的范畴,对许多问题的研究和解决也就是要研究清楚有关时间序列的发展规律,实现准确的估计、预测和控制^[58]。在工程领域中,也是如此,尤其是在可以获得许多观测数据,而产生这些观测数据的内在数学模型或物理机制很难弄清或者是在不想研究内在物理机制而只想知道其外在的输入与输出关系时,采用本书所提出的方法来进行研究更具有独特的作用。

时间序列的研究自古以来就在不断地进行,人类对事物发展的认识过程也就是对时间序列不断深入研究的过程,从广义上说,人类所掌握的各种知识也可以说是对各种时间序列的研究所获得的成果,因为生活中到处都是时间序列。根据同时所研究的时间序列数目的不同又分为单维时间序列和多维时间序列。所谓单维时间序列是指只有单个输出量的时间序列,也称为标量时间序列,例如人的体温变化曲线只对体温这一个量进行研究,因此是一个单维时间序列,而多维时间序列^[53]在待研究的时间序列中同时包含两个或两个以上量的情况,例如在分析一个公司的股票涨跌与生产利润之间的关系时,就要同时获取股票与生产利润的时间序列,合成一个二维的时间序列进行研究。根据影响所研究时间序列的噪声特征又可分为确定性时间序列和随机性时间序列。尽管人类对时间序列的研究已有非常悠久的历史,但是由于研究方法和数学工具的限制,只对低维尤其是单维的时间序列研究比较成熟,相关理论比较完善,对于随机时间序列和多维或高维时间序列,一直没能采用有效的方法进行研究,这是因为传统的研究^[37]是以传递函数、微分方程和谱密度^[54]的方法来进行研究的,由于微分方程和传递函数本身的局限性,从而决定了它非常适宜于单维非随机时间序列的研究,对于

随机时间序列, 多维或巨维时间序列它就变得很复杂, 甚至束手无策了。

本书作者为了解决研究随机时间序列, 多维或巨维时间序列时所存在的问题, 统一单维和多维时间序列之间的研究方法, 在辽宁省自然科学基金(95159)立项支持的情况下, 对有关的内容进行了多年的研究, 形成了比较系统的时间序列建模理论, 提供了多种适用于单维和多维时间序列的实用算法, 并对算法进行了实践和仿真, 说明具有较高的准确性。

1.2 时间序列的研究现状与研究方法

近 20 年来, 时间序列在理论与应用两个方面都得到了蓬勃发展, 在工程技术、气象、水文、地震、生物医学等许多领域得到了广泛的应用。国内多所大学在本科、研究生和博士生课程中已开设了有关时间序列的分析与应用课程。然而, 当前以研究动态数据为特征的时间序列建模理论, 还一直局限于传统的研究方法中。有关时间序列的状态空间研究在国内一直没有发现。从国外杂志发表的论文来看, 有关时间序列研究热点主要集中在神经网络的非线性时间序列^[88]和行为法^[77-80]线性系统数学建模上。采用神经网络解决非线性时间序列建模与预测问题在现在是一种比较理想的方法, 近来 Sauer 和 Casdagli 发展一种称为 Embedology 的理论^[87], 把待研究的时间序列嵌入到高维空间中以产生神经网络中的吸引子以解决传统建模和预测的不准确性和混沌问题, 使随机时间序列的预测理论得到了进一步的发展。行为法 (Behavioral Approach) 线性系统数学建模主要用在确定性系统中, 是一种把输入和输出集看作一个空间, 输入输出之间的函数关系看作空间映射和变换的一种精度较高的数学建模方法。J.C.Willems 博士对这种方法的数学建模有一系列的文章^{[77]-[80]}, 其数学基础理论可参见 A.C.Autoualias 的文章^{[82]-[83]}。行为法对确定性时间序列的高精度建模也做出了自己的独特贡献。

目前对于随机时间序列主要采用谱密度^[58]法进行研究。谱密度法的最早应用发现于我国古代的音乐作曲中, 17 世纪英国的牛顿用三棱镜分解太阳光时也采用了谱的原理^[68]。1882 年法国傅里叶工程师总结出了傅里叶级数, 形成了谐波分析法^[72]。1898 年 S.A.Schuster 提出周期图法, 形成了经典谱分析法。1927 年英国统计学家 Yule 首次用线性回归分析法建立了时间序列的数学模型。1931 年 N.Wiener 打下统计分析的基础, 与辛钦一起证明了自相关函数与功率谱密度之间关系的维纳-辛钦定理, 成为现代谱分析的先驱^[98]。1947 年 Levinson 提出了一种快速算法推动了线性回归模型在实际中的应用。1950 年 J.Jukey 通过计算所采集的有限长时间序列的自相关函数得出谱估计方法, 奠定了谱分析的实验基础, 成为实验谱分析的先驱^[98]。1967 年 Burg 提出了最大熵谱估计进行了高分辨谱估计的时代^[90]。现在有关随机时间序列的处理与分析多采用谱密度法进行。1987 年日本的 Masanao Aoki^[3]出版了有关状态空间建模的专著 *State Space Modelling of Time Series*, 开始了时间序列状态空间分析的新纪元, 但是有关篇幅很少, 缺乏系统的理论性。本书从离散系统出发, 从空间映射的角度系统地论述了整个建模过程, 形成了比较完整和系统的确定性和随机时间序列的状态空间建模理论, 归纳出了多种有效的算法, 得出许多自己的结论, 有的已在本书中归结为定理, 如定理 4.3 和 4.4。

本书主要借用现代控制理论的方法来研究时间序列, 现代控制理论采用引入辅助变量作

为系统状态的方法来建立反应系统输入输出特性的状态空间模型, 它既可以用来描述单输入输出的系统, 也可以非常方便地用于多维输入输出的系统。其描述系统输入输出特性的数学模型具有如下的特征或形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.1)$$

式(1.1)的数学模型是现代控制理论的出发点, 其中状态 x 、输出 y 和输入 u 都为列向量, A 、 B 、 C 和 D 都为相应维数的矩阵。现代控制理论围绕着数学模型(1.1)发展出了一系列的新概念与新理论。时间序列研究数据随时间的变化规律, 因此可以借鉴已经相当成熟的现代控制理论^[45]的一些理论与方法来进行研究。本书将证明采用现代控制理论的方法来研究时间序列不仅可以简化单维确定或随机时间序列的研究, 而且可以非常有效地研究多维确定或随机时间序列。

因为现代控制理论观察动态现象的角度有所不同, 并用不同的方法来表示相同的动态现象以及特别注意状态矢量 x 中各元素间的相互关系, 所以现代控制理论可以为多维时间序列引入许多非常重要的概念^[3], 例如可达性、可观测性和最小维实现。这些概念在时间序列的传统研究中是没有的。这些概念在建立最小化时间序列的状态空间模型和在检验各种等价算法的鲁棒性时起到非常关键性的作用, 为更加准确地研究多维复杂的时间序列提供了可靠的前提条件。

对于多维随机时间序列只要在保证方差平稳的条件下, 即在保证时间序列的第一阶和第二阶的统计量始终存在并且不随时间变化的情况下, 则可根据时间序列的观测值采用计算机迅速建立多维随机时间序列的状态空间模型, 然后采用现代控制的相关理论即可进行各种分析、比较、预计和控制。研究随机时间序列的假设条件在实际应用中是很容易满足的。即使在上述假设条件不满足的情况下有时也还可通过一些数据的预处理使之满足。

经过多年来的实践表明: 在处理矢量化即多维数据时, 现代控制理论是十分简单有效的。因此用现代控制理论来研究时间序列的问题是非常合适的, 必然会给时间序列的研究带来新的生机, 并开拓新的广阔前景。

由现代控制理论提供的一些新的研究和分析问题的方法为多维时间序列的深入研究提供了手段。例如时间序列的现代控制理论研究方法选用了 Hankel 矩阵来统一预测、时间序列的简化模型表示、系统的等价检验和等价条件等问题, 采用 Hankel 矩阵的奇异值分解及对矢量化的时间序列作适当的降价处理来生成平衡状态空间模型。与过去的传递函数法、谱密度法、最大似然法等有很大的不同, 所需的计算工作量也大大减轻, 而且算法非常容易实现, 运行速度也非常快, 且在满足某些条件下可保证生成渐近稳定的模型, 尤其是在生成数据的动态因素不多的情况下产生的模型可具有很好的预测特性。此外, 现代控制理论的方法还可与传统的方法相互结合, 相互补充。例如可用现代控制理论的方法产生一个初始估计, 然后再用最大似然法进行改进。

由上可见, 现代控制理论已为古老的时间序列的研究带来巨大的生机和新的活力。这主要归功于用现代控制理论的新方法、新思路来解决时间序列这个旧问题的结果。利用现代控制理论来解决时间序列的资料和书籍现在还非常少见, 但是由于现代控制理论对时间序列研

研究的巨大作用,我相信在现代控制理论中所阐述的方法和思路及其因此而得到的对时间序列新的理解对于轮机工程、经济学^[88]、统计学、生物学、医学和社会学等都将会深远的意义。

1.3 本书建模的主要方法

对于确定性系统,主要研究严格正则的线性定常离散系统,其状态空间模型为

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \\ y_t = Cx_t \end{cases} \quad (1.2)$$

根据线性空间的映射与映射相关矩阵之间的关系,利用脉冲响应 Hankel^[8]矩阵 H_N 和脉冲响应转移 Hankel 矩阵 H_N^σ 推导出下列系统矩阵 A 、 B 和 C 的空间映射算法^[18]。

选取 Hankel 矩阵 H_N 最大线性无关列组,设为 $\{h_N^1, h_N^2, \dots, h_N^n\}$, $h_N^j, j=1, 2, \dots, n$ 为 Hankel 矩阵 H_N 中任选的线性无关列,从而 Hankel 矩阵 H_N 中的任一列 $h_N^i \in X_\alpha, i=1, 2, \dots, rN$ 都可惟一地表示为

$$h_N^i = \sum_{j=1}^n \lambda_j h_N^j \quad (1.3)$$

用 $[h_N^i], i=1, 2, \dots, rN$ 来表示 Hankel 矩阵 H_N 中的列 h_N^i 对应于最大线性无关列组

$$\{h_N^1, h_N^2, \dots, h_N^n\} \text{ 的坐标矢量, 即有 } [h_N^i] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$h_N^i = \sum_{j=1}^n \lambda_j h_N^j = \begin{bmatrix} h_N^1 & h_N^2 & \dots & h_N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_N^1 & h_N^2 & \dots & h_N^n \end{bmatrix} [h_N^i] \quad (1.4)$$

令 $h_{\sigma N}^j, j=1, 2, \dots, n$ 为在 H_N^σ 中与列 h_N^j 在 H_N 中位置相同的列。

$$A = [[\langle h_{\sigma N}^1 \rangle] \quad [\langle h_{\sigma N}^2 \rangle] \quad \dots \quad [\langle h_{\sigma N}^n \rangle]], \quad \dim A = n \times n \quad (1.5)$$

$$B = [[\langle e_1 \rangle] \quad [\langle e_2 \rangle] \quad \dots \quad [\langle e_r \rangle]], \quad \dim B = n \times r \quad (1.6)$$

$$C = I_{mN}^m [h_N^1 \quad h_N^2 \quad \dots \quad h_N^n], \quad \dim C = m \times n \quad (1.7)$$

对上述算法进一步细化,可得初等变换算法和正交奇异值分解等算法。

对于其他类型的系统采用与上述离散系统相似的方法,求得类似的 Hankel 矩阵,再算出相应的系统矩阵。对于离散随机状态空间模型系统矩阵求解也采用相同的算法理论,利用协方差 Hankel 矩阵和协方差转移 Hankel 矩阵可分别求得下列两种典型随机状态空间模型的系统矩阵和噪声协方差矩阵

典型随机模型^[53]—

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Be_t \\ y_t = Cx_t + e_t \end{cases} \quad (1.8)$$

典型随机模型^[3]二

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + u_t \\ y_t = Cx_t + v_t \end{cases} \quad (1.9)$$

下面给出单维时间序列的实例

例 1.1: 单输入单输出线性时不变系统的单位阶跃响应是一个时间序列。例如下表中的数据是一个时间序列，其相应的变化曲线如图 1.1 所示。

表 1.1 SISO 系统的单位脉冲响应数据表

步长	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数据	0	1	-1	-7	-9	17	79	73	-249	-863	-481

其相应的变化曲线如下图 1.1 所示

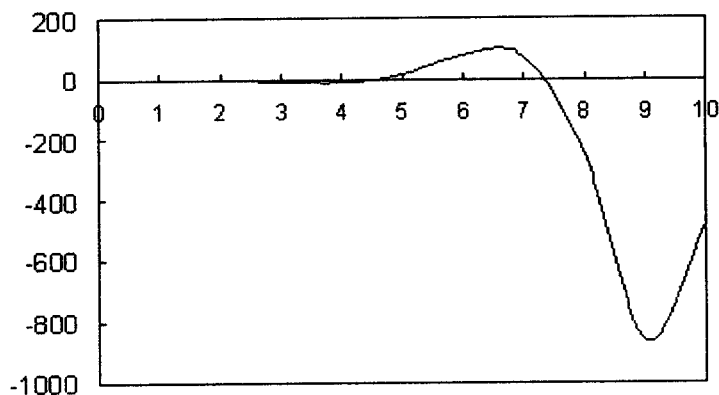


图 1.1 SISO 系统的单位脉冲响应数据曲线图

例 1.2: 如 1952 年到 1995 年辽宁省的农业总生产总值(单位: 万元)就可以组成一个随机时间序列，其时间序列的数据表为如下所示。

表 1.2 辽宁省农业总生产总值(万元)数据表

1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
16.6	16.9	18.8	19.4	22.1	21.2	21.2	24.6	19.2
1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
19.6	21.2	21.8	22.6	26.5	29.4	29.3	30.4	30
1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
37.7	35.5	33	40.3	43.9	48.3	47.4	46.6	49.2

续表 1.2 辽宁省农业总生产值(万元)数据表

1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
59.9	73.5	78.6	85.4	106.5	117.6	118.1	142	169.2
1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	
227.4	222.8	273.8	302.3	340.7	442.7	602.1	761.8	

根据上述表格 1.2 中的数据, 可以画出如下的变化曲线, 如下图 1.2 所示。

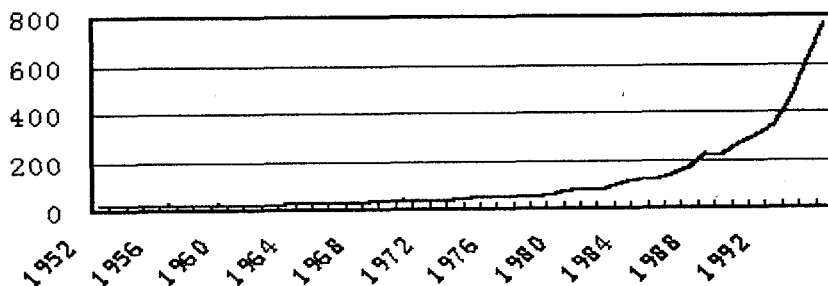


图 1.2 辽宁省的农业总生产值(单位: 万元)数据变化分析图

1.4 主要研究成果

本书在如下 5 个方面取得了一些自己的成果。

1. 在确定性的线性定常离散系统方面, 做了大量的理论工作, 大大扩充和完善了有关响应函数的实现理论, 推出了多个定理和多套建模算法。这些算法具有很高的精度与稳定性^[9]。
2. 推出了新的平稳随机过程的建模算法, 可以迅速建立最简的随机平衡模型, 并十分易于模型降价^[20]。
3. 针对 SISO 和 MIMO 系统的部分实现写出了完整的算法与相关理论^[62]。
4. 对有关随机控制的时间序列建模理论做了完善, 系统化。
5. 应用本书提出的算法编制了 VC5.0 软件包, 并应用于轮机工程中的多种典型设备^[62]中, 理论与仿真结果具有高度的一致性, 无论是多维随机仿真还是实际时间序列中的应用都表明本书算法具有很高的精度和稳定性。

1.5 与轮机工程的关系

时间序列的研究与轮机工程有着密切的关系, 在轮机工程中^[7], 同样到处存在着急待研究的时间序列, 例如零件损坏曲线, 主机排烟温度变化与供油量之间的关系等都可采用时间序列的方法来研究。对时间序列的掌握和不断深入, 可为轮机工程的发展带来新的面貌。另外对于通过物理特性推导数学模型有很大误差的系统或很难建立物理关系的系统, 也可采用时间序列的方法建立数学模型。在不需要知道系统的物理过程, 只想知道输入输出特性相同的数学模型时采用时间序列的研究方法也是非常适宜的。这些情况在轮机工程问题中经常遇

到, 例如对故障预报和系统特性分析等。

1.6 本书结构

本书从基础到理论逐步深化, 对确定性系统和随机系统的时间序列状态空间建模进行了系统全面的阐述, 并对连续系统和时变系统进行了直接的应用。其中, 第二、三章介绍了离散系统的数学理论和响应函数的最小实现, 提出了空间映射算法, 在第四章中进一步分析空间映射算法, 由初等变换与空间基变换之间的关系求得初等变换算法, 并应用奇异值分解理论得出奇异值分解算法, 以便迅速建立平衡状态空间模型。平衡状态空间模型非常适用于模型降价的需要。根据实际中观测数据可能不足的情况, 第五章给出了只有部分量测数据时的状态空间建模方法。在第六章中论述了如何根据样本值采用奇异值分解算法建立平稳随机过程的状态空间模型的有关理论, 分别给出了两种常用随机模型的建模算法。在第七章中对随机状态空间的数学建模进行了讨论, 给出了两种常用随机状态空间模型的状态空间建模算法, 在第八章中采用奇异值分解算法给出了随机系统的状态估计算法。在第九章中讨论了连续随机过程的状态空间建模算法。在本书的最后一章对轮机工程中一些典型或重要的设备和实际时间序列进行了数学建模仿真与实际应用。

总之, 本书从基础到应用论述全面, 理论也比较完善, 在多方面有自己的研究结果与结论。

第二章 离散系统的数学描述

【本章摘要】主要介绍线性时不变离散系统状态空间模型的数学描述、特性与响应函数的自由实现问题。利用输入序列的概念，对系统的可达性和可观测性进行了重新的描述，并提出了系统的不同描述形式及相互间的等价转换关系。定义了系统中的状态等价、系统间的状态等价和系统等价概念，利用系统中的状态等价关系给出了响应函数的最简自由实现。

2.1 离散系统的数学描述

2.1.1 定常离散系统的一般数学描述

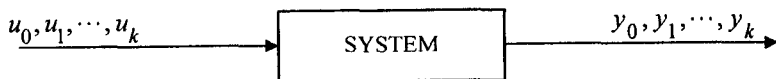


图 2.1 一般的离散系统

设有一个线性时不变的离散系统，其输入输出的关系如图 2.1 所示，当输入信号依次为一个时间序列 $u_0, u_1, \dots, u_k$ 时，则输出序列依次为 $y_0, y_1, \dots, y_k$ 。其中，初始输出 y_0 不必精确定义，因此，输入序列 $u_0, u_1, \dots, u_k$ 相应的响应序列更恰当说应为 $y_1, y_2, \dots, y_k$ 。设输入信号的允许范围为 U ，则有 $u_i \in U$ ， $i = 0, 1, 2, \dots$ ；输出信号范围为 Y ，则有 $y_i \in Y$ ， $i = 0, 1, 2, \dots$ 。设系统在时刻 k 的内部状态为 x_k ，如果在该时刻 k 给系统施加的输入信号记为 u_k ，则系统的内部状态会从原来的状态 x_k 转移到某一新的状态，记为 x_{k+1} 。假设系统的各个内部状态也都位于一个称为状态集的集合中，记为 X ，则有 $x_i \in X$ ， $i = 0, 1, 2, \dots$ 。由映射规律可知，上述的状态转移与输入信号的关系即为一个从集合 $X \times U$ 到集合 X 的映射，有

$$f: X \times U \rightarrow X, \quad x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (2.1)$$

对于某一个输入 u_k ，系统的响应一般取决于系统当时所处的状态和该输入的大小。从而，系统的输出函数即为一个从 $X \times U$ 到 Y 的映射，有

$$g: X \times U \rightarrow Y, \quad y_k = g(x_k, u_k) \quad (2.2)$$

式(2.2)表明，系统的输出不仅与系统所处的状态有关，而且还与输入的大小有关。系统的输出既与状态有关又与输入有关的系统在此称为状态转移输出形式的系统。

系统的输出也有可能只与状态有关，而与输入没有直接的关系，用系统的内部状态即可描述出系统的输出。这时的输出函数为一个从 X 到 Y 的映射，有

$$h: X \rightarrow Y, \quad y_k \rightarrow h(x_k) \quad (2.3)$$

输出函数具有式(2.3)形式的系统称为状态输出形式的系统。在状态输出形式的系统中，

系统的输出只与状态相关,而与输入没有直接的关系。

由上述内容可以看出:不管是状态转移输出形式的系统还是状态输出形式的系统都可用状态集 X , 输入集 U , 输出集 Y , 状态转移函数 f 和输出函数(g 或 h)五个元素进行完全描述。在有些情况下,要完全描述系统还需要知道系统的初始状态 $x_0 = x_l$ 。概括如下:

定义 2.1: 离散的动态系统可描述为

$$S = (X, U, Y, f, g, x_0) \quad (2.4)$$

或描述为

$$S = (X, U, Y, f, h, x_0) \quad (2.5)$$

其中 X 为内部状态集, U 为输入信号集, Y 为输出信号集。 f 为状态转移函数, $f: X \times U \rightarrow X$; g 为输出函数, $g: X \times U \rightarrow Y$; h 为输出函数, $h: X \rightarrow Y$; x_0 为初始状态, $x_0 \in X$ 。

注意: 系统初始时刻的输出 y_0 一般不需明确定义,因为这一时刻的输出 $y_0 = g(\bullet, \bullet)$ 与系统如何进入状态 x_0 有关。

在上述离散系统的动态描述中,输出函数用 h 来描述的系统称为状态输出形式的系统,输出函数用 g 来描述的系统称为状态转移输出形式的系统。

2.1.2 输入信号集 U 的扩展

当系统的初始状态为 x_0 时,对于输入信号序列 $u_0, u_1, \dots, u_k$, 则系统的新状态 x_{k+1} 可如下迭代求得

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) = f(f(x_{k-1}, u_{k-1}), u_k) = \dots \\ &= f(f(\dots(f(x_0, u_0), u_1), \dots, u_{k-1}), u_k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

如令

$$f(x_0, u_0 u_1 \dots u_k) = f(f(\dots(f(x_0, u_0), u_1), \dots, u_{k-1}), u_k) \quad (2.7)$$

则函数 f 的定义域可由原来的 $X \times U$ 扩展为 $X \times U^*$, U^* 是输入信号的所有有限序列 $\omega = u_0, u_1, \dots, u_p, 0 \leq p < \infty$ 的集合,有

$$U^* = \{\omega = u_0 u_1 \dots u_p, \mid u_i \in U, 0 \leq p < \infty\} \quad (2.8)$$

状态转移函数 f 对于新定义域 $X \times U^*$ 可改写为

$$f: X \times U^* \rightarrow X; \quad x_{k+1} = f(x_0, u_0 u_1 \dots u_k) \quad (2.9)$$

由 U^* 的定义可知:在 U^* 中包含有长度为零的空序列 $\Lambda = \{\}$, 即 $\Lambda \in U^*$ 。对于空序列 Λ , 下列关系应成立

$$\begin{cases} x_k = f(x_k, \Lambda) \\ y_k = g(x_k, \Lambda) \end{cases}$$

为了叙述方便,对于输入信号序列需要定义一个序列连接操作符,记为“*”。设有任意的两个输入序列 $\omega = u_0, u_1, \dots, u_{p1}$ 和 $\omega' = u'_0, u'_1, \dots, u'_{p2}$, 则有

$$\omega * \omega' = (u_0, u_1, \dots, u_{p1}) * (u'_0, u'_1, \dots, u'_{p2}) = u_0, u_1, \dots, u_{p1}, u'_0, u'_1, \dots, u'_{p2} = \omega \omega' \quad (2.10)$$

可以看出 U^* 是一个具有单位元的半群^[97], 空序列 Λ 是其单位序列, 有

$$\Lambda \omega = \omega \Lambda = \omega$$

在定义了空序列 Λ 以后, 状态转移函数 f 一定具有如下的性质

$$f(x, \Lambda) = x \quad (2.11)$$

由式(2.10)可知

$$f(x, \omega \omega') = f(f(x, \omega), \omega') \quad (2.12)$$

输出函数的定义域同样也可扩展为 $X \times U^*$, 有

$$g: X \times U^* \rightarrow Y; \quad y_k = g(x_0, u_0 u_1 \dots u_k) \quad (2.13)$$

因为

$$\begin{aligned} y_k &= g(x_k, u_k) = g(f(\dots(f(x_0, u_0), u_1), \dots), u_{k-1}), u_k) \\ &= g(f(x_0, u_0 u_1 \dots u_{k-1}), u_k) = g(x_0, u_0 u_1 \dots u_k) \end{aligned}$$

对于输入序列 $\omega * u$, 上式可简写为

$$g(x, \omega u) = g(f(x, \omega), u), \quad \omega \in U^*, \quad u \in U \quad (2.14)$$

注意: $y_0 = g(x, \Lambda)$ 一般都不需要明确定义。

由上述分析可知: 当且仅当输出函数 $g: X \times U^* \rightarrow Y$ 能写成 $g(x, \omega) = h(f(x, \omega))$ 的形式时, 即当且仅当对于某一映射 $h: X \rightarrow Y$ 在图 2.2 中的转换成立时, 这时的系统形式可转换为状态输出形式。

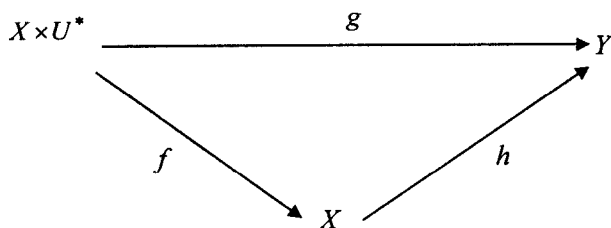


图 2.2 状态输出形式表示的系统输出函数

经常遇到系统 $S = (X, U, Y, f, g, x_0)$ 的初始状态不指定或为任意的情况, 这时的系统常表示为 $S = (X, U, Y, f, g, \bullet)$ 或 $S = (X, U, Y, f, g)$ 。

假设 x_i 为系统中的一个状态, 如果系统是以状态转移输出的形式表示的, 即系统为 $S = (X, U, Y, f, g)$, 则对应这个状态 x_i 可定义该系统响应函数 M_{x_i} 为

$$M_{x_i}: U^* \rightarrow Y; \quad M_{x_i}(\omega u) = g(f(x_i, \omega), u) \quad (2.15)$$

如果系统是以状态输出的形式表示, 即系统为 $S = (X, U, Y, f, h)$, 则该系统响应函数可相应定义为

$$M_{x_i}: U^* \rightarrow Y; \quad M_{x_i}(\omega) = h(f(x_i, \omega)) \quad (2.16)$$

注意: $y_0 = M_{x_i}(A)$ 只有在系统以状态输出的形式表示时才有明确定义。另外, 响应函数的值域是 Y , 而不是 Y^* , 即只考虑单输出的情况, 并不把输出作为序列来研究。

2.1.3 状态等价、系统间状态等价和系统等价

设 x_1, x_2 为系统 S 内的两个状态, 在同一个系统内的状态等价关系定义为

定义 2.2: 如果 $M_{x_1} = M_{x_2}$, 则状态 x_1 与 x_2 等价。

由定义 2.2 可知状态 x_1 与 x_2 等价的含义是: 无论系统的初始状态是 x_1 还是 x_2 , 只要输入序列 ω 相同, 它们的响应就相同。因为输入序列 $\omega \in U^*$ 的长度可以任意长, 所以当状态 x_1 与 x_2 等价时, 如果输入序列 ω 相同, 则它们的输出序列也相同。

定义 2.2 定义是系统中的状态等价概念, 那么不同的系统间的状态等价是如何定义的呢? 在要判断状态是否等价的两个系统的输入集和输出集都相同的情况下, 上述系统中的状态等价定义可非常容易地扩展到不同系统间的状态等价定义中。可得系统间的状态等价定义如下:

定义 2.3: 设有两个不同的系统 S_1 和 S_2 , 它们的输入集、输出集和系统形式都相同, 其中 x_1 为系统 S_1 中的状态, x_2 为系统 S_2 中的状态, 如果 $M_{x_1} = M_{x_2}$, 则状态 x_1 与 x_2 为系统间状态等价。状态等价可记为 $x_1 \sim x_2$ 。

有时两个系统的表述形式可能不相同, 例如系统 $S_1 = (X, U, Y, f_1, g_1)$ 为转移输出形式而系统 S_2 为状态输出形式, 即 $S_2 = (X, U, Y, f_2, h_2)$, 这时由于系统 S_1 的输出函数对空序列没有明确定义而系统 S_2 的输出函数对空序列有明确定义, 因此当 x_1 为系统 S_1 的状态, x_2 为系统 S_2 的状态时, 等式 $M_{x_1} = M_{x_2}$ 不可能成立。那么, 当两个系统的表述形式不相同, 系统间的状态等价应如何判断呢? 这时的系统间状态等价判据可规定如下:

如果对于所有的输入序列 $\omega \neq A$, 等式 $M_{x_1} = M_{x_2}$ 都成立, 则即可认为这两个系统的响应函数是相同的, 从而可得出不同系统形式的系统间状态等价判据。

定义 2.4: 设有两个不同的系统 S_1 和 S_2 , 它们的输入集和输出集相同, 但系统形式不相同, 其中 x_1 为系统 S_1 中的状态, x_2 为系统 S_2 中的状态, 如果对于所有的输入序列 $\omega \neq A$, 都有 $M_{x_1} = M_{x_2}$, 则状态 x_1 与 x_2 为系统间状态等价, 即 $x_1 \sim x_2$ 。

以上定义了系统中和系统间的状态等价概念, 下面定义系统等价的概念。

定义 2.5: 设有两个系统 S_1 和 S_2 , 它们的输入集和输出集都相同, 如果系统 S_1 中的任何一个状态 x_1 都能在系统 S_2 中找到一个状态 x_2 与之状态等价, 则称这两个系统 S_1 和 S_2 是等价