

胡庆平

BCI

—代数

● 陕西科学技术出版社

BCI—代数

胡庆平 著

陕西科学技术出版社出版发行

(西安北大街 131 号)

新华书店经销 西安永新印刷厂印刷

850 × 1168 毫米 32 开本 15.5 印张 35.3 万字

1987 年 8 月第 1 版 1987 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1—2,600

统一书号: 13202 · 94 定价: 4.60 元

序 言

1983年底作者编写了一本讲义《BCI-代数》，1984年上半年作者为西北大学数学系四年级数学专业的学生开设了这门选修课《BCI-代数》。本书是在这本讲义及实际教学工作的基础上修改、增补而成的。

BCK-代数和BCI-代数是六十年代以来出现的一般代数学中的一个新的分支。自K·Iseki等在1966年引入这两类代数以来，虽然只有十八年的历史，但是发展却相当快。至今，从国际上看，已有日本、波兰、捷克、美国、苏丹、印度、巴基斯坦、斯里兰卡、澳大利亚、利比亚和中国等国的一百多位数学工作者投入这一方面的工作。取得了大量的成果，已发表论文数百篇。

我国国内的数学工作者基本上从1980年以后投入这一方面工作。目前，已有山西大学、宁夏大学、山东曲阜师院、陕西师范大学、汉中师范学院和西北大学等单位的几十位数学工作者参加这一方面的工作，并且已写出和发表论文几十篇。1983年4月在西安还召开了国内第一次BCK-代数和BCI-代数会议，参加会议的有二十八人，宣读论文多篇。

现在，BCK-代数和BCI-代数理论正在蓬勃发展。这一代数理论还涉及和联系到许多数学分支，如泛代数、群论、环论、格论、点集拓扑和拓扑代数等。

正是在这种形势下，作者在西北大学数学系首先给八〇级学生开设了《BCI-代数》这门选修课，吸收一批有志和对此有兴趣

趣的青年学生积极投入这一方面的工作。在开设这门选修课时，每周四学时，一学期用了七十二学时，基本上讲完了本书的大部分内容，并且对一部分学生进行了科研训练。该级十一名学生写出了十四篇毕业论文，得到了一批较好的结果。

现在，在国内外同行、西北大学数学系的领导和同志们以及出版社同志的大力帮助和支持下，这本书正式出版了。应当说，这本书是国内外同行们在BCI-代数理论方面的一个总结，尤其是中国数学工作者在这一理论研究工作的总结，当然也是西北大学数学系从事这一理论研究的师生们的工作总结。由于本书是BCI-理论方面国内外的第一本专著，由于作者水平有限和编写时间仓促，本书难免有不少缺陷和错误，承望读者提出批评指正。

对作者在BCI-代数理论研究、教学和编写本书予以支持和帮助过的日本鸣门教育大学K. Iséki教授、北京大学数学系段学复教授、山西大学数学系张宝林副教授、陕西师范大学数学系雷天德副教授、王国俊教授、西北大学数学系凌岭教授、王成堂教授、胡希正副教授和王兆崎、孟杰同志，以及西北大学科研处、教务处，作者在此一并表示感谢。

胡庆平

一九八四年六月二十日于西北大学数学系

内 容 提 要

BCK-代数和BCI-代数是六十年代以来出现的一般代数学的一个分支。这一理论涉及和联系到许多数学分支,如泛代数、群论、环论、格论、布尔代数、点集拓扑和拓扑代数等。

本书是国内、外出现的第一本BCI-代数理论的专著。本书概括了1984年5月前BCI-代数的研究概貌,简介了BCK-代数理论。本书集中地总结了国内外数学工作者、尤其是中国数学工作者在BCI-代数理论的工作成果,也总结了作者自己在这一理论中的研究工作,并介绍了由作者引入的BCH-代数。

本书共分八章:准备工作,BCK-代数概要,BCI-代数的概念及性质,BCI-代数理论中的几个专题,结合BCI-代数,BCI-拓扑代数,BCH-代数,对BCK,BCI,BCH-代数理论进一步发展的一些看法。

数学工作者、大学数学系教师、研究生和高年级学生均可阅读本书。从事理论物理、理论化学和计算机科学研究的工作者和大学教师也可以本书为参考书。

目 录

序 言

第一章 准备工作	(1)
§ 1. 发展概况	(1)
§ 2. 要注意的几个问题	(5)
§ 3. 关于集合论和抽象代数的一些基本知识	(9)
§ 4. 记号	(16)
第二章 BCK-代数 概要	(19)
§ 1. BCK-代数的概念及一些基本性质	(19)
§ 2. 运算 $\wedge$ 及可换的BCK-代数	(30)
§ 3. 有界BCK-代数及运算 $\vee$	(45)
§ 4. 正、定关联的BCK-代数	(62)
§ 5. 关联的BCK-代数	(71)
§ 6. 具有条件(S)的BCK-代数	(90)
§ 7. 拟可换为BCK-代数	(104)
§ 8. BCK-代数的理想	(114)
§ 9. 商代数	(128)
§ 10. BCK-代数的积	(138)
§ 11. BCK-代数的并	(152)
§ 12. 同态	(156)
第三章 BCI-代数的概念及性质	(167)
§ 1. BCI-代数的概念	(167)

§ 2. BCI-代数的主要性质	(177)
§ 3. BCI-代数的BCK-代数化	(180)
§ 4. BCI-代数的BCK-部分	(187)
§ 5. BCI-代数的积	(195)
§ 6. 子代数	(201)
§ 7. 并代数	(211)
§ 8. BCI-代数的理想	(219)
§ 9. BCI-代数的商代数	(228)
第四章 BCI-代数理论中的几个专题	(237)
§ 1. 拟可换的BCI-代数	(237)
§ 2. BCI-代数簇问题	(252)
§ 3. 具有条件(S)的BCI-代数	(255)
§ 4. BCI-代数的根性	(266)
第五章 结合BCI-代数	(272)
§ 1. 结合BCI-代数的概念	(272)
§ 2. 结合BCI-代数的性质(I)	(279)
§ 3. 结合BCI-代数的性质(II)	(286)
§ 4. 结合BCI-代数的性质(III)	(297)
§ 5. 结合BCI-代数的性质(IV)	(303)
§ 6. 有限结合的BCI-代数	(313)
§ 7. 广义结合的BCI-代数	(319)
§ 8. 具有散子代数性质的BCI-代数	(332)
第六章 BCK和BCI-拓扑代数	(347)
§ 1. BCK和BCI-拓扑代数	(347)
§ 2. BCI-代数的拟一致结构	(353)
第七章 BCH-代数	(369)

§ 1. BCH-代数的概念	(369)
§ 2. BCH-代数的性质	(375)
§ 3. BCH-代数的BCI-化	(378)
§ 4. BCH-代数的BCI-部分	(383)
§ 5. 同态、同构和范畴	(387)
§ 6. 子代数	(393)
§ 7. 并代数	(397)
§ 8. 积代数	(402)
§ 9. 理想	(407)
§ 10. 非负的BCH-代数	(416)
§ 11. 有界的BCH-代数	(422)
§ 12. 拟可换的BCH-代数	(431)
§ 13. 具有条件(S)的BCH-代数	(438)
第八章 对BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数理论进一步 发展的一些看法	(454)
注记(统计表)	(457)
参考文献	(476)
名词索引(汉英对照)	(480)
英文摘要(ABSTRACT)	(486)

第一章 准备工作

在正式接触BCK-代数和BCI-代数理论之前,我们在本章中做一些必要的准备工作。

§ 1 发展概况

我们在这一节中介绍一下BCK-代数和BCI-代数的发展概况,重点是介绍后者。这对于读者掌握这一理论且愿意进一步在这一方面做出一些工作是十分必要的。我们分作以下几个问题进行介绍。

1. 两种代数的引入

由集合论和命题演算作为背景(参看第二章§1.以后简记为:cf.Ⅱ·1)1966年日本数学家Y.Imai和K.Iséki引入了BCK-代数(cf.[17]*).这样,对一切BCK-代数进行研究和对某些条件下的BCK-代数进行研究,就产生了BCK-代数类和BCK-代数理论。

同年,K.Iséki又引入了比BCK-代数类更大的代数类——BCI-代数类⁽¹⁸⁾,这就又产生了BCI-代数类和BCI-代数理论。由BCK-代数的定义和BCI-代数的定义不难知道:

$$\text{BCK-代数类} \subseteq \text{BCI-代数类}. \quad (1)$$

• 方括号中出现的数字系参考文献序号,下同。

这两种代数出现后不久便引起了人们的注意。但是，数学界对它的“庐山真面目”尚不清楚，连美国的Review和西德的Zent. Math. 都没有把它列入“一般代数”的类中，而列入“数理逻辑”或“格论”之中。这种现象已经历史地遗留下来了。然而，BCK-代数和BCI-代数理论如同数林中之春苗蓬勃地发展起来了。经过这十七八年的发展，这一理论已成为一般代数学中的一个新的重要分支了。

2. K. Iséki的简况

K. Iséki是日本数学家，日本名是井关清志，今年六十四岁，他在日本神户大学数学系担任教授多年，今年四月他在神户大学退休，而转到日本德岛县鸣门教育大学任教。他到过许多国家，参加过多次国际数学会议，还在波兰巴拿赫数学中心工作过。他也来过中国，和我国许多数学工作者保持着良好的关系。他还和作者一起共同研究过结合的BCI-代数，联名发表论文和作者摘要 (cf. [27—30])。他在数学中有广泛的兴趣，在许多分支中都作出过重要的工作。发表过大量的论文。据作者所知，他的主要工作有：

在集合论方面，他在1949年把Kuratowski的四条闭包公理

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \subseteq \overline{A}$$

$$\overline{\phi} = \phi$$

中的前三条合并为(cf. [2])

$$A \cup \overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A \cup B}$$

在点集拓扑中，他作过许多工作。例如，1957年他和Kasahara一起得到了这样一个结果：一个正则空间X是可数紧的当且仅当X

的每个点有限的开复盖有一个有限的子复盖。1954年他得到正规空间 X 是可数仿紧的充要条件是空间 X 的每个可数开复盖有一个星有限的开加细。他的这两个结果在点集拓扑学的专著[11]中都有所述。

在抽象代数方面，他引入了BCK-代数和BCI-代数的概念，发表了大量的论文，为BCK-代数和BCI-代数理论起了奠基作用。在本书中，我们对他在这方面的工作要作详细的论述。

在现代分析方面，他研究过级数论和2-度量空间理论等。

3. 第一个发展阶段

作者认为BCK-代数和BCI-代数理论在发展上可分为两个阶段：1966年—1979年是第一个阶段，1980年至现在是第二个阶段。

第一个发展阶段虽然经历了十四年，但尚属BCK-代数和BCI-代数理论的初级阶段。

第一个阶段中这一理论的最大成就是K·Iséki等引入了BCK-代数和BCI-代数的概念。

对于BCI-代数论来说，在第一阶段中除了K·Iséki在[18]中引入了BCI-代数的概念及得到了几个初等结果外，再没有什么进展。这个理论在第一阶段中产生了一点困难。由BCK-代数和BCI-代数的定义容易知道包含关系(1)成立。但是，这种包含是否真包含呢？也就是说，是否存在一个BCI-代数，它不是一个BCK-代数呢？这一点在第一阶段中并不知道，即使K·Iséki本人也没有在1979年前举出这样一个例子来。这个困难影响了BCI-代数理论的发展。

在第一个阶段中BCK-代数理论得到了初步的发展。从日本开始，以后波及到波兰、苏丹和斯里兰卡，有二、三十位作者从事

BCK-代数的研究，写出了几十篇第一批论文。这些成果基本上述在〔19〕中。也大体上是我们这本书第二章的内容。

4. 第二个发展阶段

1980年开始，BCK-代数和BCI-代数理论进入了第二个阶段。第二阶段中出现的特点是：

第一，投入这一理论工作的人数大大增加，所在国家已达十个左右，已反映出这一理论成为一个引起国际广泛兴趣的理论。

第二，BCK-代数理论日益深入研究，出现的论文每年成倍增加，成果很多，联系面越来越广泛。

第三，在第一阶段中提出的一些问题大多被解决，又涌现了一批新的和更深入的问题。

第四，第一阶段中BCI-代数理论中所遇到的上述困难被K·Iséki在1980年所解决，他在〔20〕中提出了是BCI-代数、而不是BCK-代数（称为真BCI-代数）的第一个例子。这样，（1）就变成了：

$$\text{BCK-代数类} \subset \text{BCI-代数类}. \quad (2)$$

由此，BCI-代数理论就成为一个独立的代数理论而出现和得到迅速的发展。K·Iséki在1980年发表了一系列的论文（cf.〔20—26〕），在BCI-代数理论中引进了一系列的概念，得到了许多结果，也提出了一批需要解决的问题。他的这些工作对于BCI-代数的奠基作用是非常明显的。

第五，作者和K·Iséki合作研究了结合BCI-代数，发表了论文和作者摘要〔27—30〕。反映了中国数学工作者开始投入BCK-代数和BCI-代数理论的研究工作。之后，这一理论吸引了大批中国数学工作者，出现了论文〔31—47〕。可以说，中国数学工作者大大地推进了BCI-代数理论的研究，也初步地开始研究

BCK-代数, 还引入了较BCI-代数类更大的代数类—BCH-代数类. 特别是1983年4月在西安召开的BCK-代数和BCI-代数会议, 初步地组织起我国研究BCK-代数和BCI-代数的一支老、中、青相结合的队伍, 为进一步开展这一理论研究打下了基础.

§ 2 要注意的几个问题

在这一节中我们谈几点有关读这本书应当注意的问题. 当然, 这是写给初次接触这一理论, 且尚无进行过科研训练的读者的. 注意了这些问题对他们学好这一理论. 达到“入门、上路. 开展工作”, 会有一定的好处.

1. 本书的内容

本书着重介绍BCI-代数, 共分八章.

第一章中我们做些必要的准备工作. 我们让读者了解BCK-代数和BCI-代数发展的概况, 交待几个要注意的问题, 叙述有关集合论和抽象代数的一些基本知识, 以及这本书中常用的记号.

第二章介绍BCK-代数的一些基本内容, 本书中对BCK-代数只作简略介绍. 介绍这些内容的目的, 一则为读者对BCK-代数理论有个初步的了解, 二则为BCI-代数有关理论的展开找出一定的依据, 使读者知道来龙去脉.

第三章介绍BCI-代数的概念及主要性质, 阐明BCI-代数和BCK-代数的关系, 初步研究BCI-代数的BCK-部分, 引入一簇BCI-代数的乘积BCI-代数, 以及子代数, 且介绍理想和商代数.

第四章到第六章其实是BCI-代数理论中的几个专题. 第四

章中介绍拟可换的BCI-代数、BCI-代数簇和具有条件(S)的BCI-代数等.这些内容都可供有兴趣的读者进行进一步的研究.

第五章介绍BCI-代数理论中具有成果较丰富的结合BCI-代数.我们既介绍结合BCI-代数的概念和性质,也介绍结合BCI-代数的发展——广义结合BCI-代数.

第六章中研究BCI-拓扑代数.研究具有拓扑结构的BCI-代数,这就产生了BCI-拓扑代数.本章中还简介了有关拓扑学及拓扑群的准备知识.

第七章介绍作者引入的BCH-代数.BCH-代数理论是BCI-代数理论进一步发展的产物.作者和李新在〔38〕中证明了真BCH-代数的存在性,这就表明BCH-代数是一个新的独立的代数结构.我们在这一章中分四节介绍BCH-代数的概念、真BCH-代数的存在、BCH-代数的性质和BCH-代数的同构.这一代数结构是作者在一九八一年提出来的,时间还不长.作为一个代数理论尚还很不完整.作者欢迎有兴趣的读者投入这一代数理论的工作.

作者在最后一章就BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数的进一步发展谈点不成熟的看法,其目的在于,一则为使这本书有个较完整的结束,二则为有兴趣的读者提供点参考意见.

2. 读本书方法的建议

作者认为,有时间和耐心的读者,不妨从头到尾地阅读.这里介绍的BCI-代数理论是个新的代数分支,远远还谈不上完备,许多结果及方法都是很初等的.作者相信,有兴趣的数学工作者和大学数学系的高年级学生在阅读这本书时不会有多大困难.从事物理、化学和电子计算机理论研究的工作者也可阅读本书.

对于只想了解BCI-代数理论概况的读者,则只要阅读第二、

三、五章就可以了。对于熟悉BCK-代数理论的读者,则只要阅读第三、五章便可了解BCI-代数理论了。

对于初步接触BCK-代数和BCI-代数理论、又想在这一方面做些工作的读者,作者认为,可以先读二、三两章,然后根据自己的兴趣在四至七章中挑选合适的专题仔细研究。

3. 关于参考文献的说明

这本书的后面附有较为详细的参考文献。〔1—3及48〕是关于集合论的四本书,〔4—9〕是有关抽象代数学的书籍和一些专题论述,〔10—12〕是有关点集拓扑学的书。这本书中所用的集合论、抽象代数和点集拓扑学方面的知识请读者参考这些书。

〔13—16, 19〕是BCK-代数和BCI-代数理论的一些综合报告。〔17—18〕是K. Iséki等引入BCK-代数和BCI-代数的原始文献。

〔20—47〕是有关BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数的文献,其中主要列入BCI-代数的文献。目前BCK-代数理论的文献已非常多,这里不一一列入;所引的〔45—47〕一则为中国作者在BCK-代数方面做的工作,二则也是在我们这本书第二章中要有所提到的。

4. 学习本书的方法

怎样学习这本书?怎样学习BCI-代数理论?怎样能很快投入BCI-代数的研究工作?这是初次接触BCI-代数理论的读者往往会提出的问题。作者认为必须很好地解决学习方法问题,才能真正解决这些问题。作者在这里向读者提出下列方法,以供学习中参考。

第一,科学、严谨,克服神秘。读者们,尤其是初次接触科研论文的读者,既要在学习中采取科学、严谨的态度,又要克服

神秘的思想。只要钻进去，不怕困难，勤于思索，科学之路是一定可以登攀的。

第二，抓住主流，掌握实质。在学习中要注意掌握每一个概念和每一个结果的实质，要尽量自己去推证每一个结果，下得这样的功夫，才会出现“功夫不负有心人”的结果。在科研中还要常常去考虑主攻方向和主流的问题。当然，对初学者也不要轻易放弃那些简单的问题，不要轻视做“小工作”。实际上，要从量变达到质变，必须老老实实地、一步一个脚印地向前走。

第三，一边学习，一边科研。学习BCI-代数理论完全可以采取“一边学习，一边科研”的办法。并不必等到一本书读完后再考虑做工作。读者在接触一些专题后，如有兴趣，便可直接去读有关文献，然后去发现和提出问题，进一步自己去解决这些问题。这本身就是科研的过程。当然，必要的基本理论学习自然是不可少的，相信读者也是不会马马虎虎的。

还有几件事要在这里说明一下。

1) 除第二章中没有注明K. Iséki等人的结果和引入的概念外，其他作者引入的概念和得到的结果皆一一注明，而K. Iséki在BCI-代数方面的工作自第三章起已一一注明。

2) 凡作者引入的概念及所得到的结果皆冠上〔注 $\times\times$ 〕。读者可查看本书后面的《注记》的同数目条款。

这里还应当再说一点，就是象这样的一本书，国内还是第一次出现；写得也很仓促，选材也相当有限，有许多文献还看不到，因此这本书中缺点和错误一定不少。作者欢迎读者批评指正，或提出进一步修改的意见。

§ 3 关于集合论和抽象代数 的一些基本知识

BCK-代数和BCI-代数理论的准备知识是不太多的，只要求有一些集合论、抽象代数和点集拓扑学的知识，而这些知识都是一般数学系高年级学生所具备的。为了完整和方便起见，我们在这里列出一些集合论和抽象代数的常用概念和结果，而在第六章的§ 1中列出有关拓扑学及拓扑群的准备知识，而后者也仅仅用于第六章。

1. 集合论中的概念

我们认为读者对朴素集合论中的一些基本概念和结果是熟知的，例如：集合，元素，属于，有限集，子集，包含，真子集，空集，并集，交集，补集，或余集，差集，对称差，集族，指标集，序对，笛卡尔积（或直积），坐标，集列，极限集，单调集列，

关系，图象，对角线，定义域，值域，逆关系，关系的复合，象，原象，纤维（一点的原象），等价关系，等价类，商集，

半序集，上界，下界，最大元，最小元，极大元，极小元，全序集，全序子集，区间，截段，稠密，序完备，

映射，图象，射影，特征函数，满射，单射，双射，逆映射，包含映射，（嵌入映射），限制，扩张，映射的乘积，

良序集，序型，序数，基数：选择公理及其等价命题。

上述这些集合论中的概念在一般的集合论的书中均可查到，例如文献[1—3]。对于这些概念，我们这本书中一般直接应用，而不再定义或说明。