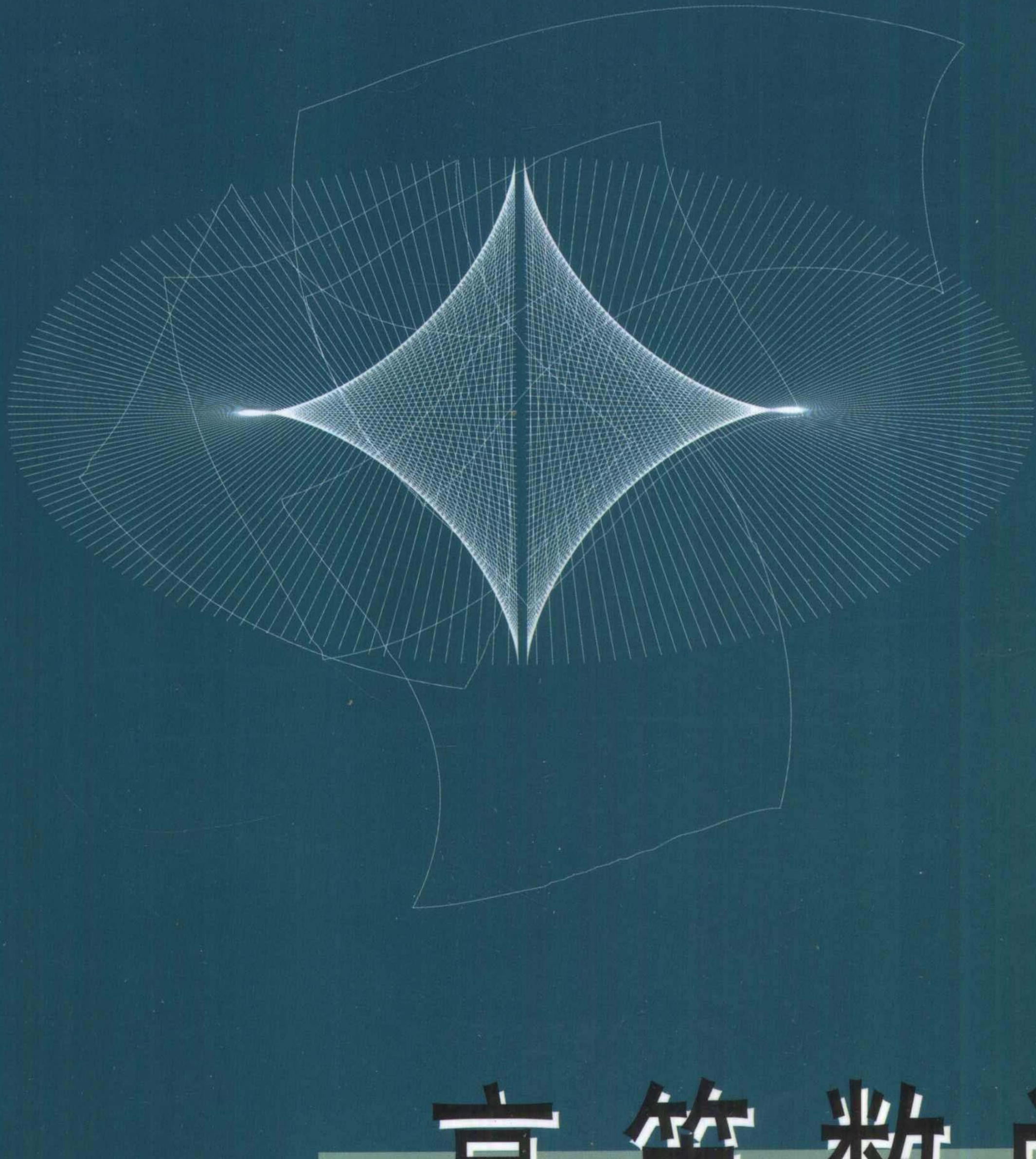
中国纺织大学出版社

舒慧生 李绍宽 编著



高等数学

GaoDeng ShuXue

下册

高 等 数 学

下 册

编著 舒慧生 李绍宽

中国纺织大学出版社

内容提要

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会指定的《高等数学课程教学基本要求》和《线性代数教学基本要求》编写的将高等数学和线性代数统一处理的工科教学用书。全书分上、下两册，下册的主要内容包括：线性代数，多元函数的微分学，二重积分、三重积分，第一类曲线、曲面积分，第二类曲线、曲面积分以及格林公式、高斯公式、斯托克斯公式等。每章节后都配置相应习题，书末附有习题答案。

本书适合工科大学师生使用，亦可供有关人员参考与自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/舒慧生，李绍宽编著．—上海：中国纺织大学出版社，2001.10

ISBN 7-81038-404-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．①舒…②李…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 071336 号

责任编辑　邵　静

封面设计　陶善丰

高等数学(下册)

舒慧生　李绍宽　编著

中国纺织大学出版社出版

(上海市延安西路 1882 号　邮政编码：200051)

南京市展望照排印刷有限公司排版　江苏省句容市排印厂印刷

新华书店上海发行所发行

开本：787×1092　1/16　印张：14　字数：330 千

2001 年 12 月第 1 版　　2001 年 12 月第 1 次印刷

印数：0 001—5 000

ISBN 7-81038-404-X/O·17

定价：22.00 元

前　　言

随着高等教育的发展,作为工科院校的主干基础课程高等数学、线性代数两门课程的教学时间被大大压缩,为了适应这种迅速的变化情况和进一步提高教学质量,有必要把这两门关系密切的课程实现一体化进行教学,从 1997 年开始我们进行了这方面的试点,但这样进行教学缺少一本合适的教材,为了适应这种情况,我们编写了这本高等教学与线性代数一体化教材。

本书分上、下两册,上册包括一元函数微积分的内容,其中包括级数与微分方程,下册包括线性代数和多元微积分的内容,各章配有习题,书末附有习题答案。

在编写本书的过程中,我们将多年教学经验反映在课本的内容之中,力求简洁、明了,在讲清概念的同时,加强对各种类型的问题分析,以帮助同学提高解决问题的能力,在下册我们力求将线性代数和多元微积分有机结合起来进行讲解。

在出版过程中,本书审稿的姜健飞同志认真地审读了全书,修正了不少错误,编辑同志也认真做了编辑工作,在此表示感谢。

由于时间限制和我们水平有限,因此教材中一定还存在不少问题和错误,希望广大读者提出批评和意见,以便今后进一步完善本书的内容。

编者

2001 年 10 月

目　　录

第七章　矩阵与行列式

§7-1　矩　　阵

矩阵是数学中的重要工具。人们经常将许多数据列成一个矩形的表来分析问题，这就是矩阵。

一、矩阵的定义

数域 F 上 $n\times m$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$排成 n 行、m 列，并以括号放在两边的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

表示，称为数域 F 上的 $n\times m$ 阶矩阵，通常用一个大写字母来表示，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1m} \\ a_{2} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

也可简记成　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$。

其中 a_{ij}称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素。

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵；而由 $n\times m$ 个 0 构成的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{0}_{n\times m}$。例如一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases},$$

可以抽象为一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij}是第 i 个方程第 j 个未知数的系数，反之，一个矩阵也可以对应一个线性方程组，这样，可以把解线性方程组过程化为对矩阵的变换。关于这个问题，是矩阵的重要内容，

我们后面要专门讨论。

二、矩阵的运算

1. 矩阵相等 两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times m$ 阶矩阵，且所有对应元素相等，即 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

例 1 已知$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ u & v \end{pmatrix}$，求 x,y,u,v。

解 $x=3$，$y=4$，$u=1$，$v=2$。

2. 矩阵的加法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$ 是两个 $n\times m$ 阶矩阵，定义

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times m},$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和。

两个矩阵必须是同阶时才能相加，相加时，对应元素相加。不难验证，矩阵加法具有下列性质：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$；

(3) 零矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(4) 存在矩阵$(-\boldsymbol{A})$ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，这里$(-\boldsymbol{A})=(-a_{ij})_{n\times m}$。

3. 矩阵的数乘 设 λ 为数域 F 中的一个数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$ 为 F 上的 $n\times m$ 阶矩阵，定义

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{n\times m},$$

则称之为 λ 与 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积，简称为数乘。

数乘运算具有下列性质：

(1) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，　$(-1)\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，　$0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$，　$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$。

4. 矩阵的转置 将一个 $n\times m$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到一个 $m\times n$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}'$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ij})_{n\times m}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}。$$

关于转置运算有下列性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　（λ 为数）。

5. 矩阵的乘法　对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases},$$

我们将未知数 x_1，x_2，…，x_m 的系数写成一个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

将未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 写成一个矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$，

将常数项写成一个矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

这样，我们便希望线性方程组用一个简便的等式表示为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},$$

为此需要定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 X 的乘积为

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m \end{pmatrix}。$$

一般地，若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，$\boldsymbol{B}=(b_{jk})_{m\times l}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ik})_{n\times l}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中

$$C_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{im}b_{mk}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\quad(i=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,l)。$$

由定义可知：当且仅当 A 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义，且 $\boldsymbol{AB}$ 中第 i 行第 k 列的元素等于 A 的第 i 行 m 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 列的相应 m 个元素对应乘积之和。

例 2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，　求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$。

解 $AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad BA=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ -1 & -2 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

例 2 告诉我们：矩阵乘法一般不满足交换律，即 $AB\neq BA$ 。

例 3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$， $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$， $D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，求 AB,AC,AD。

解 $AB=0$ $\quad AC=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ $\quad AD=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$。

例 3 告诉我们：A、B 均不为零矩阵，但可能有 $AB=0$ 及 $AC=AD$；$A\neq 0$ 推不出 $C=D$，从而矩阵乘法不满足消去律。

矩阵乘法具有下列性质：

(1) 结合律 $(AB)C=A(BC)$，$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（$\lambda$ 为数）；

(2) 分配律 $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；

(3) 转置法则 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

在这里，仅证 $(AB)C=A(BC)$ 成立，其余留作习题。

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，$B=(b_{jk})_{m\times p}$，$C=(c_{ks})_{p\times q}$，

$[(AB)C]_{is}=\sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}c_{ks}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\right)c_{ks}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{ks}\right)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(BC)_{js}=[A(BC)]_{is}$，

从而有 $(AB)C=A\cdot(BC)$。

在矩阵乘法中，有一个重要的矩阵

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

称 E_n 为 n 阶单位矩阵，显然，对于任意 $n\times m$ 阶矩阵 A，有

$$E_nA=AE_m=A。$$

三、方阵

1. 方阵 对于 n 阶方阵全体 $F_{n\times n}$，任何两个 n 阶方阵，它们之间的代数运算是可行的，且运算结果仍然在 $F_{n\times n}$ 中，称 $F_{n\times n}$ 为一个 n 阶矩阵代数。此外，对于 n 阶方阵 A，可定义幂的运算

$$A^2=A\cdot A,\qquad A^{k+1}=A^k\cdot A\quad (k\text{ 为正整数})$$

规定：$A^0=E$，对于两个 n 阶方阵 A,B，一般 $AB\neq BA$。若 $AB=BA$，称 A、B 可以交换，这时许多代数公式都成立。如

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2,\qquad (A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$$

等等，特别由于 $EA = AE$，从而有

$$(E - A)(E + A + A^2) = E - A^3, \qquad (E + A)(E - A + A^2) = E + A^3。$$

2. 逆阵 对 n 阶方阵 A。若存在 n 阶方阵 B，使

$$AB = BA = E,$$

则称 A 是可逆的，B 是 A 的逆阵，记为 $B = A^{-1}$。

注意：不是每一个矩阵都可逆，例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，由于 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$，若 A 可逆，上式两边各乘 A^{-1}，得 $A^{-1}A^2 = 0$，而 $A^{-1}A^2 = (A^{-1}A)A = EA = A$，这样有 $A=0$，矛盾。

例 4 证明若 A 为 n 阶方阵，$A^3=0$，则 $(E-A)$ 可逆。

证 由于

$$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E,$$
$$(E+A+A^2)(E-A)=E-A^3=E,$$

从而 $(E-A)$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$。

3. 逆阵的性质

(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 是惟一的。事实上，若 B,C 均是 A 的逆阵，则有

$$C = EC = (BA)C = B(AC) = BE = B。$$

(2) 若 A,B 均为 n 阶方阵且都可逆，则 AB 也可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}。$$

事实上，由

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E,$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A^{-1}A = E,$$

从而

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}。$$

(3) 若 A 可逆，则 A^{T}, A^{-1} 均可逆，且

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A。$$

性质(3)的证明留作读者自证。

逆阵是一个重要的运算，特别在求解矩阵方程

$$AX = B \quad 或 \quad XA = B$$

时，若 A 可逆，则上面方程有惟一解

$$X = A^{-1}B \quad 或 \quad X = BA^{-1}。$$

那么，如何判断一个方阵是否可逆呢？可逆时，又如何求其逆阵？这些问题将在以后章节中讨论。

例 5 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，

形如 A 的矩阵称为对角阵。证明：A 可逆的充要条件是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都不等于 0，且有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}。$$

证　充分性。若 $\lambda_i\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix},$$

从而 A 可逆且
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}。$$

必要性。若 A 可逆，记 $A^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{rn}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n}\\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix},$$

从而 $\lambda_i b_{ii}=1$，即 $\lambda_i\neq 0$，且 $b_{ii}=\frac{1}{\lambda_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$，又由 $\lambda_i b_{ij}=0\ (i\neq j)$ 知 $b_{ij}=0$ $(i\neq j)$，故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}。$$

四、矩阵的初等变换

前面提到把线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

可以抽象成一个矩阵 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix},$$

解线性方程组常用消元法，消元法时常用的变形有下面三种：

(1) 将一个方程乘以不为零的常数；

(2) 交换方程的次序；

(3) 把一个方程乘以一个常数加到另一个方程上去。

用上述三种变形所得到的新方程组与原方程组是同解的。

我们把三种变换用于对应的矩阵，这就是矩阵的行的初等变换。因此，经过行的初等变换得到的新的矩阵对应的方程与原方程组同解。

矩阵行的初等变换有：

(1) 某行乘以非零常数 k，记为 $r_i \times k$；

(2) 互换两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$；

(3) 某行乘以一个常数 k 加到另一行上去，记为 $r_i \times k + r_j$。

相应地，对矩阵的列也有上述三种初等变换，称为列的初等变换，记为 $c_i \times k$，$c_i \leftrightarrow c_j$，$c_i \times k + c_j$。

将单位阵 $\boldsymbol{E}$ 施行一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵，我们记

(1) $$\boldsymbol{E}(i;k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix} —— r_i \times k \quad (c_i \times k);$$

(2) $$\boldsymbol{E}(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix} —— r_i \leftrightarrow r_j \quad (c_i \leftrightarrow c_j);$$

$$(3)\ \boldsymbol{E}(i,j;k)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&k&&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{matrix}——r_i\times k+r_j\quad(c_j\times k+c_i)。$$

关于初等矩阵,容易验证:初等矩阵都是可逆的,且

$$\boldsymbol{E}(i;k)^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i;\ \frac{1}{k}\right),\qquad \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j),\qquad \boldsymbol{E}(i,j;k)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j;\ -k),$$

而且对矩阵施行一次行的初等变换,相当于左乘一个相对应的初等矩阵;施行一次列的初等变换,相当于右乘一个相应初等矩阵。

对于一个矩阵,经过一系列行的初等变换能变成什么形式的矩阵?我们先介绍行标准形概念。

行标准形矩阵:每一非零行的第一个非零元素为 1,而它所在列的其他元素全为 0,且下一行的首 1 必须位于上一行首 1 的右边,构成一个向下的阶梯形式,而阶梯下方的元素全为 0。例如

$$\begin{pmatrix}0&1&2&0&0&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

就是一个行标准形矩阵。若只要求非零行的第一个非零且首个不为零的元构成阶梯形,阶梯下方都为零的矩阵,称为阶梯形矩阵。例如

$$\begin{pmatrix}0&2&3&1&4&4\\0&0&0&3&4&1\\0&0&0&0&2&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

就是一个阶梯形矩阵。

定理 1 任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,可通过一系列行初等变换变为行标准形矩阵。

证 若第 1 列的 a_{i1} 中有一个非 0,即 $a_{i_01}\neq 0$,则可将 i_0 行与第 1 行对换,再将第 1 行乘以 $a_{i_01}^{-1}$,使 $\boldsymbol{A}$ 变为

$$\begin{pmatrix}1&*&*&\cdots&*\\ *&*&*&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ *&*&*&\cdots&*\end{pmatrix},$$

再将第 1 行乘以适当的数加到第 2 行、第 3 行……直至最后一行,使之变成

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

再对 $\boldsymbol{A}_1$ 施行同样方法，使 A 变为首个为 1 的阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & 1 & * \cdots & * \\ & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

然后将第 2 行乘以适当的常数加到第 1 行，使第 2 行首 1 所在列的上方元素也变为零，如此下去就得到要求的标准形。

例 6 将矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 经过行的初等变换变为行标准形。

解

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times 1 + r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times 1 + r_4]{r_2 \times (-1) + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{3}]{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times 1 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1) + r_1]{r_3 \times (-2) + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

若进一步再用列的初等变换，行标准形可变为秩标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

对于一个方阵，记它的标准形为 J。由于初等变换不改变它的可逆性，故 J 可逆，当且仅当 $J=E$ 时。事实上，若对一个 n 阶方阵，它的标准形 J 中最后一行都为 0，它一定不可逆。若 J 可逆，即存在 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，使

$$\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

而上式中，JB 中的 $c_{nn}=0\neq 1$，矛盾。

通过上例，我们得到以下定理：

定理 2 对于任一 $n\times m$ 矩阵 A，一定存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_k$；$Q_1,\cdots,Q_l$，使

$$P_k\cdots P_1AQ_1\cdots Q_l=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)。$$

定理 3 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是：(1) 存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_k$，使

$$P_k\cdots P_1A=E,$$

或(2) 存在一系列初等矩阵 $Q_1,\cdots,Q_k$，使

$$A=Q_1Q_2\cdots Q_k。$$

事实上，由(1)知：$A=(P_k\cdots P_1)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_k^{-1}$，而初等矩阵的逆阵仍然是初等矩阵，从而(2)成立。

这样，我们就得一个判别方阵可逆性方法——初等变换法，而且同时能求出其逆阵，即在 A 的右边加上一个单位阵，就可把对 A 施行的行初等变换所对应的初等阵记录下来

$$(A\,|\,E)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(E\,|\,P_kP_{k-1}\cdots P_1),$$

此时

$$A^{-1}=P_kP_{k-1}\cdots P_1。$$

例 7 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解 $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_1\times(-1)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times(3)+r_3]{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times(-3)+r_1]{r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times(-2)+r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}。$$

下面证明：

定理 4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，从而有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$。

证 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_k$，使

$$\boldsymbol{P}_k\cdot\boldsymbol{P}_{k-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_k\cdot\boldsymbol{P}_{k-1}\cdots\boldsymbol{P}_1$，于是，有

$$\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P},$$

导出
$$\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{BP}^{-1} = \boldsymbol{E},$$

这样，便有
$$\begin{pmatrix} * & & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$$

矛盾，从而知 $\boldsymbol{A}$ 可逆。因此，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}。$$

利用行的初等变换，不但可以求逆，而且可以去求解一个线性方程组。利用线性方程组对应的矩阵，经过行的初等变换，得到的矩阵所对应的方程与原方程是同解的，而容易得到行标准形所对应的方程组的解。

事实上，将方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

的矩阵
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

化为标准形后，再对换列的位置(相当于改变 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的次序，最外一列除外)可写为