

工科课程提高与应试丛书

ENGINEERING
COURSE

结构力学 (II)

典型题解析
及自测试题

刘鸣
王新华
编著

西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

结构力学(Ⅱ)典型题解析及自测试题

刘 鸣 王新华 编著



西北工业大学出版社

【内容简介】 本书为结构力学专题部分的教学辅导参考书,内容包括能量原理、结构弹性稳定计算、结构动力计算和结构极限荷载。每章序号与湖南大学《结构力学》(第四版)下册相应各章的序号一致。

全书共分二大部分。第一部分分别给出各章的内容提要、典型例题详解、评注及习题;第二部分给出五套自测试题。附录为习题及自测试题答案。

本书可作为高等学校土木工程专业及自学考试学生的辅助教材,也可供报考硕士研究生人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学(Ⅱ)典型题解析及自测试题/刘鸣,王新华编著. —西安:西北工业大学出版社,2002.12

(工科课程提高与应试丛书)

ISBN 7-5612-1586-X

I. 结… II. ①刘… ②王… III. 结构力学—高等学校—解
题 IV. 0342-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 089582 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)8493844,8491147

网 址:www.nwpup.com

印刷者:陕西友盛印务有限责任公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:14.125

字 数:362 千字

版 次:2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷

印 数:1~6 000 册

定 价:18.00 元

前 言

结构力学是土木工程专业学生重要的专业基础课，具有系统的理论性和较强的实用性。掌握结构力学的基本概念和基本原理，对于提高分析和解决工程实际问题的能力以及后续专业课的学习都是十分重要的。

本书是为学生在学习结构力学教材基础上，进一步掌握结构力学的基本理论，通过解析典型题加强基本技能训练而编写的一本教学参考书。其目的在于帮助学生深入理解本课程的基本理论和基本内容，较全面地、扎实地掌握各类问题的解题要领，开阔思路，提高综合分析和计算能力。

本书以结构力学专题部分或结构力学（下册）为基本内容。全书分为二个部分，即典型题解析和自测试题。在编写中我们力求做到体现教学的基本要求，突出重点，顾及难点，语言通俗。其中典型题的解析注重对解题思路和特点的分析，给出解题步骤，并在题后的“评注”中指出了学生在学习容易出现的错误和应注意的问题。此外，部分题作了一题多解，或以一种解法为主，提示另外可行的解题途径，以开阔思路。在附录中，给出各章习题和自测试题的答案。

《结构力学（Ⅱ）典型题解析及自测试题》第一部分中第十三、十五章由长安大学刘鸣编写；第十四、十六章由长安大学王新华编写。第二部分和附录由刘鸣、王新华组题并解答。所有插图由硕士研究生胡芳绘完成。全书由刘鸣统稿并任主编。

在编写过程中，本书吸收了国内优秀结构力学教材和教学辅导书籍的优点，引用了典型的例题和习题。在此，编者向这些书

籍的原编著者致以衷心的感谢。

本书可作为高等学校土木工程专业《结构力学》下册的教学参考书，也可作为报考硕士研究生的辅导参考书，对函授、自考学生的结构力学学习也有较大的参考价值。

限于编者的水平和经验，加上编写时间仓促，以及解析有些例题采取新的尝试，书中的疏漏及不妥之处在所难免，恳请广大读者批评和指正。

编者

2002年9月

目 录

第一部分 典型题解析

第十三章 能量原理	1
一、内容提要.....	1
二、典型题解析.....	8
三、习题.....	51
第十四章 结构弹性稳定计算	56
一、内容提要.....	56
二、典型题解析.....	71
三、习题.....	139
第十五章 结构动力计算	144
一、内容提要.....	144
二、典型题解析.....	171
三、习题.....	321
第十六章 结构极限荷载	335
一、内容提要.....	335
二、典型题解析.....	342
三、习题.....	403

第二部分 自测试题

自测试题一.....	411
自测试题二.....	414
自测试题三.....	418
自测试题四.....	423
自测试题五.....	427

附录 习题及自测试题答案

附录一.....	432
附录二.....	439
参考文献.....	444

第一部分 典型题解析

第十三章 能量原理

一、内容提要

1. 应变能密度和应变余能密度

图 13-1 为简单拉伸时的应力-应变曲线。图中曲线 OAB 与 ϵ 轴所围面积为单位体积上的应力在变形过程中所做的功,称为应变能密度,用 $v_{1,N}$ 表示

$$v_{1,N} = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (13.1)$$

当应力应变为线性关系,即服从胡克定律 $\sigma = E\epsilon$ 时,有

$$v_{1,N} = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} E\epsilon^2 \quad (13.2)$$

在杆件结构中,杆件在外力作用下将产生变形。通常,杆件的应变能可用杆件截面上的内力

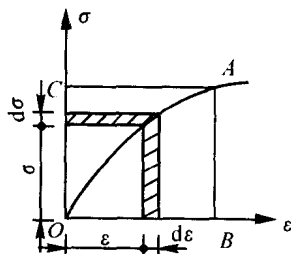


图 13-1

F_N, F_Q, M 在变形过程中所做的功来表示。单位杆长的应变能称为杆件的应变能密度。一般地,杆件的应变能密度表示为其纯拉伸、纯剪切、纯弯曲时应变能密度的和,即

$$v_1 = v_{1N} + v_{1Q} + v_{1M} = \int_0^{\epsilon} F_N d\epsilon + \int_0^{\gamma} F_Q d\gamma + \int_0^{\kappa} M d\kappa \quad (13.3)$$

当为线弹性材料时,式(13.3)成为

$$v_1 = \frac{1}{2} EA \epsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{GA}{k} \gamma^2 + \frac{1}{2} EI \kappa^2 \quad (13.4)$$

图 13-1 中曲线 OAC 与 σ 轴所围面积为单位体积上的应变余能,称为应变余能密度,用 v_{c1N} 表示

$$v_{c1N} = \int_0^{\sigma} \epsilon d\sigma \quad (13.5)$$

当应力应变为线性关系,即服从胡克定律 $\sigma = E\epsilon$ 时,有

$$v_{c1N} = \int_0^{\sigma} \epsilon d\sigma = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (13.6)$$

同样,在杆件结构中,单位杆长的应变余能称为杆件的应变余能密度。一般地,杆件的应变余能密度表示为其纯拉伸、纯剪切、纯弯曲时应变余能密度的和,即

$$v_{c1} = v_{c1N} + v_{c1Q} + v_{c1M} = \int_0^{F_N} \epsilon dF_N + \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q + \int_0^M \kappa dM \quad (13.7)$$

当为线弹性材料时,式(13.7)成为

$$v_{c1} = \frac{1}{2EA} F_N^2 + \frac{k}{2GA} F_Q^2 + \frac{1}{2EI} M^2 \quad (13.8)$$

2. 杆件的应变能和应变余能

对于线弹性材料,一根杆件的应变能 V 为

$$V = \int v_1 dx = \int \frac{1}{2} \left[EA \epsilon^2 + \frac{GA}{k} \gamma^2 + EI \kappa^2 \right] dx \quad (13.9)$$

其应变余能 V_c 为

$$V_c = \int v_{c1} dx = \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right] dx \quad (13.10)$$

3. 杆件结构的势能

杆件结构的势能 E_p 定义为

$$E_p = V + E_p^* \quad (13.11)$$

式中, V 是杆件结构的应变能。当只考虑弯曲变形时, 结构的应变能为

$$V = \sum_e \int \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx$$

E_p^* 是结构的荷载势能。它表示荷载 F_p 在其相应的广义位移 Δ 上所做虚功总和的负值, 即

$$E_p^* = - \sum F_p \Delta \quad (13.12)$$

当仅考虑弯曲变形时, 杆件结构的势能为

$$E_p = \sum_e \int \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx - \sum F_p \Delta \quad (13.13)$$

4. 势能驻值原理

势能驻值原理是与位移法对应的能量原理。

势能驻值原理: 在体系可能的满足几何条件的位移状态中, 如果位移相应的内力进一步还满足静力条件, 则该位移必使其势能 E_p 为驻值。

势能驻值条件与平衡条件是等价的。

在小位移、线弹性的稳定平衡问题中, 可以证明, 势能驻值原理就是最小势能原理。

5. 势能驻值条件

对于具有 n 个基本未知量 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 的位移法的基本结构, 结构的势能 E_p 是这 n 个基本未知量 $Z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的函数, 则势能驻值条件为

$$\frac{\partial E_p}{\partial Z_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.14)$$

利用虚功原理, 得到位移法基本方程为

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + R_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

可见, 势能驻值原理是以能量形式表示的位移法基本方程(平衡方程)。

注: 势能驻值原理和位移法一样同时适用于求解静定结构和超静定结构。

6. 卡氏第一定理

设有一弹性结构承受 n 个广义力 P_1, P_2, \dots, P_n 作用, 相应的位移为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, 如果把应变能 V 表示为位移 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 的函数, 则应变能对任一位移 Δ_i 的偏导数便等于其相应的力 P_i , 即

$$P_i = \frac{\partial V}{\partial \Delta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.15)$$

此即卡氏第一定理。卡氏第一定理利用应变能建立了荷载与位移的关系, 实际上是势能驻值原理的另一种表示形式。

7. 瑞利-里兹法

基于势能驻值原理的瑞利-里兹法是建立在泛函(这里指总势能)求极值基础上的一种近似计算解法。它的基本思路是把无限自由度体系近似地用有限自由度体系来代替。其步骤:

① 将结构的几何可能位移设定为包含 n 个独立参数的已知函数, 即

$$v = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad (13.16)$$

式中 a_i —— 独立的待定参数;

f_i —— 满足结构位移边界条件的已知函数。

这种设定相当于把结构当作 n 个自由度体系看待。

② 写出结构的总势能为

$$E_p = V_C + E_p^*$$

此时 E_p 是 a_i 的二次函数。

③ 由势能驻值条件, 可知

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.17)$$

建立 n 个线性代数方程, 据此可解出 n 个待求参数 a_1, a_2, \dots, a_n 。

④ 将求得的 a_i 值代回 v 中, 得到挠度的近似值。

⑤ 根据所得的 v 的近似解, 进一步求得结构的内力。

8. 杆件结构的余能

杆件结构的余能 E_C 定义为

$$E_C = V_C + E_C^* \quad (13.18)$$

式中, V_C 是杆件结构的应变余能。

对于线弹性结构

$$V_C = \sum_c \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right] dx \quad (13.19)$$

其中 \sum_c 为对结构全部杆件求和。

E_C^* 是结构的支座位移余能或给定边界位移的余能。

$$E_C^* = - \sum_c R_c \quad (13.20)$$

其中 \sum_c 为对全部支座反力所作的虚功求和。于是, 杆件结构的余能为

$$E_c = \sum_c \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right] dx - \sum_c R_c \quad (13.21)$$

9. 余能驻值原理

余能驻值原理是与力法相对应的能量原理。

超静定结构的余能驻值原理: 在内力满足静力平衡条件的前提下, 如果内力相应的应变进一步还满足应变谐调条件, 则该内力必使其余能 E_c 为驻值。

余能驻值条件与变形谐调条件是等价的。

超静定结构中, 在同时满足静力平衡方程、几何方程和物理方程的解具有惟一解的情况下, 结构的真实内力不仅使余能为驻值, 而且可以证明它可使余能为极小值, 此即最小余能原理。

10. 余能驻值条件

对于具有 n 个基本未知量 X_1, X_2, \dots, X_n 的力法基本结构, 余能 E_c 是这 n 个基本未知量 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的函数, 根据余能为驻值的条件

$$\frac{\partial E_c}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.22)$$

得到力法的基本方程如下:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} + \Delta_{\Delta} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

可见, 余能驻值条件就是以能量形式表示的力法基本方程(变形谐调条件)。

应注意:

① 方法和余能原理只适用于超静定结构。

② \overline{M}_i 和 M_p 分别为 $\overline{X}_i = 1$ 和荷载单独作用于任何力法基本结构上所引起的弯矩,但须指出, n 个单位弯矩图 \overline{M}_i 必须是彼此线性无关的。

11. 卡氏第二定理

在结构没有支座位移的情况下,结构的总余能与应变余能彼此相等。如果将结构的应变余能表示为荷载的函数,则应变余能 V_C 对任一荷载 P_k 的偏导数就等于与该荷载相应的位移 Δ_k ,即

$$\Delta_k = \frac{\partial V_C}{\partial P_k} \quad (13.23)$$

式(13.23)称为克罗第-恩格塞定理。

对于线弹性结构,应变能 V 与应变余能 V_C 相等,故由式(13.23)可得出如下公式

$$\Delta_k = \frac{\partial V}{\partial P_k} \quad (13.24)$$

式(13.24)称作卡氏第二定理。它可叙述为:在结构为线弹性且无支座位移的情况下,如果将结构的应变能 V 表示为荷载的函数,则应变能 V 对任一荷载 P_k 的偏导数就等于与该荷载相应的位移 Δ_k 。

12. 混合能量原理

混合法是同时取力和位移作为基本未知量的结构分析方法。与混合法相应的能量原理为混合能量原理,这里给出其中的分区混合能量原理。

如果把结构分成两区, I 区按位移法计算, II 区按力法计算,两个区的交接处用 (I, II) 表示,则分区混合能 \tilde{E} 定义为

$$\tilde{E} = E_{pI} - E_{CII} + \sum_{(I, II)} R_{kII} C_{kI} \quad (13.25)$$

式中, E_{pI} 是 I 区的势能,即

$$E_{pI} = V_I - \sum_I P_i \Delta_i$$

E_{cII} 是 II 区的余能, 即

$$E_{cII} = V_c - \sum_{II} R_j C_j$$

R_{kII} 和 C_{kI} 分别表示在交接处 II 区所受到的力和 I 区的相应位移。

分区混合能量原理: 在弹性结构(线性或非线性)的一切可能的分区混合状态(在 I 区是符合本区位移边界条件和任一可能位移状态, 在 II 区是符合本区静力边界条件并与给定荷载相应的任一平衡受力状态)中, 真实状态使分区混合能 \tilde{E} 为驻值, 即

$$\delta \tilde{E} = 0 \quad (13.26)$$

二、典型题解析

例 13.1 试求图 13.1 所示结构在荷载 F_p 作用下的应变能和应变余能。设 $EA = \text{常量}$ 。

(1) 材料为线弹性 ($\sigma = E\varepsilon$);

(2) 材料为非线弹性 ($\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|}$)。

分析 无论材料为线弹性还是非线弹性, 结构的应变能和应变余能都与结构中各杆件的轴力有关, 故应首先求出图 13.1 结构中两杆的轴力。

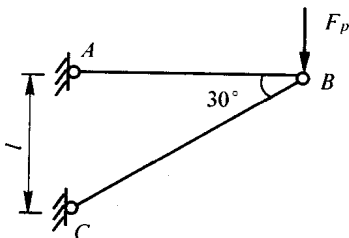


图 13.1

由结点 B 的平衡条件得两杆轴力分别为

$$F_{NBC} = -2F_p (\text{压力}) \quad , \quad F_{NAB} = \sqrt{3}F_p (\text{拉力})$$

解 (1) 线弹性情况

这时, $V = V_C$, 结构的应变能等于两个杆件的应变能的总和

$$V = \frac{1}{2} F_{NBC} \Delta l_{BC} + \frac{1}{2} F_{NAB} \Delta l_{AB}$$

两杆的轴向变形为

$$\Delta l_{BC} = \frac{F_{NBC} l_{BC}}{EA} = \frac{-4F_p l}{EA}$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{NAB} l_{AB}}{EA} = \frac{3F_p l}{EA}$$

代入 V 中, 得结构的应变能为

$$V = \frac{4F_p^2 l}{EA} + \frac{3\sqrt{3}F_p^2 l}{2EA}$$

应变余能为

$$V_C = V = \frac{4F_p^2 l}{EA} + \frac{3\sqrt{3}F_p^2 l}{2EA}$$

(2) 非线性弹性情况

两杆的应变分别为

$$\epsilon_{BC} = -\frac{\sigma_{BC}^2}{B^2} = -\frac{F_{NBC}^2}{B^2 A^2}, \quad \epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}^2}{B^2} = \frac{F_{NAB}^2}{B^2 A^2}$$

轴向变形为

$$\Delta l_{BC} = \epsilon_{BC} l_{BC} = -\frac{F_{NBC}^2 l_{BC}}{B^2 A^2} = -\frac{8F_p^2 l}{B^2 A^2}$$

$$\Delta l_{AB} = \epsilon_{AB} l_{AB} = \frac{F_{NAB}^2 l_{AB}}{B^2 A^2} = \frac{3\sqrt{3}F_p^2 l}{B^2 A^2}$$

由于非线性弹性等截面直杆的拉伸或压缩应变能为

$$V = \int_s \left[\int_0^\epsilon F_N d\epsilon \right] ds$$

应变余能为

$$V_C = \int_s \left[\int_0^{F_N} \epsilon dF_N \right] ds$$

所以,结构的应变能为

$$\begin{aligned}
 V &= \sum \int_S \left[\int_0^\epsilon F_N d\epsilon \right] ds = \\
 & \int_0^{l_{BC}} \left[\int_0^{\epsilon_{BC}} F_{NBC} d \left| \epsilon_{BC} \right| \right] ds + \int_0^{l_{AB}} \left[\int_0^{\epsilon_{AB}} F_{NAB} d\epsilon_{AB} \right] ds = \\
 & \int_0^{l_{BC}} \left[\int_0^{\epsilon_{BC}} BA\epsilon_{BC}^{\frac{1}{2}} d \left| \epsilon_{BC} \right| \right] ds + \int_0^{l_{AB}} \left[\int_0^{\epsilon_{AB}} BA\epsilon_{AB}^{\frac{1}{2}} d\epsilon_{AB} \right] ds = \\
 & \frac{2l_{BC}}{3B^2A^2} \left| F_{NBC} \right|^3 + \frac{2l_{AB}}{3B^2A^2} F_{NAB}^3 = \frac{50F_p^3 l}{3B^2A^2}
 \end{aligned}$$

结构的应变余能为

$$\begin{aligned}
 V_C &= \sum \int_S \left[\int_0^{F_N} \epsilon dF_N \right] ds = \\
 & \int_0^{l_{BC}} \left[\int_0^{F_{NBC}} \left| \epsilon_{BC} \right| d \left| F_{NBC} \right| \right] ds + \int_0^{l_{AB}} \left[\int_0^{F_{NAB}} \epsilon_{AB} dF_{NAB} \right] ds = \\
 & \int_0^{l_{BC}} \left[\int_0^{F_{NBC}} \frac{\left| F_{NBC} \right|^2}{B^2A^2} d \left| F_{NBC} \right| \right] ds + \\
 & \int_0^{l_{AB}} \left[\int_0^{F_{NAB}} \frac{F_{NAB}^2}{B^2A^2} dF_{NAB} \right] ds = \\
 & \frac{l_{BC}}{3B^2A^2} \left| F_{NBC} \right|^3 + \frac{l_{AB}}{3B^2A^2} F_{NAB}^3 = \frac{25F_p^3 l}{3B^2A^2}
 \end{aligned}$$

【评注】 ① 在线弹性情况下, $V = V_C$, 它们都是荷载 F_p 的二次式。在非线弹性情况下, $V \neq V_C$, 应分别从拉压杆应变能和应变余能的定义出发求得。此时, 两者均为荷载 F_p 的三次式。在本题中, $V = 2V_C$ 。

② 注意到 BC 杆为受压杆件, 本构关系中的轴向应变取负值。

例 13.2 试求图 13.2(a) 所示结构的应变能和应变余能。设 $EI = \text{常量}$ 。

- (1) 材料为线弹性 ($\sigma = E\epsilon$);
- (2) 材料为非线弹性 ($\sigma = B\sqrt[3]{\epsilon}$)。

分析 此结构由基本部分刚架 $BECD$ 和附属部分梁 AB 组成。由于均为受弯构件, 略去剪力的影响, 结构的应变能和应变余