理论力学教程 上册

(物理专业用)

〔苏〕И. И. 奥里霍夫斯基 著

李松岩 邹延肃 译

高等教育出版社

理论力学教程

（物理专业用）

上　册

〔苏〕И. И. 奥里霍夫斯基 著

李松岩　邹延肃　译

高等教育出版社

1983

内容简介

本书根据莫斯科大学出版社出版的И.И.奥里霍夫斯基著《理论力学教程》(物理专业用)1978年第三版译出。原书经苏联高等教育部审定为高等学校物理专业的教科书。

本书较系统地叙述了理论力学和连续介质力学的基本理论和基础知识。对伽利略-牛顿力学的基本概念和定律，动量、动量矩和能量的变化及守恒定律，广义有势力的拉格朗日、哈密顿和哈-雅方程，以及在统一基础上处理理想流体、粘性流体和弹性体的连续介质力学规律等，都较为重视。对二体问题，散射的经典理论，非惯性系中动量、动量矩、能量定理，在有势力、回转力和耗散力作用下系统的线性振动理论，弱非线性系的克雷洛夫-波戈留波夫方法，运动方程的平均法等，都作了较详细的讨论。此外，书中还有大量关于电荷在已知电磁场中的运动、粒子散射、分子振动、非线性振动、磁流体动力学等方面的例题。

原书共十三章。中译本分上、下册出版，上册包括前七章，下册包括刚体动力学、哈密顿方程、连续介质力学的基本概念与基本定律、理想流体、粘滞流体和理想弹性体等六章，以及参考文献等。

本书可作为高等学校物理专业及有关专业的教学参考书，亦可供有关科技人员学习参考。

理论力学教程

(物理专业用)

上 册

〔苏〕И. И. 奥里霍夫斯基 著

李松岩 邹延肃 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 255,000

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数 00,001—9,880

书号 13010·0904 定价 2.45元

第三版序言（摘要）

«理论力学教程（物理专业用）»这一版和第二版不同之处，来源于本课程教学大纲的变化。关于改进教学大纲的原则，本书作者曾在第四届全苏理论力学代表大会上作过报告。据此，譬如说，删去了关于粒子衰变的材料，同时则将平均法的叙述扩展为非线性振动一章。

在进行第三版的增订工作中，作者还考虑到«物理专业理论力学习题集» (И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков 著，莫斯科大学出版社出版，1977）这本教学参考书业已问世。这本习题集与本书（第一部分）是相互配合的，它给教科书补充了大量习题。作者认为，«教程»与«习题集»实际上应当作为一套完整的教材使用，以便深入掌握理论力学这门自然科学的基础课程。

И.И.奥里霍夫斯基

目　录

第一部分 理论力学

第一章 力学的基本概念和基本定律

我们知道的一切物质客体——场、基本粒子、原子、分子、非生物和生物，就最一般的意义说来，都在运动，亦即都在变化①。物体运动最简单的形式就是它们之间的相对位移。任何其他运动形式总是和某种位移有关而又不能完全用这种位移来解释，因此是更复杂的运动形式。"研究运动的性质，当然应当从这种运动的最简单的形式开始…所以我们看到：在自然科学的历史发展中最先发展起来的是关于简单的位置移动的理论，即天体的和地上的物体的力学。"②这个理论称为**经典力学**。它研究宏观物体的运动。所谓宏观物体就是由大量原子与分子组成的物体，并且假定其运动速度与光速相比甚小。因此，经典力学就是关于宏观物体彼此相对作足够缓慢的位移的理论③。

经典力学的基本概念是关于时间与空间、力和质量、惯性参照系的概念。基本定律就是伽里略-牛顿惯性定律（牛顿第一定律），相对于惯性参照系的运动方程（牛顿第二定律），作用和反作用定律（牛顿第三定律）。牛顿在其天才著作《自然哲学的数学原理》（1687年）中表述了这些概念和定律。

从现代科学的观点看来，物体间的相互作用是通过场来实现

---

① 关于运动广义说来就是变化的问题，参见恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1971，53页。

② 见上书，53页。

③ 在某些个别的情况下，经典力学也描述微观粒子的运动。

并以有限速度（光速）传播的；实物与场的总体构成物质统一的体系。在相互作用的影响下，物体可以改变彼此的相对位置，即在**空间**中发生位移。与此同时，相互位置的改变又具有持续性，即位移不仅在空间中而且在**时间**中发生。然而空间和时间不是象物体、场等那样的客体。时间和空间是所有物质客体存在的共同形式。恩格斯强调指出："物质的这两种存在形式离开了物质，当然都是无，都是只在我们头脑中存在的空洞的观念、抽象。"① 广义相对论的建立，证实了这种时空观念的正确性。根据广义相对论奠基人爱因斯坦的意见，假如物质消失了，时间和空间也就不复存在。

经典力学研究物体在时间和空间中这样一类位移，这时物体相互作用的传播过程可以看作实际上是瞬时过程；同时，在场本身内发生的那些过程我们可以不加考虑。尽管有这个限制，经典力学的适用范围仍然是很大的（物体的速度必须远比光速小）。同样还应指出，经典力学的大量概念和分析方法在理论物理学的其他部门也是很有用的。

§ 1.1 质点、空间与时间的概念

物体的真实运动如此复杂，以致在研究它们时需要摒弃那些对所研究的运动说来属于非本质的细节。为此目的而运用的各种概念，其适用性取决于所研究的物体是在作何种运动。在这些概念中具有重要意义的是关于质点的概念。所谓**质点**就是尺度极为微小的物体；在研究真实物体运动的力学问题中，若某物体的尺度与表征该物体运动的尺度相比可以忽略不计时，质点的概念对它就可以适用。例如，在研究地球绕太阳的运动时，地球和太阳都可以看作是质点，尽管地球半径约为 6×10^6 米，而太阳半径约为 7×10^8 米。原因在于，这些尺度与地心和日心之间的距离 1.5×10^{11}

① 恩格斯：《自然辨证法》，人民出版社，1971，213 页。

米左右相比还是非常小的。在另一种情况下，当研究地球绕其轴自转时，把地球视为质点就不适合了。因为，足以表征这一运动的最大尺度，是位于地球赤道表面的某一点沿其运行的圆周之长度。显然，与该长度相比，地球半径是不能忽略的。

若干物体组成的体系，如每一物体均可视为质点，则称为**质点系**。例如，我们的银河系可以看作是由极多(恒星)质点组成的质点系；在许多气体问题中，由分子构成的气体也可看作是大量分子质点构成的质点系。从上述例子及质点的定义可以看出，质点系的概念是与物质原子结构的概念无关的。

力学中起重要作用的还有绝对刚体的概念，或简称**刚体**。凡在任意位移中各质点间的距离均不改变的质点系，就称为刚体。当然，在一定条件下或在一定时间间隔内，真实物体的各个线度实际上是保持不变的。例如，大多数恒星的年角位移约为 0.01″，因此，太阳-“恒”星系（即太阳与诸恒星组成的系统，下同——译者注）就可以在一定精确程度上且在相当长的时间间隔内被视为一种刚体。

在研究质点间的相对位置时，首要的是利用长度标准来定义距离。在连结两个质点的那条线段上，用标准长度原器“量比”的次数，就定义为两点间的距离。在 1960 年以前，采用在固定条件下某密实固体的长度为米的长度标准。根据 1960 年制定的统一国际单位制(SI)，取氪-86 原子在 $2p_{10}$和 $5d_5$ 能级之间跃迁所对应的辐射在真空中的波长的 1650763.73 倍为米的长度标准。这一标准较之旧的标准来说保证了更大的精确性。

我们来研究某一质点系 A 相对于另一质点系 S 的运动。设对于系 A 的诸位移而言，系 S 可视为刚体。则可在刚体 S 上固结一**参照系**，即以该刚体某一点 O 为原点的三个单位矢量 $\mathbf{n}_x$，$\mathbf{n}_y$，$\mathbf{n}_z$（为确定起见，设所选基准为正交右手螺旋系，见图 1.1）。系 A 的任一质点相对于所选参照系 S 而言的位置则由该点的**矢径** $\mathbf{r}$ 给

出①。将矢径 $\mathbf{r}$ 沿单位矢 $\mathbf{n}_x$，$\mathbf{n}_y$，$\mathbf{n}_z$ 所决定的三坐标轴 Ox，Oy，Oz 分解，则得

$$\mathbf{r}=x\,\mathbf{n}_x+y\,\mathbf{n}_y+z\,\mathbf{n}_z, \tag{1.1}$$

其中 x,y,z 为矢径在各轴上的投影。因此，在确定质点的位置时，就可以用所谓**笛卡儿坐标**，即 x,y,z 三个实坐标与该点成相互单值对应关系。

应该指出，在式(1.1)中已暗中忽略了质点位置的测量过程对位置本身的影响。在研究宏观物体的运动时，这是可以允许的；而对于原子现象，这种习惯性的假定就不对了。

为了确定系 A 所有各点相对于系 S 的位置，必须给出这些点的矢径。设系 A 由 N 个质点组成。则仿(1.1)，

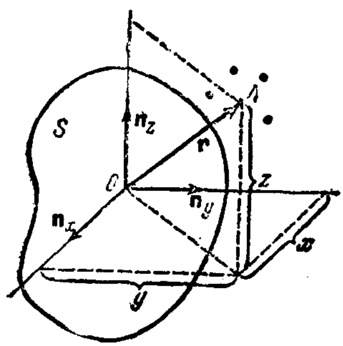

图 1.1

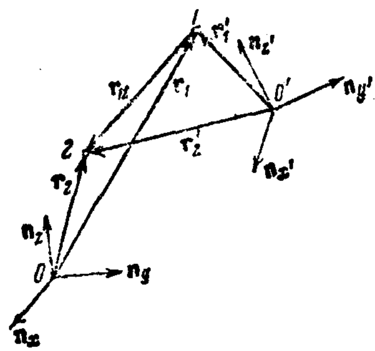

图 1.2

$$\mathbf{r}_i=x_i\mathbf{n}_x+y_i\mathbf{n}_y+z_i\mathbf{n}_z, \qquad (i=1,2,3,\cdots,N) \tag{1.2}$$

式中 $\mathbf{r}_i$——第 i 个质点的矢径，而 x_i,y_i,z_i——第 i 个质点的笛卡儿坐标。

下面，我们举一参照系的例子。为了研究太阳系各行星相对于太阳-恒星坐标系的运动，在相当长的时间间隔内，可以把太阳-恒星系视为刚体。如将原点设于太阳中心，并将指向一定的恒星的

① 今后，为简明计，我们将以"点位于位置 $\mathbf{r}$"一语代替"点位于矢经 $\mathbf{r}$ 给出的位置"的说法。

方向定为笛卡儿坐标轴的方向，就得哥白尼日心参照系。

现在来研究空间的性质．为此任取二点 1、2。这两点相对于某参照系 S 的位置由矢径 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 给出：

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{n}_x + y_1\mathbf{n}_y + z_1\mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{n}_x + y_2\mathbf{n}_y + z_2\mathbf{n}_z.$$

由点 1 到点 2 的矢量为

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

（此后下标 1,2 的次序相应于从点 1 到点 2 的矢量方向），而两点间的距离则等于矢量的模 r_{12}，即

$$r_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \tag{1.3}$$

根据对速度甚小的许多宏观物体所进行的试验，可以断定，相对于作任意运动的不同参照系而言，在给定的时刻给定空间间隔的大小是相同的，这一极重要的论断如用分析形式表出，可取两个参照系：原点在 O 并以 $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ 为单位矢量的 S 系和原点在 O' 并以 $\mathbf{n}_{x'}, \mathbf{n}_{y'}, \mathbf{n}_{z'}$ 为单位矢量的 S' 系（图 1.2）。相对于 S 系点 1 与点2 之间的距离等于 r_{12}，而相对于 S' 系的距离则等于

$$r'_{12} = |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|,$$

其中

$$\mathbf{r}'_2 = x'_2\mathbf{n}_{x'} + y'_2\mathbf{n}_{y'} + z'_2\mathbf{n}_{z'},$$

$$\mathbf{r}'_1 = x'_1\mathbf{n}_{x'} + y'_1\mathbf{n}_{y'} + z'_1\mathbf{n}_{z'}.$$

可以断定，无论“带撇”参照系相对于“不带撇”参照系作何运动，在同一时刻所取的距离 r_{12} 与 r'_{12} 总是彼此相等的，即：

$$[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$$
$$= [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2]^{1/2} \tag{1.4}$$

式中 $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta x' = x'_2 - x'_1$，如此等等。由假设 (1.4) 可以得出，矢量 $\mathbf{r}'_{12}$ 在 S' 系诸轴上的投影与矢量 $\mathbf{r}_{12}$ 在 S 系诸轴上的投影互为**正交变换**，即符合下列变换：

$$\Delta x' = a_{x'x}\Delta x + a_{x'y}\Delta y + a_{x'z}\Delta z$$
$$\Delta y' = a_{y'x}\Delta x + a_{y'y}\Delta y + a_{y'z}\Delta z \tag{1.4'}$$

$$\Delta z' = a_{z'x}\Delta x + a_{z'y}\Delta y + a_{z'z}\Delta z$$

式中系数 $a_{i'j}$ 满足**正交性条件**

$$a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 + a_{z'x}^2 = 1, a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y} = 0,$$
$$a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 + a_{z'y}^2 = 1, a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z} = 0, \quad (1.4'')$$
$$a_{x'z}^2 + a_{y'z}^2 + a_{z'z}^2 = 1, a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z} = 0,$$

并等于 S 与 S' 的单位矢量之间交角的余弦(如 $a_{xx'}$ 即为 $\mathbf{n}_x$ 与 $\mathbf{n}_{x'}$ 之交角的余弦)。

大家知道,凡其中任意两点的距离均由式(1.3)规定的空间,叫做欧几里德空间。因此,根据由实验证明的假设(1.4)可以得出结论:经典力学中的空间都是欧几里德空间①。

变换(1.4′)不难表如下式:

$$\mathbf{r}'_{12} = \mathbf{r}_{12}, \quad (1.5)$$

式中
$$\mathbf{r}'_{12} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = (\Delta x')\mathbf{n}_{x'} + (\Delta y')\mathbf{n}_{y'} + (\Delta z')\mathbf{n}_{z'} \quad (1.5')$$
$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\Delta x)\mathbf{n}_x + (\Delta y)\mathbf{n}_y + (\Delta z)\mathbf{n}_z.$$

而系 S 与系 S'的单位矢量之间有下列关系:

$$\mathbf{n}_x = a_{x'x}\mathbf{n}_{x'} + a_{y'x}\mathbf{n}_{y'} + a_{z'x}\mathbf{n}_{z'}$$
$$\mathbf{n}_y = a_{x'y}\mathbf{n}_{x'} + a_{y'y}\mathbf{n}_{y'} + a_{z'y}\mathbf{n}_{z'} \quad (1.5'')$$
$$\mathbf{n}_z = a_{x'z}\mathbf{n}_{x'} + a_{y'z}\mathbf{n}_{y'} + a_{z'z}\mathbf{n}_{z'}.$$

从 (1.5) 可以得到一个简单而重要的同一点相对于不同参照系的矢径之间的关系。设 $\mathbf{r}_{O'}$为系 S'的原点相对于系 S 的矢径,$\mathbf{r}$ 为一点相对于系 S 的矢径,而 $\mathbf{r}'$为同一点相对于 S'的矢径。在这种情况下,令 $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}, \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}', \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{O'}, \mathbf{r}'_1 = 0$,根据(1.5)可得:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \quad (1.6)$$

再一次强调,(1.5)及 (1.6)式只有在经典力学中才成立。如果物

① 牛顿强调指出:"……直线与圆是几何学的基础,而画它们则属于力学的范围。几何学并不教我们怎样画直线和圆,只要求(假定)人们能把它们画出来"。"因此,几何学是建立在力学的实践之上的"(摘自牛顿给《自然哲学的数学原理》第一版写的序,见[美] H. S. 塞耶编,《牛顿自然哲学著作选》,上海人民出版社,1974,第 10 页)。

体的速度与光速相比并不是小到可以忽略，则这些“明显”的假设就不正确了。物体以任意速度运动的（包括与光速相比拟的运动）问题将在爱因斯坦相对论力学中去研究。

在力学中周期过程即有规则地重复发生的现象的概念起重要作用，例如，摆动，地球自转，地球绕日运动都是这类过程。凡可实现周期过程的物体，都可作为计时器，而其周期的持续时间则可作为时间标准。当然，真实周期过程的周期的持续时间只有在一定的精确度范围内才是常数。在1960年以前，时间标准曾是平均太阳日的若干分之一。鉴于地球转动的不规律性（已由原子钟的实验证明）和平均回归年的变化，国际单位制中的时间单位秒取为：铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9192631770个周期的持续时间①。

在经典力学中，假定存在着在任意位移中不改变其周期的那种时钟。这种钟可以在任意参照系中测出不同过程的持续时间，并能确定：相对于任意运动着的不同参照系某一给定时间间隔的持续时间是相同的，即

$$t_{12}=t'_{12}. \tag{1.7}$$

这里 $t_{12}=t_2-t_1$，表示一定过程相对于系 S 的持续时间；$t'_{12}=t'_2-t'_1$ 表同一过程相对于系 S' 的持续时间。此外，还假设在对某一过程的持续时间进行测量时不会影响持续时间本身的长短。

根据(1.7)，在任意参照系中，可以任意选择同一计时原点，从而引入一个时间«坐标» t，只要宏观物体的运动速度与光速相比可以忽略，假设(1.7)与假设(1.5)一样成立②（注见下页）。

利用上述那些概念与假设，可以用实验方法确定质点运动规律，即相对于给定参照系 S 确定质点在任一时刻的位置，并藉助于

---

① 原书的国际单位制“秒”是1967年十三届国际计量大会前的标准，即1秒为1900年1月0日历书时12时算起的一个回归年的1/31556925.9747，译文已按目前标准更正。——译者注

该质点的矢径将此位置表为时间的函数

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t) \tag{1.8}$$

这矢径末端在空间中所描出的曲线称为**质点的轨迹**。

应该指出，在经典力学中既假定了坐标的连续性，也假定了时间的连续性；从而也假定了函数(1.8)的连续性。

质点矢径的无穷小增量 $d\mathbf{r}$ 与矢径发生上述改变时所经历的无穷小时间间隔 dt 之比，称为相对于参照系 S 的**质点速度**。$d\mathbf{r}$ 就是相对于单位矢量固接在刚体 S 上的参照系 S 的增量。因此，质点相对于系 S 的速度 $\mathbf{v}$ 等于在单位矢量 $\mathbf{n}_x$，$\mathbf{n}_y$，$\mathbf{n}_z$ 恒定的情况下矢径对时间的导数(图 1.3 a)：[3]

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}} \tag{1.9}$$

其中

$$\dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

质点相对于系 S 的**加速度** $\mathbf{w}$ 定义为在单位矢量 $\mathbf{n}_x,\mathbf{n}_y,\mathbf{n}_z$ 恒定的情况下，速度对时间的一阶导数。考虑到(1.9)式，加速度也可写作 $\mathbf{r}$ 对时间的二阶导数，因此，

$$\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}} \tag{1.10}$$

其中

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{d\mathbf{v}}{dt},\quad \ddot{\mathbf{r}}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}$$

在不少问题中用到**质点的扇形速度** σ 的概念，按照定义它等于

$$\sigma=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}. \tag{1.11}$$

---

② 牛顿实质上用过(1.5)和(1.7)这两条论断。但是，牛顿把它们变为绝对假设，因而其观念是把时空看作包含许多物体与事件的“空”容器。牛顿写道：“不论其运动是快是慢，或者根本不运动，一切存在的事物的延续性或持久性总是一样的。……”“与时间各个部分的次序不可改变一样，空间各个部分的次序也是不可改变的”(《牛顿自然哲学著作选》，22 页)。

③ 质点速度 $\mathbf{v}$ 有时称为线速度。

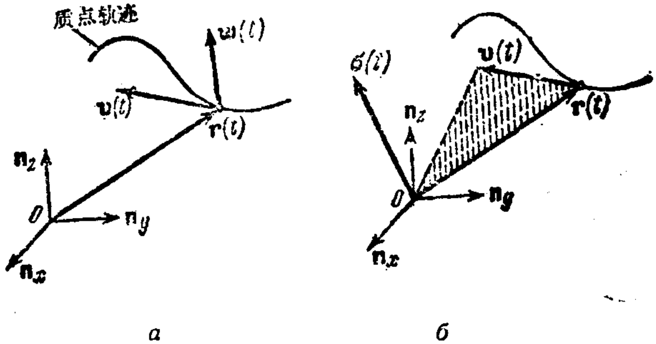

图 1.3

而$\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}$的数值则等于质点作元位移 $d\mathbf{r}$ 时矢径所扫过的面积。因此，扇形速度的模就等于质点的矢径扫过的面积变化的速度(图 1.3 б)。有时还研究扇形加速度 $\dot{\sigma}$。

质点的矢径、速度和加速度，可以用不同的坐标系表示出来。

在笛卡儿坐标系中，质点的矢径用时间的函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$三个坐标给出。这一矢径就决定了该点在任一时刻相对于参照系 S 的位置。在 $\mathbf{n}_x$，$\mathbf{n}_y$，$\mathbf{n}_z$ 恒定的情况下将矢径 $\mathbf{r}(t)$ 对时间微分，即得质点的速度及加速度，它们具有下列形式：

$$\mathbf{v}=\dot{x}\mathbf{n}_x+\dot{y}\mathbf{n}_y+\dot{z}\mathbf{n}_z, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{w}=\ddot{x}\mathbf{n}_x+\ddot{y}\mathbf{n}_y+\ddot{z}\mathbf{n}_z. \tag{1.13}$$

因此，速度与加速度在笛卡儿坐标上的投影相应为：

$$v_x=\dot{x},v_y=\dot{y},v_z=\dot{z};$$

$$w_x=\ddot{x},w_y=\ddot{y},w_z=\ddot{z}. \tag{1.14}$$

在柱面坐标系中，$\mathbf{r}(t)$由标量函数 $\rho(t)$，$\varphi(t)$，$z(t)$ 给出如下(图 1.4)：

$$\mathbf{r}=\rho\mathbf{n}_\rho+z\mathbf{n}_z, \tag{1.15}$$

其中柱面坐标系的单位矢量与笛卡儿坐标系的单位矢量有以下关系：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_\rho &= \mathbf{n}_x \cos\varphi + \mathbf{n}_y \sin\varphi, \\
\mathbf{n}_\varphi &= -\mathbf{n}_x \sin\varphi + \mathbf{n}_y \cos\varphi, \\
\mathbf{n}_z &= \mathbf{n}_z
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

当质点相对于系 S 发生位移时，单位矢量 $\mathbf{n}_\rho$ 与 $\mathbf{n}_\varphi$ 的位置也发生改变，而单位矢量 $\mathbf{n}_x,\mathbf{n}_y,\mathbf{n}_z$ 则是固定的。考虑到这一点，将 $\mathbf{r}$ 对时间微分后即得：

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{n}_\rho + \rho\dot{\mathbf{n}}_\rho + \dot{z}\mathbf{n}_z,$$

还应注意，根据(1.16) $\dot{n}_\rho = \dot{\varphi} n_\varphi$，可得质点相对于系 S 的速度表示式

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{n}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi + \dot{z}\mathbf{n}_z \tag{1.17}$$

因此，速度在坐标轴(ρ)，(φ)，(z)上的投影分别等于

$$v_\rho = \dot{\rho},\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi},\ v_z = \dot{z} \tag{1.18}$$

同样，将 $\mathbf{v}$ 对时间微分，考虑到 $\mathbf{n}_\rho,\mathbf{n}_\varphi$ 与 $\varphi(t)$ 的关系，可将质点相对于参照系 S 的加速度写为在柱面坐标系中的分解形式：

$$\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{n}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})\mathbf{n}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{n}_z \tag{1.19}$$

于是，加速度在(ρ)，(φ)，(z)各轴上的投影分别等于：

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\ w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}),\ w_z = \ddot{z}. \tag{1.20}$$

应该指出，加速度的分量 w_φ 与扇形速度 σ_z 之间有如下关系：

$$w_\varphi = \frac{2}{\rho}\frac{d\sigma_z}{dt}, \tag{1.21}$$

这是因为根据(1.11)，(1.15)及(1.17)，

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}. \tag{1.22}$$

在球面坐标系中，质点的矢径由函数 $r(t),\theta(t),\varphi(t)$ 给出(图1.5)。矢径在球面坐标系各轴上的分解及球面坐标系的单位矢量可由下列各式确定：

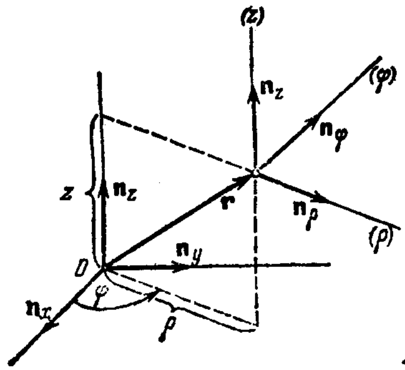

图 1.4

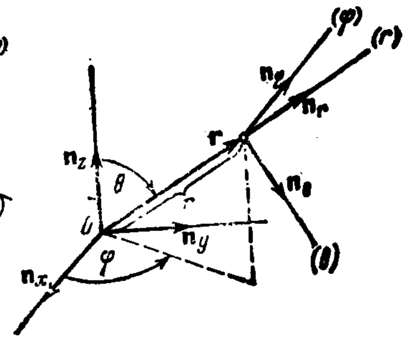

图 1.5

$$\mathbf{r}=r\mathbf{n}_r,$$
$$\mathbf{n}_r=(\mathbf{n}_x\cos\varphi+\mathbf{n}_y\sin\varphi)\sin\theta+\mathbf{n}_z\cos\theta,$$
$$\mathbf{n}_\theta=(\mathbf{n}_x\cos\varphi+\mathbf{n}_y\sin\varphi)\cos\theta-\mathbf{n}_z\sin\theta,\qquad(1.23)$$
$$\mathbf{n}_\varphi=-\mathbf{n}_x\sin\varphi+\mathbf{n}_y\cos\varphi.$$

考虑到 $\mathbf{n}_r,\mathbf{n}_\varphi,\mathbf{n}_\theta$ 各单位矢量的方向与质点所处的位置有关，即可得到质点速度的表示式①

$$\mathbf{v}=\dot{r}\mathbf{n}_r+r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta+r\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi.\qquad(1.24)$$

因此，质点速度在坐标轴(r)，(θ)，(φ)上的投影分别为：

$$v_r=\dot{r},\quad v_\theta=r\dot{\theta},\quad v_\varphi=r\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\qquad(1.25)$$

有时还运用质点运动的**自然坐标法**，这时将质点轨迹的弧长 s 作为质点矢径的宗量，而弧长本身则表为时间的函数：

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s),\quad s=s(t)\qquad(1.26)$$

(弧长从质点的初位置算起并沿其运动方向计算。)

用轨迹的每一点上的矢量函数 $\mathbf{r}(s)$ 能确定三个单位矢量，这三个单位矢量组合为所谓**自然三面体**(图 1.6 a)。这些单位矢量

① 加速度在球面坐标系中各轴上的投影可以用更简单的方法求出(参见§5.4例题5.7末段)。