科學圖書大庫

決策理論導引

譯者　黃學亮

徐氏基金會出版

譯　序

本書譯自美國加州大學管理研究所副教授 J. Morgan Jones 所著之 Introduction to Decision Theory (1977)。Irwin 公司以出版管理書籍而聞名，本書係該公司之計量管理叢書之一，自有其價值。

近年來我國在各公民營企業與學術界之大力推動下，使得管理科學之理論與應用由生根而茁壯。決策理論是管理者在風險下做決策之利器，故深得管理者所重視。但是學大多散見於一般作業研究之書籍中而未及深入或見於一般理論性之專門著作致使陳義過多而不便應用。至於專門研究決策理論在管理上之應用之書籍則少之又少。譯者之所以選擇此書，實乃因爲此書有以下諸優點：

(1) 深入淺出：全書所用之數學只限於簡單之機率方法間或少許微積分，適於大中學生及一般管理人士研究。

(2) 個案探討：本書有許多個案。原作者在不同場合透過不同之方法做巧妙之處理。

(3) 實用：本書第十三章即研究如何由理論走向實務，對於事先機率 (Prior probability) 之建立尤有價值。

譯書本是一件艱辛的工作，以譯者之學力尙難做到信達雅三者並顧之地步，故於不違背原作者意旨之原則下，在文字上做少許變動。

譯者在公餘下，匆忙翻譯復加上才疏學淺，謬誤之處在所難免，尙請海內外方家斧正以匡不逮，則譯者不勝感激。

黃 學 亮 敬誌

目　　錄

譯　序

第一章　導　言

1.1　爲何要學決策理論？………………………………………… 1
1.2　什麼是決策理論？………………………………………… 4
1.3　對未來的一眺………………………………………… 5

第二章　一些機率工具

2.1　爲什麼要學習機率？………………………………………… 6
2.2　事件之機率………………………………………… 6
2.3　機率法則及其使用………………………………………… 15
2.4　隨機變數和期望值………………………………………… 24
2.5　摘要………………………………………… 36

第三章　在沒有抽樣情況下分析問題

3.1　決策理論問題之特性………………………………………… 42
3.2　選擇最佳行動的方法………………………………………… 44
3.3　機會損失之觀念………………………………………… 48
3.4　大中取小損失………………………………………… 50
3.5　這些技術之摘要——一個邁克買車問題之分析………………… 53
3.6　決策樹………………………………………… 54
3.7　摘要及展望………………………………………… 58

第四章　期望值準則之進一步分析

4.1　期望值準則之一個探討………………………… 64
4.2　效用理論………………………………………… 67
4.3　再回到期望值…………………………………… 81
4.4　貨幣曲線之效用………………………………… 84
4.5　條件效用對條件償付…………………………… 89
4.6　效用之其他層面………………………………… 93
4.7　摘要及預測……………………………………… 94

第五章　簡單抽樣情況下之分析

5.1　抽樣觀念………………………………………… 100
5.2　策略及其使用…………………………………… 101
5.3　抽樣成本之配合………………………………… 107
5.4　一個進一步之例子……………………………… 108
5.5　用決策樹來解…………………………………… 111
5.6　出版商問題之決策樹分析……………………… 118
5.7　摘要……………………………………………… 121

第六章　二項抽樣問題(I)

6.1　二項抽樣之機率面……………………………… 127
6.2　二項抽樣中之一組事件………………………… 132
6.3　例題一則………………………………………… 133
6.4　二項抽樣問題之策略…………………………… 135
6.5　n 固定時找最佳策略………………………… 137
6.6　簡捷計算法……………………………………… 139
6.7　鳥瞰和另一個例子……………………………… 143
6.8　摘要……………………………………………… 149

第七章　二項抽樣問題

7.1 抽樣的觀念……155
7.2 最佳樣本個數之決定……156
7.3 摘要……164

第八章 二項抽樣問題判斷之懸空

8.1 一個已得樣本的分析……166
8.2 判斷的懸空，或在一組樣本之成果已知時考慮採取另一組樣本……172
8.3 摘要……

第九章 連續型機率分配之導引及其在決策理論問題之應用

9.1 連續分配的一般觀念……182
9.2 從機率密度函數求機率……184
9.3 連續機率分配之平均數及變異數……184
9.4 連續機率分配之平均數及變異數的導出……185
9.5 有用的連續機率分配……186
9.6 當事先分配是連續型時之決策……192
9.7 摘要……206

第十章 二項抽樣問題（Ⅲ）

10.1 連續事先分配之補充……209
10.2 修正後之Beta分配……213
10.3 用Beta事先做事後抽樣之決策……214
10.4 涉及抽樣的問題……216
10.5 摘要……224

第十一章 在平均數爲事件時做決策

11.1 二個例子……228
11.2 償付函數分析……230
11.3 對這些問題做一決策……233

11.4 用常態分配做爲事先……………………………………234
11.5 常態分配之困難是……………………………………247
11.6 南咖啡之附註……………………………………246
11.7 摘要……………………………………247

第十二章 在抽樣時有關平均數之決策

12.1 統計入門…………………………………… 252
12.2 常態事先用常態抽樣來補充資料 ………………… 261
12.3 樣本個數固定時策略之求決 ………………… 272
12.4 求最適樣本個數………………………………… 275
12.5 摘要 …………………………………… 281

第十三章 定向實際科學

13.1 事先分配之建立………………………………… 286
13.2 無共軛事先時解常態抽樣問題……………………… 304
13.3 線性價付假設之改變對問題有何影響？ ……………… 310
13.4 摘要 311

第十四章 我們將朝那個方向前進

14.1 你已學到了什麼………………………………… 315
14.2 你還沒學會去解的有那些問題 ………………… 316
14.3 技術人員需要進一步地去研究那些 ………………… 318
14.4 決策理論要往那裏走………………………………… 318

附 表

第一章 導　言

本書是對決策理論做一介紹，這是研究如何在不確定狀況下做決策的一門學問。例如，一個公司能對新工廠的規模做一決策，此有賴於此工廠產品之未來需要量，而未來需要量是不確定的。這是決策理論所討論的典型問題。在面對一些不確定事件（Event）中（其發生並不受決策者所控制）必需選擇一行動（Action）。決策理論將提供一些特殊方法來處理這種問題。

本章中我們首先要問為什麼要學決策理論，再譯述何謂決策理論，最後以全書之輪廓來做一結論俾使學生能體會學習方向。

1.1　爲何要學決策理論

每個學生打開本書應該（在某個點上）會自問這個問題。事實上這可能在兩個不同之場合中提出。第一類背景是來自自認其生活經驗足以使成爲一個很好決策者而迷惑何不要花時間去學習本書材料的學生？第二類在方法論上之背景是不純正的，有些學生知道欲習知本書之材料需要很多的數學及其有關之知識如機率及統計。在此場合中，他們的問題可以用像下面的說法來表示：我不想去學一個都是數學之課程，這對我又沒啥用處，我爲何要煩心去學它呢？在時間和精力之投資並不能產生合理的報酬。

我們將回答上面第一個觀念問題，以後的課文在觀念上的確沒有重要的突破。本書做決策的方法對任何決策者在決策時將有所啓發。下一節將更精確地討論這個方法之內涵，但我們在此先大概地說一下。決策理論的基本觀念是一個行動所產生的幾個結果，並決定各不確定事件發生的機會，然後結合這二組數量以求得最佳決策。這是任何有理性的決策

者所在觀念上所用的架構。決策理論在理論與實務上之分野乃在於前者是精確的。精確度是很重要的，因爲人類是一個很不精確的情報處理者(Imprecise information processors)，在決策理論中有二種方式產生了不精確，這裡只能做啓發性的敍述，因爲迄今我們還沒有能使它們精確的數學方法。

人們所遭遇的第一個不精確性是來自對很大或很小數目之眞實觀念。雖然(在某些合理的估計範圍內)每個人都能指出一分鐘的這段時間已過去了，如果沒有用數學轉換成日或小時等，人們對決定1,000分鐘有多長的能力還是很弱的，決定1,000,000分鐘有多長的能力更糟。因爲與1相對下，大多數的人對1,000有多大的觀念很差，對100,000有多大的觀念更糟。因此，一個決策問題在任何時候。任何結果或機會中，它的各値都在一個很有限的範圍之中，人們在處理它們時都變得很不精確。

在人們決策之過程中第二種不精確是來自對抽樣情報(Sample information)之不當解釋。本書有幾章將分析不確定事件之增額情報(Additional information)。全書假定情報並不能對精確的回答那個事件將要發生只是(希望能夠)給予一個較佳的指示(Indication)。人們對情報的適當解釋之給予能力是很弱的。來發(Raiffa)曾用一段逸事來做精彩的說明：(註一)

艾德華教授(Prof Ward Edwards)。(他是密西根大學的一位心理學家)曾經觀察許多實驗性的機率性的事件之直覺反應。他對某個實驗提出了下列問題。

我有二個裝滿了撲克牌的帆布書袋。在第一個袋子中有70張綠色的紙牌和30張白色的紙牌，姑稱它爲"綠色爲主的袋子"(Predominantly green bag)。第二個袋子裡有70張白色的紙牌和30張綠色的紙牌，姑稱它爲"白色爲主的袋子"(Predominantly white bag)。這些紙牌除了顏色外其餘均一樣。現在把二個袋子混合起來，

註一：見Howard Raiffa；Decision Analysis：Introductory Lectures on Choices under Uncertainty (Addison-weshy，1968) pp 20-21.

而無所區別然後將其中一袋放在一邊則依你的判斷，其餘的那個袋子是否“主要爲綠色”。假定你從其餘的那個袋子以抽後放回的方式取出了12張紙牌，結果依某種排列順序中有8張是綠色的而有4張是白色的。則你認爲你所抽出的袋子是“綠色爲主的袋子”之機會有多大？

前幾天在一次雞尾酒會中，有一群律師正在討論機本事件之解釋。我問他們有關艾德華教授之實驗。首先，他們想知道在這項實驗之行動中是否有任何惡意的預謀。我向他們保證這項實驗者的“中立性”(Neutrality)，並且告訴他們，在做任何抽樣前，對“主要爲綠色”的機會配置成0.5是適當的。

一位律師想了一會兒後宣布「在這個情形下，我願打賭這個未知袋子是“主要爲白色”的」。

「不，你不知道」，他的一位同事辯駁道「你已從袋子中抽出了8張綠色和4張白色的紙牌，而不是8張白色和4張綠色的」。

「是的，我知道，在我的律師經驗中，生活常有乖違情事發生，但我仍賭這個袋子“主要是白色的”。我實在不是一個會打賭的人」

其他的律師也都同意這樣做並不很合理——事實顯示這個袋子對““主要爲綠色”的是有利。

我堅持地問：「但機率多多少?」過了一會兒有一個一致的回答:「這證據是很貧弱的，勝算可能從50-50上升到55-45，但“……身爲律師的我們已被養成多疑的態度，所以可能使我們的最佳判斷往下偏傾，而做的勝算彷彿仍近乎50-50。

這個“多多少”的解答可由直接計算而得，……並且對這答案沒啥好辯的。在已知八張綠的四張白的紙牌組樣本(Sample)下，袋子是“主要爲綠色”之機率爲0.964。是的，0.964。這個袋子主要爲綠色“超過了”合理之懷疑。這個做事指出了一個事實，那就是多數的問題中小樣本之力量往往被低估，上面所描述之所有律師均有極端反應，甚至我的學統計的學生之猜測也多集中在0.70。

在人類決策過程所產生印像之結果，本書方法對求最佳解是有價值的。因此，對那些自認有足夠知識來做決策的人而言，我們說在觀念上

他是正確的，但在方法上他對本書之方法在研習及應用上可能會吃力。本書將在這些方面來協助他。

對那些擔心會投資時間去學數學的學生，這回答實際上就是我們上面所討論的另一種形態。決策理論最重要的是在於對它所需要之數量（機率及償付），有能力使之精確及知道如何計算。因此數學是絕對必需的。決策理論若無數學則猶如一幢沒有鷹架之建築物，二者可能都像是一堆無意義之碎石堆。

同時也要提醒那些擔心學所有數學之學生，本書儘可能減少數學負擔，並提供一個令人愉快之途徑。因此除了對數學有相當涵養的讀者外，其他的讀者均能享受到本身之旨趣，但他們也會爲到本書豐富之內容而感到負擔。但畢竟本書之目的是爲那些怕數學的人而寫的，對數學熟練的讀者而言，他們可在此課程之其他許多優良讀本中做一些選擇。

1.2 什麼是決策理論？

決策理論能用一個例子來徹底說明。假定明天上午醒來時，發現窗外天色是陰暗的。那可能意味著在這天結束前將會下雨，所以你要考慮攜帶一些遮雨的工具，譬如說是傘。這是一個典型之決策理論問題。在各問題中我們要在許多可能行動中做一選擇。本例中有二個行動：

1. 今天帶傘；
2. 今天不帶傘。

這些事件（Occurrence）中有一個將發生。但不同行動之結果有賴於那一事件發生。對不同之事件就有不同之最佳行動。在選傘問題中、若雨天你不帶傘之結果是你會淋濕，反之，在下雨時帶傘則會爲整天帶傘而感到討厭。

決策理論問題之要點是我們必需只選一個行動，而且必需在知道那個事件發生前選擇一個行動。我們已發展出處理這幾種問題之程序，它是要考慮不同行動之結果（此可預先假定依那個事件發生而改變。）及不同事件發生之機會來做最後決策。同樣的方法提供了決策理論之觀念基礎，甚至給予所有我們在這兒要介紹之架構，但仍有許多依然爲未知。本文將處理這些未知事項，它們可分爲三個不可或缺的問題：

1. 如何（即用觀念上之過程）結合所有之機會及結果來進行決策?

2. 決策理論是以這些機會及結果爲根據。因此，我們如何，更重要的是，我們能不能決定這些機會及結果之數量？

3. 若我們有權去找關於“那一事件將發生”之更多的情報，應如何使此情報合併於問題之結構中？

1.3 對未來的一眺

本書之第三至十四章將致力回答這三個重要問題。在能研讀本教材前，學生必需對機率及隨機變數（Random variable）之觀念有一基本之了解，這部份列在第二章中。學生對該章教材之了解是很重要的，因爲它形成爲本書其餘教材之基礎。

一旦熟悉第二章之教材後，便能繼續第三到第十四章中更刺激之課題。決策理論是一門有趣的學問，它在觀念上是很容易，但方法上却有困難。因此，在第四章結束前，學生將已學到上述頭二個問題之基本解法然後第五章將續以二種不同方式來解答增額情報（Additional intormation）。因此，在第五章結束前，學生將已學會決策理論之所有觀念。

決策理論在觀念上是很直接的，但在方法上却不然。一旦有了第三章到第五章之觀念後，第六章到第十二章應用這些觀念的方法到二個最常發生之實際情況。第六到第十章是關於“機率之數值是不確定事件”之情況。第十一到十二章是討論關於“平均數爲未知事件”之情況下之方法。

第十三章是一個十足是從數值分析到統計學之課題與技術的混合體。它是爲已學過本書之學生而設計的，俾使他能夠實際地應用本書之觀念與方法。結果，作者已發現到這個各種事實和技術之摘要在理論上方法上乃至實際應用上都是有用的。

第十四章是討論本書涵蓋了那些部份，更重要的是指出了本書所未涵蓋之部份，以及決策理論之未來發展及其在應用上的展望做爲全書的結束。

第二章　一些機率工具

本章致力研究機率之基本觀念，以瞭解決策理論之最基本部份。因此將決策理論的導引部份順延到第三章。

2.1　爲什麼要學習機率

正如第一章所說的，決策理論是研究在不確定情況下如何做最佳決策的一門學問。因爲不知道那個事件將會發生因而產生了不確定性。爲了使用決策理論中的各種方法，除了知道不確定的存在外，尙需知道（或者願意做有訓練的猜測）各種事件之相對概度（Relative likelihood）。例如，當你上午醒來的時候，必須決定今天是否要帶傘去上課。因爲今天的天氣多少帶有不確定性，所以你必需做決策。爲了要用決策理論所述的方法來解答這個問題，你便要知道（在其它事情中）今天是雨天的相對機會（Relative chances）。如果下雨的機會是$3/4$而非$1/20$，那你所做的決策可能就要改變了。這就是不但要知道（Acknowledge）不確定性，同時還要能實際地把它數量化的重要性了。

本章從本書所用的兩種機率形態中之一種的定義開始，然後以大量的時間來說明如何用不同的方法來處理各機率以獲得其它之機率，最後以隨機變數（Random variable）——一種特殊的機率現象做爲結論，我們將會發現它們在決策理論中有很重要的用途。

2.2　事件之機率

2.2.1　做事件表：爲了使不確定事件之相對機會加以數量化，我們需要一張包含所有事件的表（List）。如果不知道這些不同事件中何者會發生那我們怎能對它們配置（Assign）相對機會呢？做這種表常是一

件困難的工作。有一種可能有用的方法，那就是連續的二元化(dichotomization)技術。例如在上述有關帶傘之決策問題中，我們首先可將天氣化分成“下雨與不下雨”二類，然後在“下雨”這個分類中又可細分成“小雨或大雨”二類，而在“不下雨”這個分類中則可細分成“濕雪或所有其它”，故在一連串之連續的二元化下，這個問題之四個(有關)事件的表是：

小雨、大雨、所有其它

這個區分對雨傘問題之分析上可能業已足夠。

二元化技術在使用上有二個要點：第一：在每一類之分割上不需有相同之個數。例如，在不下雨這個事件中不需再行進一步地行二元化之劃分。(尤其是在不下雪的地區)。在此情形下，表中只需三個最後事件而非四個。選擇事件的要點是必需包含“所有必需是有關的而且是不同的”(All relevant and differentiable)(對成果(Outcome)而言)狀態。

二元化過程之第二個形態是在最後的表中常常至少有一個事件是“所有其它”事件(Collective“All Else”event)之集合。決策理論並不需要一張包含所有已知事件的表，只需列出那些成果不同而需特別列出之事件。例如，在雨傘問題中，“所有其它”這個天氣狀況之分類包含很廣“好天氣”、“暴風雨”皆是。它們間有明顯的差異，在此問題中只要這二種天候中之一種便不需要用雨傘，因而把它們放在同一個分類中。因此，決策問題並不需要一個包含所有事件的表，相反地，只有需要特別知道的不同行動之成果的有關事件才需列表。所有其它成果能集合在“所有其它”之分類中。

做出有關之事件表，事件之集合必需遵守二個性質：第一：它必須互斥(Mutually exclusive)，意即若表中之一事件發生，則其它事件不能同時發生。第二：它必須周延(Collectively exhaustive)，意即每次必須有一事件發生，它的另一種解釋是：沒有任何事件會被遺漏。因此，表外之事件便不可能發生。用二元化過程所做出之事件表能自然地滿足這二種特性，其它方法則需小心檢查是否能滿足以上的二個特性。

用一些簡例來說明一事件表之完成。讀者要小心地研究，這些例子

將在以後幾節中被提到。它們有一部份是大家熟悉之一般隨機設計。有些例子將說明更複雜(從而不明顯)之情況。

1. 機率方法(Probabilistic mechanism)中最平常的例子是擲銅板。每次擲出之成果是不確定的。成果(事件)表是:

H=擲一銅板將出現正面。

T=擲一銅板將出現反面。

若我們對銅板立起來之可能性忽視不計(這似是一個很不可能的事件),上述是發生(Occurrence)之完整表。它是周延且爲互斥。擲同樣的銅板一次,若出現正面便不會出現反面,反之亦然。

2. 其次最平常的例子是擲骰子。擲一骰子其成果(事件)爲:

1 —出現 1 點	4 —出現 4 點
2 —出現 2 點	5 —出現 5 點
3 —出現 3 點	6 —出現 6 點

此表亦爲互斥且周延。

3. 擲二粒骰子,其成果定義爲二骰子所擲出之點數和,則此事件表爲:

2 —二骰子擲出之點數和爲 2

3 —………………………… 3

⋮

12 —…………………………12

此表亦爲互斥且周延。

4. 擲二骰子時亦能定義其它成果。例如成果可定義爲二骰子點數之最大者。此時之事件表將爲:

1 —二個骰子擲出最大點數爲 1

2 —……………………………… 2

⋮

6 —……………………………… 6

5. 其它能用之較不熟悉之情況如擲大頭針。其成果爲:

U＝大頭針之針點向上

L＝大頭針之帽邊貼地

這些互斥周延成果繪於圖 2-1。

圖 2-1

6. 某地有三種天氣；好天，下雨及下雪，顯然此成果表爲：

F＝今天是好天

R＝今天是雨天

S＝今天下雪

7. 某種產品之每天需求量是 0，1，4 個單位。成果表爲：

0＝今天需要 0 個單位

1＝今天需要 1 個單位

4＝今天需要 4 個單位

以上之討論及例子表說明了日後要討論之事件。本節之其餘部份將討論計算這些事件機率的觀念、性質，及方法。

2.2.2 機率：觀念及性質　何謂機率？機率是表示某將要發生某事件之相對機會（Relative chance）的一個數值，因其有"相對"的字義，所以其值介於 0 與 1 之間。機率爲 0 表示一事件將永遠不會發生，機率 1 表示爲一"確定事件"——一個事件一定會發生。對那些可能會發生但無法確定成果之事件，便用分數來表示他們之機率。例如，擲銅板一次，我們幾乎可確定地說銅板不會立起來，因此擲單一銅板一次，銅板上起來的機率爲 0。而且，它有二個事件，"正面"及"反面"，這形成了一個可靠的事件表，對任一正常之銅板，這二種情形中之一個一定會發生，這二事件發生之機率介於 0 與 1 間。我們常假設每個事件發生機會相同，則它們發生之機率各爲½。

若用簡便記號來討論機率將會很方便。以後用 $P(E)$ 表示事件 E 發生之機率。例如，擲一均勻銅板一次，

$$P(\text{正面})=\frac{1}{2}\;;\quad P(\text{反面})=\frac{1}{2}$$

我們用例1中諸事件之縮寫；可得

$$P(H)=1/2 \quad ; \quad P(T)=1/2$$

機率之一般性質——它們介於0與1間——能用符號寫成

$$0\leq P(E)\leq 1$$

此可適用於任意事件E之一般法則。

在計算機率時常有意對事件行某種合併（Combination）。它們是用“or”（或）和“and”（且）表示。用“且”法之合併將在以後討論。二個事件用“或”字合併其義爲其中一個發生或二者同時發生。例如，

$$H\text{或}T$$

表示在擲單一銅板時，正面或反面二者中有一發生，其發生之機率記爲：

$$P(H\text{或}T)$$

擲一銅板時H和T是僅有之二個可能事件。用機率之觀念此即：

$$P(H\text{或}T)=1$$

這命題不僅對擲單一銅板成立，同時對任何周延之事件表亦能成立。所以，我們能說如果A，B，C，D表某個問題中之一組周延事件之集合，則

$$P(A\text{或}B\text{或}C\text{或}D)=1$$

除了上述二個特性外，事件機率尙有一更基本之特性。若A，B爲二互斥事件，則：

$$P(A\text{或}B)=P(A)+P(B)$$

基本事件（Elemertany event）之機率已知時，這是一很有用之法則，因爲它可用來計算合成事件之機率。

以擲一均勻銅板爲例來說明這個法則。在擲一單銅板中，H和T是互斥成果，故

$$P(H\text{或}T)=P(H)+P(T)$$

除了上面之簡單的特例外，上述公式在計算$P(H\text{或}T)$時是很有用的。

摘要而言，一事件表有以下之特性：

1. 對每一事件E，其發生之機率介於0與1間，即$0\leq P(E)\leq 1$。

2. 確定事件C發生之機率爲1，即$P(C)=1$。

3. 二個互斥事件發生之機率爲個別事件發生機率之和，即若A，B互斥則

$$P(A\text{或}B)=P(A)+P(B)$$

上面之結果顯然可推廣到任意個互斥事件之情況上。

我們現在已經知道一些機率之計算規則，但它們的意義爲何？例如，擲一均勻銅板$P(H)=½$是什麼意思？當然這並不是說在每次投擲中均可得到半個正面，也不是保證在二次投擲中恰能得到一個正面。（因爲也可能得到二個正面或二個反面）。那$P(H)=½$究竟眞正代表什麼意思？

本書將討論二種機率觀念。一是基於相對頻率（Rrelatire frequency）之機率上解釋，一是根據3.2.4節的主觀機率觀念。在討論機率之相對頻率觀念前，要指出這二個觀念在哲學基礎上是大爲不同，但在使用之方法，不論是基於主觀的觀念或相對頻率的觀念，以上之三個法則均能成立。因此，除了在下面和3.2.4節有簡單說明外其意義在本書上之解釋並無不同。

雖然我們不能保證在每擲一銅板中可得半個正面，或者在二次投擲中能得到一個正面，甚至在四十次投擲中能有二十個正面，$P(H)=½$之在相對頻率上之解釋是定義爲投擲一銅板很多次後出現正面次數之相對比率。圖2-2說明如何導出一個相對頻率。它顯示出：在投擲次數增加時。出現正面之相對比率是如何地接近½。在此實驗開始時出現正面之相對頻率遠離½，但投擲之次數越增加則相對頻率就越來越穩定地接近½。

這個方法指出了該實驗是在相同之條件下反覆實施之假設，所以機率能由經驗獲得。反之，若此重覆條件不成立，則有關機率存在之任何觀念就不爲相對頻率者所接受。這是相對頻率派和主觀機率派二者在哲學上最重要之差異。主觀學派認爲在生活中有很多情況是無法在同樣之條件下反覆實驗但却能合理地對不同之成果配置機率，例如，一個男人向他夢中的女人求婚，這便不可能在相同條件下反覆進行，在基本上他問了這個大問題後，便會改變他們間之關係。儘管它能對不同之成果做合理