

詳解九章算法
附纂類

一



陳厚九章算術卷一

一



詳解九章算法

附纂類

一

楊輝撰

中
華
書
局

昔在包犧氏始書八卦。以通神明之德。以類萬物之情。作九九之術。以合六爻之變。俾于黃帝。神而化之。引而申之。於是建歷紀。協律呂。用稽道原。然後兩儀四象。精微之氣。可得而效焉。記稱隸首作數。其詳未之聞也。按周公制禮。而有九數。九數之流。則九章是矣。往者暴秦焚書。經術散壞。自時厥後。漢北平侯張蒼。大司農中丞耿壽昌。皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘。各稱刪補。故校其目。則與古或異。而所論者。多近語也。徽。幼習九章。長再詳覽。觀陰陽之割裂。總算術之根源。揆賾之暇。遂悟其意。是以敢竭頑魯。采其所見。爲之作注。事類相推。各有攸歸。故枝條雖分。而同本幹者。知發其一端而已。又所析理以辭。解體用圖。庶亦約而能周。通而不黯。覽之者。思過半矣。且算在六藝。古者以賓興賢能。教習國子。雖曰九數。其能窮纖入微。揆測無方。至於以法相傳。亦猶規矩度量。可得而共。非特難爲也。當今好之者寡。故世雖多通才達學。而未必能綜於此耳。周官大司徒職。夏至日中。立八尺之表。其景尺有五寸。謂之地中。說云。南戴日下萬五千里。夫云爾者。以術推之。按九章立四表望遠。及因木望山之術。皆端旁互見。無有超逸若斯之類。然則蒼等爲術。猶未足以博盡羣數也。徽尋九數有重差之名。原其指趣。乃所以施於此也。凡望極高。測極遠。而兼知其遠者。必用重差。勾股則必以重差爲率。故曰重差也。立兩表於洛陽之城。令高八尺。南北各盡平地。同日度其正中之時。以景差爲法。表高乘表間。爲實。實如法而一。所得。加表高。卽日去地也。以南表之景乘表間。爲實。實如法而一。卽爲從南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地。爲勾股。

詳解九章算法 序

爲之求弦。卽日去人也。以徑寸之筒。南望日。日滿筒空。則定筒之長短。以爲股率。以筒徑爲勾率。日去人之數爲大股。大股之勾。卽日徑也。雖夫圓穹之象。猶曰可度。又況泰山之高。與江海之廣哉。徵以爲今之史籍。且略舉天地之物。考論厥數。載之于志。以闡世術之美。轍造重差。并爲註解。以究古人之意。綴於勾股之下。度高者重表。測澆者累矩。孤離者三望。離而又旁求者四望。觸類而長之。則雖幽遐詭伏。靡所不入。博物君子。詳而覽焉。

夫算者數也。數之所生，生於道。老子曰：道生一，是也。數之所成，成於九。列子曰：九者究，是也。爰昔黃帝推天地之道，究萬物之始，錯綜其數，列爲九章。立術二百四十有六，始之以方田，終之以勾股。其爲用也大矣。若施之於圭表，則穹窿之天可考；推日月之晦明，步五星之盈縮，驗晨昏晝夜不移，行氣候寒暑無忒。若施之於勾股，則磅礴之地可度，望山嶽之高低，測江海之澆淺，籌道里廣遠之積，方田疇形體之畧。若施之於諸術，則萬物之情可察，經緯天地之間，籠絡覆載之內，凡言數之見者，又焉得逃於此乎？變交實之息耗，賤貴賤之等差，均役輸遠近之勞，商功徒輕重之力，盈朒明隱互之形，方程正錯綜之失。至於物物不齊，漚塵無盡，該貫總攝，區分派別，廣大纖微，莫不悉舉，可謂包括三才，旁通萬有之術也。是以國家嘗設算科，取士選九章以爲算經之首，蓋猶儒者之六經，醫家之難素，兵法之孫子歟。後之學者，有倚其門牆，瞻其步趨，或得一二者，以能自成一家之書，顯名于世矣。比嘗較其數，譬若大海汲水，人力有盡，而海水無窮；又若盤之走圓，橫斜萬轉，終其能出于盤哉。由是自古迄今，歷數千餘載，聲教所被，舟車所及，凡善數學者，人人服膺而重之，奈何自靖康以來，罕有舊本，間有存者，狃于未習，不循本意，或隱問荅以欺衆，或添歌象以衒己，乖萬世益人之心，爲一時射利之具，以至真術淹廢，僞本滋興，學者泥於見聞，俛偃然入於迷望，可勝計邪？居仁由義之士，每不平之，愚向獲善本，不敢私藏，而今而後，聖人之法，暗而復明，仆而復起，學之者得覩其全經，悟之者必達微旨矣，不亦善乎？謹命工鏤板，庶廣其傳。四方君子，得以

詳解九章算法 序

鑒焉。時聖宋紹興十八年戊辰歲八月日丙戌日寓臨安府汴陽學算榮啓序

九章算經九卷。周公之遺書。而漢丞相張蒼之所刪補者也。算數之書。凡數十家。獨以九章爲經之首。以其九數之法。無所不備。諸家立術。雖有變通。推其本意。皆自此出。而且知後人無以易周漢之舊也。自唐有國。用之以取士。本朝崇寧。亦立於學宮。故前世算數之學。相望有人。白衣冠南渡以來。此學旣廢。非獨好之者寡。而九章算經亦幾泯沒無傳矣。近世民間之本。題之曰黃帝九章。豈以其爲隸首之所作歟。名已不當。雖有細草。類皆簡捷殘闕。惜於本原。無有劉徽李淳風之舊註者。古人之意。不復可見。每爲慨歎。慶元庚申之夏。余在郡城。與太史局同知算造楊忠輔德之論歷。因從其家得古本九章。乃汴都之故書。今祕館所定著。亦從此本寫以送官者也。謹案晉志劉徽所注九章。實魏之景元四年。觀其序文。以謂析理以辭。解體用圖。又造重差於勾股之下。辭乃今之註文。其圖至唐猶在。今則亡矣。重差之法。今之海島算經是也。又李淳風之注。見於唐志。凡九卷。而今之盈不足方程之篇。咸闕淳風注文。意者此書歲久傳錄。不無錯漏。猶幸有此存者。今此乃是合劉李二註。而爲一書云。其年六月一日乙酉。迪功郎新興隆府靖安縣主簿括蒼鮑澣之仲祺謹書。

夫習算者以乘法爲主。凡布置法者。欲其得宜。定位呼數。欲其不錯。除不盡者。以法爲分母。實爲分子。繁者約之。復通分而還源。此乘除之規繩也。題有分者。隨母通之。母不同者。齊子併之。田不匠者。折併直之。數皆求者。互乘換之。差等除實。別而衰之。疊疊積者。以形測之。數隱互者。維乘併之。爲問。正負入之。勾股旁要。開方求之。節題匿積。演段取之。此算法之盡理也。黃帝九章。備全奧妙。包括羣情。謂非聖賢之書。不可靖康以來。古本浸失。後人補續。不得其真。致有題重法闕。使學者難入其門。好者不得其旨。輝雖慕此書。未能貫理。妄以淺也。聊爲編述。擇八十題以爲矜式。自餘一百六十六問。無出前意。不敢廢先賢之文。刪留題次。習者可以聞一知十。恐問隱而添題解。見法隱而續釋註。刊大小字。以明法草。僭比類題。以通俗務。凡題法解白不明者。別圖而驗之。編乘除諸術。以便入門。纂法問類次。見之章末。總十有二卷。雖不足補前賢之萬一。恐亦可備故來之觀覽云爾。景定二年辛酉歲正月十七己卯日錢塘楊輝謹序。

詳解九章算法

宋楊輝撰

盈不足 以御隱雜互見。接盈者謂之朒，不足者謂之盈，所出率謂之假令，盈朒維乘兩設者，欲為同齊通計，齊則不盈不朒之正數，故可併之為實，并盈不足為法，齊之三十二者，是四假令，其假令同，其盈朒盈朒俱十二十一者，是三假令，亦朒十二，并七假令，名為一實，故并三四為法，注云：若兩設有分者，齊其子，同其母，此多者，餘謂之設差，以為少設，則并盈朒，是為定實，故以少設約法，則為人數約實，則為物價，盈朒當與少設相通，不可徧約，亦當分母乘設差為約法實。

術曰：置所出率，盈不足各居其下，令維乘所出率，并以為實，并盈不足為法，實如法而一，有分者通之，盈不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘以約法實，實為物價，法為人數，其一術曰：并盈不足為實，以所出率，以少減多，餘為法，實如法得一人，以所出率乘之，減盈增不足，即物價。

法曰：置所出率，盈不足各居其下，所出率盈，以盈不足，盈多也，令維乘而乘，所出率，各人乘所出率，并盈不足為法，相併即實如法而一，所出率為實，有分者通之，上文音單徑之題也，盈不足相與同其買物者，盈不足又有買物，所出率，人數，盈率，置所出率，以少減多，相減，餘以約法實，預為約，實為物價，法為人數，其一法曰：并盈不足為實，以所出率，以少減多，餘為法，實如法而一，得

人位無五乘。以此術竟求人數。以所出率乘之。乘人減盈增不足。卽物價也。

解題以盈納乘出率者。是假盈納爲母。出率爲子。互乘齊其數也。或問先有出率。而後有盈納。今不以而乘出率。此之謂也。又問併盈納爲人數者。何議曰。盈數爲母。已乘出率。納數爲母。已乘出率。二子既併而盈納者。故亦併之爲人。此作法之意。不亦隱乎。

今有共買物。人出八盈三人。出七不足四。問人數物價各幾何。

答曰。人七人。物價五十三。此術意謂盈不足爲衆人之差。以所出率以少減多。餘爲一人之差。以一人之差約衆人之差。故得人數也。

解題隱五爲題。按後章。

草曰。以盈不足。盈三文。不足四文。令維乘所出率。維乘卽是互乘。以盈三乘出七爲二十一。不足四乘出八爲三十二。併以爲實。十三得五。併盈不足。

爲法。三四得七。實如法而一。實五十三爲物。比類。舊例支銀人給八兩。回納三兩人給七兩。申添四兩。問草曰。回三兩。添四兩。五乘七兩。八兩。求之。

今有共買雞。人出九盈一十一。人出六不足十六。問人數雞價各幾何。

答曰。九人。雞價七十。

今有共買雞。一云準。人出半盈四。人出少半不足三。問人數雞價各幾何。

答曰。四十二人。雞價十七。

共買雞。各出二分之一。盈四文。各出三分之一。不足三文。問人價各幾何。

答曰。四十二人。雞價十七。

答曰八四十二 璣價十七

解題法云有分者
通之即此問

草曰有分者通之出三分之一益四三通為八以盈不足維乘所出率虧九乘三分之一得八併之以

為實得十七併盈不足為法出率分母三乘盈八分母二以法除之合問其一草曰併盈通為八

以出率二十四不足為實不足三以三通為九出率二以所出率分之二得三其三分之一乘其二少減多

餘一為法實如法而一四十分以所出率乘之減盈增不足即物價也除得二十一乘四十二人以此二分

率三分之一乘四十二人以此三分除比類買物三人共出一百虧三百文二人共出一百盈四百文

以總人共錢買物是隱其分也使後學知兩題則一

今有共買牛七家共出一百九十不足三百三十九家共出二百七十盈三十問家數牛價各幾何

答曰一百二十六家 牛價三千七百五十 按此術并盈不足者為眾家之差故以為實置所出率

之差以除即家數以出率乘之減盈增不足故得牛價也

解題法云盈不足相與同

草曰置所出率盈不足各居其下出二百七十

七家 虧三百三十 盈不足相與同其買物者置所出率以少減多餘以約法實此問有一假戶數

詳解九章算法

以戶數為母，出率為子，互乘，用副置相減為約法。母乘為戶積，出一貫七百一十六十三家，盈不足令虧三百三十，出一貫八百九十六十三家，盈三十，副置出率以少減多，除一百八十三貫七百併之，為實維乘所出率，併之為實，併盈不足乘戶率為法。出五十一貫三百六十，出六百二十三貫七百併之，為實六百八十，以法八十，除之，合問。比類一疋，問人絹各幾何。答曰：三十人，十九疋，少。草曰：剩一疋，分四人，疋六人，如前法求。

今有其買金，人出四百，盈三千四百，人出三百，盈一百，問人數，金價各幾何。

答曰：三十三人，金價九千八百。

解題：此問上下皆盈，兩盈不足法曰：置所出率，盈不足各居其下。出四百，一人，盈三貫四百，令維乘所出率，以少減多，餘為法實。先以人數互乘，出率以少減多，餘為法，次以盈不足維乘，以少減多，兩盈兩不足，以少減多，餘為人實。人實九百八十貫，法百，實如法而一，率為子，互乘，猶合分也。今問以兩盈兩不足為分母，以所出率為分子，互乘各以少減多，猶減分也。

今有其買羊，人出五，不足四十五，人出七，不足三，問人數，羊價各幾何。

答曰：二十一人，羊價一百五十。

今有其買犬，人出五，不足九十，人出五十，適足，問人數，犬價各幾何。

答曰：二人，犬價一百。
此術意謂以所出率以少減多，餘者是一人不足之差，以一人差約之，故得人之數也。

盈胸適足法曰置所出率盈胸適足各居其下右論無胸有胸無盈此乃總法故言盈胸副置出率以少減多餘為約法盈胸適足令維乘所出率為實盈胸五乘子也以求物價無盈亦總法也盈胸以為人實實如約而一其一法曰以盈或不足之數為實置所出率以少減多餘為法實如法而得一人以適足出率乘人為物價也

草曰此問無盈置所出率不足適足各居其下出五文不足九副置所出率以少減多餘四十為約法令不足適足維乘出率為實出空不足九十以不足九為人實出率之實為物積皆如約法四十而一合問其一以不足十九為實所出率出五文以少減多餘四十為法實如法而一人得二以適足十五乘人數二得物價百合問

今有共買豕人出一百盈一百人出九十適足問人數豕價各幾何

答曰一十人豕價九百

今有米在十斗桶中不知其數滿中添粟而舂之得米七斗問故米幾何

答曰二斗五升

桶曰以盈不足術求之假令故米二斗不足二升令之三斗有餘二升按桶受一斛若使故米二斗須添粟八斗以滿之八斗得糶米四斗是為有餘二升以故不足維乘假令之數者欲為齊同之意實如法即得故米斗數乃不盈不虧

之正數也

答曰故米二斗五升新米四斗五升

解題本是以互換取用題

術曰互換法以糶米率減粟率餘為糠率以得米減白積餘為糠實換法以所有糠乘所求糶率為實

所有糠率為法實如法而一

草曰以糶率減粟率餘為糠率得米斗減白積斗餘為糠實斗以所有糠斗乘所求糶率為實

九斗所有糠率二為法實如法而一除得新米四斗五升

又盈不足法曰假令故米二斗不足二升以故米二斗減十斗曰餘八斗以糶率乘之以粟率除之得

斗二升添上令之三斗曰餘七斗以糶率乘之以粟率除之得四假令二斗不足二升令之三斗有餘二

升維乘其上併之得十為實有餘不足併之為法實如法而一先得故米比類每斛煎成鹽二十斤

中有出未盡鹽添滿而煎共得二百五十斤問新故鹽幾何答曰故百五十斤減盤油積四百斤餘一百

斤故鹽不足術曰假令故鹽百三十斤多六十斤之故鹽一百六十斤不足三十斤

今有瓠高九尺瓜生其上蔓日長七寸瓠生其下蔓日長一尺問幾何日相逢瓜瓠各長幾何

答曰五日十七分日之五瓜長三尺七寸一十七分寸之一瓠長五尺二寸一十七分寸之一

十六

術曰假令五日不足五寸令之六日有餘一尺二寸按假令五日不足五寸者瓜生五日下垂莖三尺不足五寸令之六日有餘一尺二寸者若使瓜生六日下垂莖四尺二寸瓜生六日上延莖六尺課於九尺之垣是為九尺之垣是為有餘一尺二寸以盈不足維乘假令之數者欲為齊同之意實如法而一即設差不盈日之長乘之故各得其長之數也

解題合率商除借合率術草曰以垣高為實九尺併瓜瓠蔓長為法七寸實如法而一除之盈不足率草

曰假令五日不足五寸令維乘併日數為實九尺併盈不足為法七寸實如法而一合

比類銅價五貫六百二十五錫價四貫三百七十五欲共斤數相等問幾何答曰各重六百二十五斤

實如法而一

今有蒲生一日長三尺莞生一日長一尺蒲生日自半莞生日自倍問幾何日而長等

答曰二日十三分日之六各長四尺八寸一十三分寸之六

術曰假令二日不足一尺五寸令之三日有餘一尺七寸半按假令二日不足一尺五寸者蒲生二日及一尺五寸故曰不足令之三日有餘一尺七寸半者蒲增前七寸半莞增前四尺是為過一尺七寸半故曰有餘以盈不足乘除之又以後一日所長各乘日分子如日分母而一日各得日分子之長也

術曰假令二日不足一尺五寸二日內蒲長四尺五寸莞長三尺二日內蒲較是不足一尺五寸令之三日有餘一尺七寸半三日內蒲長二尺五寸

寸半。莞長七尺。蒲莞相較。乃餘一尺七寸半。求等長。故以蒲莞相抵。

草曰。置盈不足。三日。有餘一尺七寸半。維乘得尺五寸。有餘一尺七寸半。併乘日為實。併盈不足

為法。三尺三寸半。實如法而一。合問。

求蒲長。日以第三日長。半。寸。以日分子。六。乘之。如日分母而一。得三寸。不盡。六。加前二日。合問。

求莞長。日以第三日長。四。尺。以日分子。六。乘之。如日分母而一。得六尺八寸。二日。合問。

今有醇酒一斗。直錢五十。行酒一斗。直錢一十。今將錢三十。得酒二斗。問醇行酒各得幾何。

荅曰。醇酒二升半。行酒一斗七升半。

術曰。假令醇酒五升。行酒一斗五升。有餘一十。令之醇酒二升。行酒一斗八升。不足二。按醇酒五升。直錢一十八。課於三十。是為不足。二。以盈不足。為之。此間已有重設。及其齊同之意也。

術曰。假令皆醇酒。多七十。令之皆行酒。多一十。以二價相減。餘為法。除之。分率術曰。置其物。二。乘貴價。十。減都錢。十。餘七十。為實。以賤價。十。減貴價。十。餘四十。為法。除之。得行酒。升。五。合。減其物。斗。餘。五。升。為

醇酒貴價。

盈不足術曰。假令醇酒五升。行酒一斗五升。有餘十文。假令醇酒五升。直錢二十五。行酒一斗五升。令之醇酒二升。行酒一斗八升。不足二文。令之醇酒二升。直錢十。行酒一斗八升。直錢有餘不足。升。有餘。五。令之醇酒二升。行酒一斗八升。不足二文。令之醇酒二升。直錢十。行酒一斗八升。直錢有餘不足。升。有餘。五。