

全国注册岩土工程师 执业资格考试应试指导

基础部分(上)

JICHU BUFEN

天津大学土木工程系

QUANGUO ZHUCE YANTU GONGCHENGSHI
ZHIYEZIGE KAOSHI YINGSHIZHIDAO



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

全国注册岩土工程师 执业资格考试应试指导

基础部分（上）

天津大学土木工程系



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书按国家最新规范、紧紧扣住了注册岩土工程师基础部分考试大纲编写。概念性问题讲述深入而简单,讲述时难点要点突出,例题评述仔细而明了。

本书最大特点是编写了大量模拟试题,以此巩固概念以达到全面了解考试内容的目的,并附有参考答案以供对照学习。

参加我校辅导班的学员每年的通过率都在70%~80%左右,本书是在我校多年办辅导班的复习教材的基础上经过整理而编写成书。是办学习辅导班的最好教材,亦可作为自学复习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国注册岩土工程师执业资格考试应试指导基础部分. 上/天津大学土木工程系编. —天津:天津大学出版社, 2003.5

ISBN 7-5618-1768-1

I. 全... II. 天... III. 岩土工程—工程技术人员—资格考试—自学参考资料 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 032654 号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨风和

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内 (邮编: 300072)

电 话 发行部: 022—27403647 邮购部: 022—27402742

印 刷 河北省昌黎县人民胶印厂

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm×260mm

印 张 28.5

字 数 711 千

版 次 2003 年 5 月第 1 版

印 次 2003 年 5 月第 1 次

印 数 1—4 000

定 价 128.00 元 (上下册)

全国注册岩土工程师 执业资格考试应试指导 基础部分

名誉主任	顾晓鲁				
主 任	郑 刚				
副 主 任	严 驰	刘春原			
委 员	顾晓鲁	姜忻良	翁鹿年	康谷贻	陈 环
	刘锡良	戴自强	窦远明	李忠献	吴家珣
	刘惠兰	贾启芬	刘津明	王成华	李砚波
	丁 阳	朱济祥			
秘 书	谷 岩	刘 畅	周伟毅		

前 言

随着我国各个方面与国际接轨,实行个人执业制度在土木工程、勘察、设计领域已成为大势所趋,个人执业制度将极大地发挥广大土木工程技术人员的工作积极性和创造力。因此,通过注册土木工程师执业资格考试并取得个人执业资格,成为广大土木工程技术人员关注的一件大事。

自实行注册土木工程师执业资格考试以来,天津大学受天津市建委的委托,连续多年举办了注册土木工程师(结构、岩土)执业资格考试辅导培训班,集中了天津大学优秀师资力量,对考生进行考前集中培训与辅导。参加过培训的考生的考试通过率大大高于全国平均水平。因此,近年来,陆续有河北、山东等其他外省市的考生前来参加天津大学举办的培训班。为满足广大考生的要求,天津大学组织参加考前培训辅导班授课的教师,并邀请河北工业大学部分有较深造诣的教师及天津市一些全国知名专家,组成编写委员会,将其辅导材料进行系统的总结与完善,编写成《全国注册岩土工程师执业资格考试应试指导》及《全国一、二级注册结构工程师执业资格考试应试指导》,希望这两套辅导教程能为广大土木工程技术人员顺利通过考试助一臂之力。

本书的特点是,参加编写人员多次参加了考前辅导班的授课,对近年来考题有深入研究,根据参加过辅导班的考生考试情况多次修订与完善授课讲义,在此基础上,结合2003年考试大纲,对涉及考试内容与规范进行了重点突出的分析与讲解,并附有典型例题题解及点评,并有大量试题与参考答案,同时指出答题易出错之处,特别适于考生进行考前复习。

本书在编写过程中得到了多位勘察设计大师的指点与帮助,本书编委会在此表示衷心感谢。

本书编委会

2003年4月

参加编写人员名单

基础知识部分

参编人员:

1. 数学 杨万禄
2. 物理 王学信
3. 普通化学 付希贤
4. 理论力学 毕学涛
5. 材料力学 王彦群
6. 流体力学 李德筠

专业基础部分

参编人员:

7. 计算机应用基础 罗安定
8. 电工电子技术 刘全忠
9. 工程经济 郑立群
10. 土木工程材料 刘惠兰
11. 工程测量 岳树信
12. 职业法规 韩明
13. 土木工程施工与管理 刘津明
14. 结构力学与结构设计
李增福 戴自强 李砚波 张晋元 丁阳 韩庆华 陈志华
15. 岩体力学与土力学 严驰 朱济祥 邱长林 李飒
16. 工程地质 朱济祥
17. 岩体工程与基础工程
严驰 朱济祥 李飒 邱长林

目 录

1 高等数学	1
1.1 函数、极限、连续	1
1.1.1 函数	1
模拟试题及参考答案	2
1.1.2 极限	3
模拟试题及参考答案	8
1.1.3 连续	9
模拟试题及参考答案	11
1.2 一元函数微分学	12
1.2.1 导数与微分	12
模拟试题及参考答案	16
1.2.2 微分中值定理	17
模拟试题及参考答案	19
1.2.3 导数应用	19
模拟试题及参考答案	23
1.3 一元函数积分学	24
1.3.1 不定积分	24
模拟试题及参考答案	27
1.3.2 定积分	28
模拟试题及参考答案	33
1.3.3 定积分应用	34
模拟试题及参考答案	36
1.4 向量代数与空间解析几何	37
1.4.1 向量代数	37
模拟试题及参考答案	39
1.4.2 空间解析几何	40
模拟试题及参考答案	44
1.5 多元函数微分法及其应用	46
1.5.1 偏导数与全微分	46
模拟试题及参考答案	50
1.5.2 偏导数的应用	51
1.6 重积分	53
1.6.1 二重积分	53
模拟试题及参考答案	56
1.6.2 三重积分	58

1.7 曲线积分	59
1.7.1 第一类曲线积分	59
1.7.2 第二类曲线积分	61
1.8 无穷级数	63
1.8.1 数项级数	63
模拟试题及参考答案	67
1.8.2 幂级数	68
模拟试题及参考答案	71
1.8.3 傅里叶级数	73
1.9 常微分方程	75
1.9.1 一阶微分方程的解法	75
模拟试题及参考答案	78
1.9.2 二阶常系数线性微分方程的解法	80
模拟试题及参考答案	82
1.10 向量分析	83
模拟试题及参考答案	86
1.11 线性代数	87
1.11.1 n 阶行列式	87
1.11.2 矩阵及其运算	90
1.11.3 向量组的线性相关性与矩阵的秩	94
1.11.4 线性方程组	97
1.11.5 矩阵的特征值与特征向量	101
1.11.6 二次型	103
模拟试题及参考答案	104
1.12 概率与数理统计	106
1.12.1 随机事件与概率	106
1.12.2 随机变量的概率分布与数字特征	111
1.12.3 数理统计的基本概念	119
1.12.4 参数估计	121
1.12.5 假设检验	124
1.12.6 方差分析	126
模拟试题及参考答案	127
2 普通物理	130
2.1 热学	130
2.1.1 气体状态参量、平衡态、平衡过程	130
2.1.2 理想气体状态方程	130
2.1.3 理想气体的压强和温度	131
2.1.4 能量按自由度均分、理想气体的内能	132
2.1.5 麦克斯韦速率分布律	132

2.1.6	平均碰撞频率和平均自由程	134
2.1.7	内能、热量和功	135
2.1.8	热力学第一定律及其对等值过程和绝热过程的应用	136
2.1.9	循环与热机, 热机效率	138
2.1.10	热力学第二定律及其统计意义	139
2.1.11	可逆过程和不可逆过程	139
2.1.12	熵	140
2.2	机械波	141
2.2.1	机械波的产生与传播	141
2.2.2	描述波的物理量及其相互关系	141
2.2.3	平面简谐行波表达式	142
2.2.4	波的能量能流	143
2.2.5	波的叠加原理、波的干涉、驻波	144
2.2.6	多普勒效应	145
2.2.7	声学基本知识	146
2.3	波动光学	147
2.3.1	光的干涉	147
2.3.2	光的衍射	150
2.3.3	光的偏振	153
	模拟试题	158
	模拟试题参考答案	165
3	普通化学	166
3.1	化学反应的基本规律	166
	模拟试题	174
	模拟试题参考答案	176
3.2	溶液与离子平衡	176
	模拟试题	184
	模拟试题参考答案	186
3.3	氧化还原与电化学	186
	模拟试题	193
	模拟试题参考答案	195
3.4	原子结构与周期律	195
	模拟试题	201
	模拟试题参考答案	202
3.5	化学键与晶体结构	203
	模拟试题	207
	模拟试题参考答案	209
3.6	有机化学	209
	模拟试题	217

模拟试题参考答案	218
4 理论力学	219
4.1 静力学	219
4.1.1 静力学基本概念及静力学公理	219
模拟试题	221
4.1.2 平面汇交力系及平面力偶系	221
模拟试题	223
4.1.3 平面任意力系	227
模拟试题	228
4.1.4 空间力系及重心	231
模拟试题	233
4.1.5 摩擦	236
模拟试题	237
4.2 运动学	239
4.2.1 点的运动学	239
模拟试题	241
4.2.2 刚体的基本运动	242
模拟试题	243
4.2.3 点的合成运动	244
模拟试题	246
4.2.4 刚体平面运动	249
模拟试题	252
4.3 动力学	255
4.3.1 质点运动微分方程	255
模拟试题	256
4.3.2 动力学基本量的计算	257
模拟试题	261
4.3.3 动力学普遍定理	264
模拟试题	267
4.3.4 达朗贝尔原理	269
模拟试题	271
4.3.5 虚位移原理	272
模拟试题	274
4.3.6 单自由度系统的振动	275
模拟试题	276
模拟试题参考答案	278
5 材料力学	279
5.1 绪论	279
5.2 轴向拉伸与压缩	280

5.3 剪切	286
5.4 扭转	289
5.5 截面的几何性质	294
5.6 弯曲内力	299
5.7 弯曲应力	304
5.8 弯曲变形	311
5.9 应力状态与强度理论	317
5.10 组合变形	328
5.11 压杆稳定	336
模拟试题	340
模拟试题参考答案	368
6 流体力学	370
6.1 流体的主要物理力学性质	370
模拟试题	373
6.2 流体静力学	374
模拟试题	388
6.3 流体运动学	390
模拟试题	397
6.4 流体动力学	397
模拟试题	409
6.5 流动阻力和能量损失	410
模拟试题	420
6.6 有压管流	421
模拟试题	428
6.7 明渠恒定均匀流	429
模拟试题	431
6.8 堰流	432
模拟试题	433
6.9 渗流	433
模拟试题	437
6.10 量纲分析和相似理论	438
模拟试题	442
模拟试题参考答案	443
主要参考文献	444

1 高等数学

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 函数

1. 内容摘要

1) 函数的定义

若变量 x 在某一实数集合 X 中每取一个值, 变量 y 都有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记为

$$y = f(x).$$

实数集合 X 称为函数的定义域; 确定 x 与 y 关系的对应规律为函数的对应规律.

在函数概念中重点理解: 函数符号 $y = f(x)$; 应会求函数的定义域; 分段函数.

2) 函数的性质

(1) 有界性: 若存在 $M > 0$, 使得在 (a, b) 内任意点 x , 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 否则为无界. 如 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是有界函数, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 而在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有界.

(2) 单调性: 若对 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增 (减), 区间 (a, b) 为 $f(x)$ 的单调增 (减) 区间, 如 $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为单增函数. $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 为单调减函数.

(3) 奇偶性: 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内为偶函数, 若 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数, 例 $f(x) = \sin x$ 为奇函数, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数, $f(x) = \cos x$ 为偶函数.

(4) 周期性: 若 $f(x)$ 存在 l , 使 $f(x+l) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为周期函数, 称诸 l 中的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

3) 反函数

$y = f(x)$ 的反函数记为 $x = f^{-1}(y)$ 或 $y = f^{-1}(x)$. 函数与它的反函数的定义域与值域互换, 例 $y = e^x$ 的反函数为 $y = \ln x$.

4) 初等函数

(1) 基本初等函数: 幂函数 $y = x^\mu$. 指数函数 $y = a^x$, $y = e^x$. 对数函数 $y = \log_a x$, $y = \ln x$. 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$. 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$. 要求熟悉基本初等函数的图形及其性质.

(2) 复合函数: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

(3) 初等函数: 由常数和基本初等函数经有限次四则运算和复合步骤所构成的, 且用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

要求对初等函数能熟练地拆成若干个基本初等函数或基本初等函数的四则运算.

2. 例题

例1 求函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \arcsin(x-2)$ 的定义域.

解 因为 $\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ |x-2| \leq 1, \end{cases}$ 解得 $1 < x \leq 3$.

例2 设 $f(e^x+1) = xe^x + e^x + 1$, 求 $f(x)$.

解 设 $u=e^x+1$, $x=\ln(u-1)$,

$$f(u) = (u-1) \ln(u-1) + u-1+1 = (u-1) \ln(u-1) + u,$$

则 $f(x) = (x-1) \ln(x-1) + x$.

例3 设 $f(x) = \ln x$, 证明: $f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)]$.

解 $f(x) + f(x+1) = \ln x + \ln(x+1) = \ln[x(x+1)]$.

因为 $f[x(x+1)] = \ln[x(x+1)]$, 所以

$$f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)].$$

例4 设 $f(x) = 3x+5$, 求 $f[f(x)-2]$.

解 $f[f(x)-2] = 3[f(x)-2] + 5 = 3[3x+5-2] + 5 = 9x+14$.

例5 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = x+1$, 求 $\varphi(x)$.

解 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = x+1$,

于是 $\varphi(x) = \ln(x+1)$.

模拟试题及参考答案

1. 函数 $y = \frac{x-1}{\ln x} + \sqrt{16-x^2}$ 的定义域为 ().

- (A) $(0, 1)$ (B) $(0, 1) \cup (1, 4)$
(C) $[0, 4]$ (D) $(0, 1) \cup (1, 4]$

2. 下列各对函数中为同一函数的是 ().

- (A) $f(x) = \lg(x^2-9)$ 与 $g(x) = \lg(x-3) + \lg(x+3)$
(B) $f(x) = x$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$
(C) $f(x) = e^{\ln x}$ 与 $g(x) = x$
(D) $f(x) = \sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$

3. 下列函数中, 是偶函数的是 ().

- (A) $f(x) = x^2 \sin x$ (B) $f(x) = \lg \frac{1-x^2}{1+x^2}$
(C) $f(x) = x + \cos x$ (D) $f(x) = \frac{a^x-1}{a^x+1}$

4. 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$, 则 $f(x)$ 等于 ().

- (A) $1+x$ (B) $1+x^2$

(C) $2-2x^2$

(D) $2+2x^2$

解答

1. (D)

$$\text{因为 由 } \begin{cases} \ln x \neq 0, \\ x > 0, \\ 16 - x^2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0, \\ -4 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

所以定义域为 $(0, 1) \cup (1, 4]$.

2. (D)

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对应规律也一样, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

3. (B)

$$\text{因为 } f(-x) = \lg \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \lg \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x), \text{ 所以 (B) 是偶函数.}$$

4. (C)

$$\text{因为 } f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2(1 - \sin^2 \frac{x}{2}),$$

所以 $f(x) = 2(1 - x^2)$, 应选 (C).

1.1.2 极限

1. 内容摘要

1) 极限的概念

(1) 数列的极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 x_n 无限接近于某一个确定的数值 A , 则称 A 为该数列 x_n 的极限, 或称数列 x_n 收敛于 A , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

若数列 $\{x_n\}$ 有极限, 称 $\{x_n\}$ 收敛, 否则发散;若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必有界, 反之不一定成立.

(2) 函数的极限

① $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

如果 x 无限远离原点时, $f(x)$ 无限接近某一常数 A , 则称当 x 趋于无穷时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

如果 x 沿数轴正向无限远离原点时, 称 x 趋于正无穷, 上述极限记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

如果 x 沿数轴负向无限远离原点时, 称 x 趋于负无穷, 上述极限记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

② $x \rightarrow x_0$ 时, 函数的极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

如果当 x 无限趋近 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

③左、右极限.

x_0 点的左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ($x \rightarrow x_0^-$, 表示 x 小于 x_0 而趋近于 x_0).

x_0 点的右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ($x \rightarrow x_0^+$, 表示 x 大于 x_0 而趋近于 x_0).

④ $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是: $f(x)$ 在 x_0 点的左极限与右极限都存在, 且相等.

2) 无穷大与无穷小

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时为无穷小.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时为无穷大.

(3) 两者关系如下:

若 $\lim f(x) = \infty$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$;

若 $\lim f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(4) 无穷小的性质:

若 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$, 则有

$$\lim (\alpha(x) \pm \beta(x)) = 0; \lim (\alpha(x) \cdot \beta(x)) = 0;$$

$\lim u(x) \cdot \alpha(x) = 0$, 其中 $u(x)$ 为有界函数.

(5) 无穷小的比较:

设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ ($c \neq 0, 1$), 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(6) 等价无穷小的代换定理:

若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 几个常用的等价无穷小如下:

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

3) 函数极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则有

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

4) 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5) 求函数极限的方法

求函数的极限是极限部分的重点, 其方法可归纳为以下几种.

(1) 直接利用极限四则运算法则求极限.

(2) 先进行恒等变换 (如消去公因子; 分子、分母同乘共轭根式等), 再用极限四则运算法则求极限.

(3) 利用两个重要极限求极限.

(4) 利用无穷小的性质及无穷小与无穷大的关系求极限.

(5) 利用等价无穷小代换求极限.

(6) 利用洛必达法则求极限等.

2. 例题

$$\text{例 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + x}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{一般结论: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

$$\text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}-1}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{\sqrt{1-x-x^2}+1}{-x-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x-x^2}+1}{-1-x} = -2.$$

$$\text{例 3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - (x^2 + x + 1)}{x^3 - 1} = \infty.$$

$$\text{例 4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{例 5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2}.$

例 7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{3x-2}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3}.$

例 8 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1.$

例 9 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = e^2.$

例 10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x+1}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3} \cdot (-3)} = e^{-3}.$

例 11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \right]^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-2}} = e^3.$

例 12 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}.$

解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot x = x.$

例 13 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x.$

解 原式 $= 0$ ($\frac{1}{x}$ 为无穷小, $\sin x$ 是有界函数, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$).

例 14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

例 15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan x}{x^2}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2.$