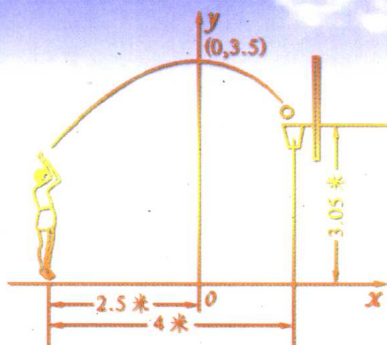


初中数学

龙门题

中考中的数学思想方法

南秀全 主编



龍門書局



中考中的数学思想方法

主 编 南秀全

本册主编 付东峰

王 飞

李健武



龍門書局

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64033640 13501151303（打假办）

邮购电话：(010)64000246



中考中的数学思想方法

南秀全 主编

责任编辑 王 敏 乌 云

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

北京人卫印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2002年1月第一版 开本：890×1240 A5

2002年9月第二次印刷 印张：5 1/2

印数：30 001—50 000 字数：203 000

ISBN 7-80160-429-6/G·419

定 价：6.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计 55 种,其中初中数学 12 种,高中数学 12 种,初中物理 5 种,高中物理 7 种,初中化学 4 种,高中化学 10 种,高中生物 5 种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先 本套书共计 55 种,你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释,读过一本后,可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效 由于“专题”内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对某一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编 者

2001年11月1日

编委会

(初中数学)

(修订版)

执行
编委

王敏

余石
南山

余曙光
黄振国

编委
肖九河
付东峰

主编
南秀全

总策划
龙门书局



目 录

概述	(1)
一 方程思想	(6)
1. 解代数问题时的应用	(7)
2. 解几何问题时的应用	(11)
3. 列方程解应用题	(17)
二 函数思想	(22)
1. 函数解析式的求法	(22)
2. 函数的图象与性质	(25)
3. 函数与面积	(27)
4. 函数作为其他学科的工具	(33)
5. 建立几何量间的函数关系式	(35)
6. 函数型综合题	(43)
三 分类讨论思想	(52)
1. 与数学概念、定义有关的分类讨论	(56)
2. 涉及数学运算法则或定理、公式的适用范围的分类讨论	(56)
3. 涉及问题中待定参数的变化的分类讨论	(57)
4. 涉及几何元素位置变化的分类讨论	(59)
5. 综合问题中的分类讨论	(65)
6. 依据题意进行分类讨论的应用问题	(66)
四 数学建模思想	(75)
1. 方程模型	(77)
2. 不等式(组)模型	(79)
3. 平面几何模型	(81)

4. 解直角三角形模型	(83)
5. 函数模型	(84)
6. 平面直角坐标系模型	(86)
7. 统计模型	(88)
五 归纳、猜想与探索思想	(97)
1. 归纳创造	(98)
2. 猜想论证	(105)
3. 探求开放	(109)
六 转化思想	(122)
1. 已知与未知的转化	(124)
2. 设参与消参的转化	(125)
3. 图形位置的变化	(125)
4. 相似转化	(126)
5. 等价转化	(126)
6. 动静转化	(127)
7. 化隐为显	(130)
七 整体思想	(137)
1. 整体思想在解题中的应用	(138)
2. 整体思想的应用技巧	(140)
八 数形结合思想	(148)
1. 图景问题	(151)
2. 图表问题	(152)
3. 图象问题	(154)
4. 图景或图表、图象问题	(156)
5. 图形问题	(157)
6. 代数与几何互相转化的问题	(159)
7. 综合题的数形结合	(160)



概 述

2000 年江苏省中学生英语能力竞赛初三年级初赛试卷中有这样一道习题:

“——How can we move just one match to make a square?”

——

注意仔细看图

- A. Move A B. Move B
C. Move C D. Move D

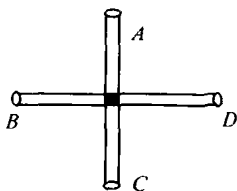


图 1

一个英语老师引用这个习题作为训练题让学生做时,不仅学生没找到正确答案,最后连老师也不知咋办,甚至怀疑起是否翻译不对或命题有误.

把这道题翻译成汉语的意思是:

“如图 1,怎样移动一根火柴而得到一个正方形?”“_____.”

- A. 移动 A B. 移动 B C. 移动 C D. 移动 D

英语老师只得拿着题去找数学老师帮忙,数学老师看题后,同样把这道题拿到课堂上让学生做,这回,倒有不少同学找到了问题的正确答案.

造成这样完全不同的结果,经老师分析,其原因是:

1. 同样一道题,出现在英语课堂上时,学生更注意的是其语言的表述或句子的结构,淡化了“如何移动”的要求,当问题找不到答案时,便怀疑是对问题的语言理解有误.而在数学课堂上出现时,学生便更注重对“方法和图形”的认识和理解上,也就是说用数学的思维去寻找问题的结果,这样就可能把问题解决了.

由此可见,数学思维在解题时的重要性

2. 用数学思维解题时,当问题不能直接找到答案时,学生应知道怎样对问题进行正确分析,认真观察图形,变换思路寻找答案.

读正方形之类的图形,常被认为是数学课的事情

我们再看上面这道题的答案.

对“移动”意思的理解常被认为是:“从一个地方换到另一个地方”,学生在几次尝试后容易知道,把其中一根火柴从一处拿到另一处再拼成正方形是不可能的,按数学的求异思维,学生便会回头重新审视图形,用非常规思维去探寻答案.

事实上,本题的突破口就在读图和打破传统思维定势上,只要把 A 火柴轻轻上移一些,中间便出现了一个正方形.

你想到了么?

本题答案有两点突破:1. 移动只是“轻轻”挪动一下;2. 不是火柴的整体拼成正方形,而是由其尾部构成一个正方形.

从上面的分析可以看出,用数学的意识去解题十分重要,也就是说,学好数学必须掌握解数学题的常见思想和常用方法.

所谓数学思想、方法是人们对数学内容的本质认识,是对数学知识和数学问题的进一步抽象和概括,属于对数学规律性的认识范畴.数学思想方法是数学的灵魂,数学思想指导着数学问题的解决,并具体地体现在解决问题的不同方法中.

一年一度的中考数学试题,为适应九年制义务教育初中数学的新大纲,命题中更注重了对数学思想、方法的考查.

【例 1】 (山西省,1993)阅读:由于我们已经学过相似三角形的性质,因此我们可以过多边形的一个顶点引对角线,将多边形分成三角形,先研究两个相似三角形的对应性质,然后再利用相似三角形来研究相似多边形.

读了这段内容,我们初步了解将多边形的问题转化为_____问题的思想方法,了解到_____辩证唯物主义观点.

答 三角形;事物在一定的条件下可以互相转化的.

【例 2】 (大连市,1998)阅读:解方程组
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, & \text{①} \\ x^2 + y^2 = 10. & \text{②} \end{cases}$$

解 (第一步)由①得 $(x-y)(x-2y)=0$, $\therefore x-y=0$ 或 $x-2y=0$.

(第二步)因此,原方程组化为两个方程组
$$\begin{cases} x-y=0, \\ x^2+y^2=10; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

分别解这两个方程组,得原方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{5}, \\ y_1=\sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\sqrt{5}, \\ y_2=-\sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=2\sqrt{2}, \\ y_3=\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-2\sqrt{2}, \\ y_4=-\sqrt{2}. \end{cases}$$

填空:第一步中,运用_____法将方程①化为两个二元一次方程,达到了_____的目的.由第一步到第二步,将原方程组化为两个由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组,体现了_____的数学思想.第二步中,两个方程组都是运用_____法达到了_____的目的,从而使方程组得以求解.

解 因式分解;降次;转化;代入;消元.

【例 3】 (山西省,2000)请阅读下面材料,并回答所提出的问题.三角形内角平分线性质定理:三角形的内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对

应成比例.

已知:如图 2, $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线. 求证:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

分析 要证 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, 一般只要证 BD, DC 与 AB, AC 或 BD, AB 与 DC, AC 所在三角形相似. 现在 B, D, C 在一条直线上, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 不相似, 需要考虑用别的方法换比.

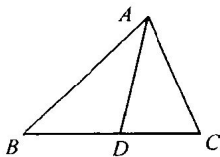


图 2

在比例式 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 中, AC 恰是 BD, DC, AB 的第四比例项, 所以考虑过 C 作 $CE \parallel AD$, 交 BA 的延长线于 E , 从而得到 BD, DC, AB 的第四比例项 AE , 这样, 证明 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 就可以转化成证 $AE = AC$.

这是关键

证明 过 C 作 $CE \parallel DA$, 交 BA 的延长线于 E , 如图 3.

$$\begin{aligned} CE \parallel DA &\Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle E \\ \angle 2 = \angle 3 \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases} \Rightarrow \angle E = \angle 3 \Rightarrow AE = AC, \\ CE \parallel DA &\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}. \end{aligned}$$

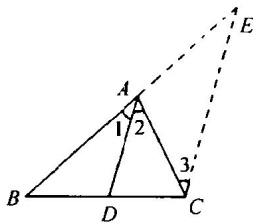


图 3

(1) 上面证明过程中, 用到了哪些定理? (写对两个定理即可)

(2) 在上述分析、证明过程中, 主要用到了下列三种数学思想的哪一种? 选出一个填在后面的括号内. ①数形结合思想; ②转化思想; ③分类讨论思想

(). (3) 用三角形内角平分线性质定理解决问题: 已知: 如图 3, $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线, $AB = 5\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, 求 BD 的长. **解答留给你完成**

说明 以上几例均选自近年来各地中考试卷中, 由此可以看出, 数学思想、方法已经直接作为考题考查的知识点, 从中可见其重要性. 这对我们学习的启示是: 不仅要善于解题, 而且要掌握具体问题中渗透的本质内容, 发掘出更高层次的规律、方法. 即通过一个问题(或知识点)的学习, 把它升华成一类问题的共性, 然后用这个共性解决所有的相关问题. **这就是数学思想**

中考试卷上更多的是用考题检测各种思想、方法的综合能力.

【例 4】(河北省, 1997) 如图 4, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8\text{cm}$, $AD = 24\text{cm}$, $BC = 26\text{cm}$, AB 为 $\odot O$ 的直径, 动点 Q 从点 C 开始沿 CB

边向点 B 以 3cm/s 的速度运动, 动点 P 从点 A 开始沿 AD 边向点 D 以 1cm/s 的速度运动. P 、 Q 分别从点 A 、 C 同时出发, 当其中一点到达端点时, 另一点也随之停止运动, 设运动时间为 t 秒. 求: (1) t 分别为何值时, 四边形 $PQCD$ 为平行四边形、等腰梯形? (2) t 分别为何值时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切、相交、相离?

解 (1) $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 只要 $QC = PD$, 四边形 $PQCD$ 为平行四边形 (如图 4).

此时, 有 $3t = 24 - t$, 解得 $t = 6$.

建立方程

即当 $t = 6$ 秒时, 四边形 $PQCD$ 为平行四边形.

根据定义判断

同理, 只要 $PQ = CD$, $PD \neq QC$, 四边形 $PQCD$ 为等腰梯形 (图 5).

过 P 、 D 分别作 BC 的垂线交 BC 于 E 、 F 两点, 则由等腰梯形的性质可知: $EF = PD$, $QE = FC = 2$, $QC - PD = 4$.

$\therefore 3t - (24 - t) = 4$, 解得 $t = 7$.

$\therefore$ 当 $t = 7$ 秒时, 四边形 $PQCD$ 为等腰梯形.

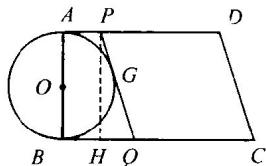


图 4

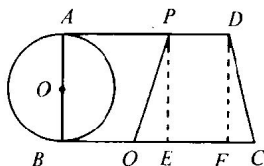


图 5

(2) 如图 5, 设运动 t 秒时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切于点 G , 过 P 作 $PH \perp BC$, 垂足为 H .

$\therefore PH = AB$, $BH = AP$. 即 $PH = 8$, $HQ = 26 - 4t$.

由切线长定理得 $PQ = AP + BQ = t + 26 - 3t = 26 - 2t$.

由勾股定理得 $PQ^2 = PH^2 + HQ^2$.

即 $(26 - 2t)^2 = 8^2 + (26 - 4t)^2$.

用方程求解

化简、整理, 得 $3t^2 - 26t + 16 = 0$.

解得 $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = 8$.

即 $t = \frac{2}{3}$ 秒或 8 秒时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切.

$\therefore$ 当 $t = 0$ (秒) 时, PQ 与 $\odot O$ 相交; 当 $t = 8\frac{2}{3}$ (秒) 时, Q 点运动到 B 点, P 点尚未运动到 D 点, 但也停止运动, 此时 PQ 也与 $\odot O$ 相交.

$\therefore$ 当 $t = \frac{2}{3}$ 或 8 时, PQ 与 $\odot O$ 相切;

当 $0 \leq t < \frac{2}{3}$ 或 $8 < t \leq 8\frac{2}{3}$ 时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相交;

当 $\frac{2}{3} < t < 8$ 时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相离.

在本例中, 借助图形解题, 渗透了数形结合思想; 列方程求 t 值, 体现了方程思想; 同时作为一个动态几何题, 选取切线位置时的相关值求解, 再界定其他范围, 是化动为静, 巧取特值的方法和分类讨论思想的应用.

说明 这样的例题不胜枚举, 在本书中将对初中数学解题中的常用思想和常见方法作专题介绍. 当然, 任何思想、方法都相互渗透, 相互体现, 本书所介绍的不是严格的分类, 往往一道题中体现了多种思想, 从而会出现各种不同的解法, 请大家注意体会. 在写作中, 将会引用各种资料, 恕难以一一列举.



一 方程思想

知识点精析

这里列举的是一道经典名题：

代数学先驱丢番图(公元3世纪希腊数学家),在他的墓碑上刻着这样一首诗:

路过的人啊,

这里埋葬着丢番图.

请您算一算下面的数目,

便可知他一生经过多少寒暑.

他一生的六分之一是幸福的儿童.

青年期占了十二分之一,两颊鬍鬚渐生.

hú xū, 即胡须

接下来,七分之一的生命用在谈情说爱,

才结婚成立美满家庭.

五年后,有了儿子,

不料,这孩子竟先其父四年而终,

只活到他爸爸的一半年龄.

晚年丧子的老人,真可怜,

悲痛中度过那风烛残年.

算一算吧,路过的人,

丢番图共活了多少岁,才和死神见面.

亲爱的读者,您能算出丢番图生活的年岁吗? 您能用简单的方法心算出来吗?

解答过程如下:

解法1 设丢番图生活的年岁为 x , 则

列方程求解的思路

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$$

整理此方程,得 $\frac{9}{84}x = 9$, $x = 84$ (岁).

当我们用这样一个方程式表示出诗中的等量关系时,不能不惊叹方程的神奇.

所以,丢番图活了 84 岁.

心算求解思路

解法 2 丢番图在世各时段分别占一生的 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{12}$ 、 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{2}$, 说明他活的年数是 6, 12, 7.2 的公倍数 84, 168, ……按常例, 他活不到 168 岁以上, 况且 168 岁的 $\frac{1}{6}$ 是 28 岁, 超出了童年期, 所以, 断定丢番图活了 84 岁.

分析 从上面的两种解法可以看出, 应用方程知识求解, 不仅简捷, 而且易于理解、接受, 列方程解应用题是对应用题中已知与未知条件关系的最好的数学阐释.

方程知识是初中数学的核心内容, 掌握、理解方程思想并应用于解题十分必要. 所谓方程思想就是从分析问题的数量关系入手, 适当设定未知数, 运用定义、公式、性质、定理和已知条件、隐含条件, 把所研究的数学问题中已知量和未知量之间的数量关系, 转化为方程或方程组等数学模型, 从而使问题得到解决的思维方法. 方程思想对解决与等量有关的数学问题十分有效.

初中阶段对方程思想的考查主要有两个方面: 一是列方程解应用题, 这类问题的关键是借助图、表及常用规则找出问题中的等量关系, 以便建立等式, 其中常用规则是指一类问题中的计算法则, 如圆的面积 $S = \pi r^2$ (r 指圆的半径), 时间 $\times$ 速度 = 路程等; 二是列方程(组)解代数问题或几何问题, 建立这类问题的等量关系的依据一般是数学定义、定理、法则和相关性质等.

用方程知识表示出几何图形中的数量关系, 易于从纷繁的头绪中辟出捷径.

典型例题导析

1. 解代数问题时的应用

(1) 列方程求值

[例 1] (舟山市, 1998) 若分式 $\frac{x^2+2x-3}{x+3}$ 的值为零, 则 x 的值为_____.

解 按题意列出方程组:

依据是分式的性质

$$\begin{cases} x^2+2x-3=0, \\ x+3 \neq 0. \end{cases} \quad \text{解之得 } x=1.$$

[例 2] (河南省, 1998) 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 代数式 $\frac{1}{3}(1-2x)$ 与代数式 $\frac{2}{7}(3x+1)$ 的值相等. 这是明确了等量关系

解 由题意, 可得

$$\frac{1}{3}(1-2x) = \frac{2}{7}(3x+1), \quad \text{解得 } x = \frac{1}{32}.$$

[例3] (常州市,2000)已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根是 2, 则另一个根是_____, m 是_____.

解 由已知得 $4 + 2m - 6 = 0$,

依据根的定义建立一元一次方程

$\therefore m = 1$, 另一个根为 -3 .

说明 上面几例是根据数学的定义、性质或题意找到等量关系后列出方程的.

(2)降次求值

[例4] 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根, 那么 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19 =$ _____.

分析 因为已知条件是一元二次方程的两个根, 由此联想相关的根的定义与根与系数的关系, 降次求解待求式的值.

这是一种逆用定义法

解 由方程根的定义, 得 $x_1^2 + x_1 - 3 = 0, x_2^2 + x_2 - 3 = 0$.

变形得 $x_1^2 = -x_1 + 3, x_2^2 = -x_2 + 3$.

由根与系数关系, 得 $x_1 + x_2 = -1$.

$$\therefore x_1^3 - 4x_2^2 + 19 = x_1 \cdot (-x_1 + 3) - 4(-x_2 + 3) + 19$$

$$= -x_1^2 + 3x_1 + 4x_2 + 7$$

$$= -(-x_1 + 3) + 3x_1 + 4x_2 + 7$$

$$= 4(x_1 + x_2) + 4$$

$$= 4 \times (-1) + 4 = 0.$$

这个过程体现了
逐步降次的方法

(3)因式分解

二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的因式分解可借助一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的知识. 它们之间的关系是: 当 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个根 x_1, x_2 时, 则 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. 利用这个关系, 即把二次三项式的因式分解转化成一元二次方程的知识了.

[例5] 因式分解: $x^2 + x - 2 + \sqrt{2}$.

解 令 $x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0$, 即 $x^2 + x + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) = 0$,

$$\therefore x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{故 } x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2} + 1).$$

用分组分解法分解并不难

同时, 我们还可以利用一元二次方程根的判别式来判定一个二次三项式是否能进行因式分解.

[例6] 判断二次三项式 $2y^2 - 3y + 4$ 能否分解因式, 如果能, 请写出结果; 如果不能, 请说明理由.

这个过程体现了知识间的相互转化

解析 本题实际上是判断一元二次方程 $2y^2 - 3y + 4 = 0$ 是否有根的问题, 因 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 < 0$, 方程无实数根, 则二次三项式 $2y^2 - 3y + 4$ 不能分解因式.

(4)求完全平方式

[例 7] 已知 $y^2 - 4my + 16$ 是完全平方式, 则 m 的值是_____.

解析 要使 $y^2 - 4my + 16$ 是完全平方式, 即要使方程 $y^2 - 4my + 16 = 0$ 有等根, 此时 $\Delta = 16m^2 - 4 \times 16 = 0$, 故可求得 $m = \pm 2$.

(5)应用方程根的定义求值

[例 8] 若 m, n 是关于 x 的方程 $x^2 + (p-2)x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则代数式 $(m^2 + pm + 1)(n^2 + pn + 1)$ 的值等于_____.

解 $\because m, n$ 是方程 $x^2 + (p-2)x + 1 = 0$ 的两个实根,

$$\therefore m^2 + (p-2)m + 1 = 0, n^2 + (p-2)n + 1 = 0.$$

根的定义应用

$$\text{即 } m^2 + pm + 1 = 2m, n^2 + pn + 1 = 2n.$$

变形转化

又由根与系数的关系可知 $mn = 1$.

$$\therefore (m^2 + pm + 1)(n^2 + pn + 1) = 2m \cdot 2n = 4mn = 4 \times 1 = 4.$$

说明 在求本例待求式的值时, 应善于观察, 发现其中的特点, 从而依据已知条件和相关定义作出合理的变形.

[例 9] (连云港市, 1997) 已知实数 a, b 满足 $a^2 - 7a + 2 = 0, b^2 - 7b + 2 = 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$ _____.

解析 (1) 当 $a \neq b$ 时, 根据方程的定义, 实数 a, b 是方程 $t^2 - 7t + 2 = 0$ 的两根,

$$\therefore a + b = 7, ab = 2,$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = \frac{45}{2}.$$

$$(2) \text{ 当 } a = b \text{ 时, } \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 2.$$

这个值别求掉了

说明 对具有类似结构的式子 $ax_1^2 + bx_1 + c = 0, ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ 同时出现时, 都可逆想一元二次方程根的定义, 把 x_1, x_2 当作一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根.

这实际上是构造方程法

(6)构造方程

[例 10] 已知实数 a, b, c 满足 $a = 6 - b, c^2 = ab - 9$. 求证: $a = b$.

配方法以及非负数的性质的应用

解 $\because a + b = 6, ab = c^2 + 9, \therefore a, b$ 是方程 $t^2 - 6t + 9 + c^2 = 0$ 的两实数根. 变形得 $(t-3)^2 + c^2 = 0, \therefore t = 3, c = 0, \therefore a = b = t = 3$, 得证.

说明 本题还可这样考虑: a, b 是方程 $t^2 - 6t + 9 + c^2 = 0$ 的两实数根, 则 $\Delta = 36 - 4(9 + c^2) \geq 0$, 即 $-4c^2 \geq 0$, 亦即 $c^2 \leq 0$.

$\therefore c = 0$. 即 $\Delta = 0, \therefore a, b$ 是方程的两等根.