中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

高等數學教程

上册

П. С. МОДЕНОВ
Г. Л. НЕВЯЖСКИЙ 著
蔡昌齡譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等數學教程

上册

П. С. 孟傑諾夫
Г. Л. 涅瓦日斯基 著
蔡昌齡 譯

商務印書館

本書係根據蘇聯科技出版社（Огиз государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的孟傑諾夫（П. С. Моденов）與涅瓦日斯基（Г. Л. Невяжский）合著的“高等數學教程”（Курс высшей математики）1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院教科書。

本書中譯本分上下兩册出版。此爲上册，由東北師範大學蔡呂齡譯出。

高 等 數 學 教 程

上 册

蔡 呂 齡 譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號

新華書店華東總分店 總經售
上海南京西路一號

商務印書館上海廠印刷
(50852A)

1954年2月初版 版面字數167,000
印數1—5,000 定價￥11,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

序　言

本書可供師範專科學校的物理數學系及師範學院的數學系以外各系教學之用。

稍微超出教學大綱範圍的補充材料是用小字排印的。省略去所有這些材料，對於理解基本課文也是沒有妨礙的。

函數在一點的連續性的概念及函數在一點的極限的概念都是從極一般的觀點來敘述的。根據這種觀點是不能把所有與這有關的定理都統一起來(像通常所作的那樣)。如果只觀察那樣一些點，即在它們的近傍內函數是被定義了的，則可以省略 § 97 並且把它看作是 § 106 的推論。凸性(§ 91)及極值(§ 93)的概念也可以挪到講這些概念的充分條件的那幾個有關的節內來講。

最後，在教學當中，也可以把 § 94 及 § 95 省略去而把它們的內容挪到微分法裏面來講。

但是應該考慮到：不藉助於微分法而能用有限的方法來研究函數及給出與函數有關的一系列概念(增減、凸性、極值等等)，是很有益的。

在一切情況下，都可以如意地變更敘述材料的順序。補充材料，在指出一系列"高等數學"的問題與初等數學的聯繫的方面，是有益處的。

最後，我們要向在整理原稿的工作中給與我們很大幫助的校對人思・伊・諾渥舍羅夫教授、及給我們提出很多寶貴指示和意見的夫・夫・涅梅茲克丹教授、阿・伊・馬爾庫謝維奇教授、並在最後的一次審查原稿中給與幫助的伊・耶・他那他爾各位致以甚深的謝意。

莫斯科　1947 年 6 月　　波・西・孟傑諾夫

哥・里・涅夫耶日斯基

上册目錄

序言

第一章　直線上的解析幾何……1

§1.　直線上點的座標……1
§2.　有向距離……2
§3.　距離……4
§4.　開間隔與閉間隔……5
§5.　單比……9
§6.　座標中的單比……9
§7.　分線段爲已知比……11
§8.　重心……13
§9.　座標系的變換……14

第二章　平面座標法……16

§10.　平面上的笛卡爾座標系……16
§11.　極座標系……18
§12.　笛卡爾座標和極座標的聯系……21
§13.　分線段爲已知比……22
§14.　重心……24
§15.　座標軸的移動……25
§16.　兩點間的距離……27
§17.　三角形面積……28
§18.　伸縮和直移……32
§19.　斜角座標系中三角形的面積……40

第三章　直線……42

§20.　直線方程式……42
§21.　直線的截距方程式……47
§22.　帶有角係數的直線方程式……48
§23.　某些個別情形……52
§24.　直線的基本問題……54

§25. 由點到直線的有向距離……61

第四章 圓……65

§26. 圓的標準方程式……65
§27. 點關於圓的羃.兩圓的根軸與三圓的根心……67
§28. 曲線方程式的構成……69

第五章 橢圓……74

§29. 橢圓的定義……74
§30. 橢圓的標準方程式……78
§31. 橢圓的參數方程式……80
§32. 橢圓規……81
§33. 橢圓的直徑……82
§34. 橢圓的對稱中心及對稱軸……84
§35. 橢圓的切線……85
§36. 橢圓的焦點……87

第六章 雙曲線……91

§37. 雙曲線定義,雙曲線的方程式,圖形,漸近線……91
§38. 雙曲線旋轉和雙曲線的直徑……96
§39. 等邊雙曲線……101
§40. 雙曲線的切線……103
§41. 雙曲線的焦點……105

第七章 拋物線……110

§42. 拋物線定義及其圖形……110
§43. 二次三項式符號的幾何意義……114
§44. 拋物線爲一點在重力的影響下運動的軌跡.拋物線旋轉及其性質……117
§45. 拋物線的直徑……121
§46. 拋物線的切線……122
§47. 拋物線焦點……124

第八章 圓錐截線……126

§48. 原點在頂點的橢圓,雙曲線和拋物線方程式……126
§49. 橢圓,雙曲線和拋物線爲圓周的射影……127

第九章 二次曲線一般理論……131

§ 50. 二次曲線 …… 131
§ 51. 笛卡爾直角座標軸的旋轉 …… 131
§ 52. 化二次曲線一般方程式爲標準形式 …… 132
§ 53. 注意事項 …… 140

第十章 空間座標法 …… 143

§ 54. 空間笛卡爾座標系 …… 143
§ 55. 分線段爲已知比 …… 144
§ 56. 座標軸的移動 …… 145
§ 57. 由座標原點到點的距離及兩點之間的距離 …… 147

第十一章 直線 …… 149

§ 58. 直線的角係數 …… 149
§ 59. 二直線間的角 …… 150
§ 60. 三角形面積 …… 151
§ 61. 直線的參數方程式 …… 152

第十二章 平面 …… 155

§ 62. 平面方程式 …… 155
§ 63. 平面通過座標原點的條件 …… 159
§ 64. 直線與平面共面的條件 …… 160
§ 65. 平面方程式的討論 …… 161
§ 66. 通過已知點共面於二已知直線的平面方程式 …… 163
§ 67. 通過三點的平面方程式和通過兩點與已知直線共面的平面方程式 …… 164
§ 68. 平面的截距方程式 …… 165
§ 69. 兩平面間的角 …… 165
§ 70. 直線與平面間的角 …… 166
§ 71. 直線是兩平面的交線 …… 167
§ 72. 由點到平面的距離 …… 168

第十三章 二次曲面 …… 170

§ 73. 球面 …… 170
§ 74. 柱面 …… 170
§ 75. 錐面 …… 172
§ 76. 旋轉曲面 …… 174
§ 77. 橢圓面 …… 177

§78. 單葉雙曲面和雙葉雙曲面 …… 178
§79. 橢圓拋物面 …… 179
§80. 雙曲拋物面 …… 180
§81. 注意事項 …… 181
解答及提示 …… 184

高等數學教程

第一章　直線上的解析幾何

§1　直線上點的座標

在直線上，取不同的且有固定順序的兩點 O 和 E。

這樣的幾何圖形，即在其上取定不同而有順序的兩點 O 和 E 的直線，叫作笛卡爾座標軸。

以上所說的兩點之中、第一個點，即 O 點，叫作座標原點；第二個點，即 E 點，叫作單位點(圖 1)。

點 O 和 E 又稱爲座標軸的基本點。

圖　1

以基本點爲界的線段 OE 叫作單位線段。

我們將座標軸表示爲 Ox。任意點 M 在座標軸上的位置將由一數 x 來確定，而這個數就叫作 M 點的座標。數

$$x=\pm\frac{OM}{OE},$$

叫作 M 點在座標軸上的座標，並且當線段 OM 和 OE 同方向時，在等式右邊取＋號，當這兩個線段反方向時取－號。

在圖 1 中，M 點的座標等於 -2，因爲比 $\frac{OM}{OE}$ 等於 2，且線段 OM 和 OE 方向相反。

座標原點的座標等於零。

單位點的座標等於 1。

顯然座標軸上的一切點，以原點作分界點，和單位點處在同一方面的，座標都是正的，而處於原點另一方面的，座標都是負的。

因此，被稱作 M 點座標的數 x，對應於座標軸上每一個點。

反之，如 x 爲任意實數，則在座標軸上可以找出一點 M，它的座標是數 x。

在圖 2 中作出點 M, N, P，它們所對應的座標等於 3, 5, 與 $-\frac{5}{2}$。

座標等於 x 的點 M 可表示爲：

$$M(x)\text{。}$$

總括以上，我們看到：

（1）直線（座標軸）上每一個點，對應於被稱爲這點座標的一個確定的數 x；

（2）兩個不同的點 M_1 和 M_2，對應於兩個不同的座標 x_1 和 x_2（這是由點座標的定義得來的）；

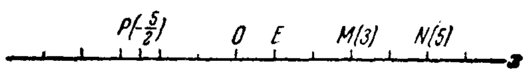

圖 2

（3）每一個數 x，在座標軸上對應於一點 M，而數 x 是它的座標。

具有上述各性質的對應（現象）稱爲一一對應。

所以引用直線上點座標的概念，就可以把直線上所有點的集合，一一對應地寫像於所有實數的集合。

練 習

1. 在直線上取點 O 和 E，使它們的距離爲 2 厘米，描出以下各點：

$$A(4),\ B(-1),\ C(6),\ D(-\frac{1}{2}),\ K(\frac{5}{3}),\ F(-\sqrt{2}),\ G(\sqrt{29})\text{。}$$

§2 有向距離

在初等幾何學中，時常用正數來表示線段的長。

等於線段 AB 和單位線段 OE 的比 $\frac{AB}{OE}$ 的正數，叫作線段 AB 的長，或它的量。在許多數學以及物理問題中，無論用正數或是用負數來

度量線段都是很方便的；這種度量法產生在同一直線上有一些線段的情況下。研究以下的例子：幾個人沿着一條直路按相反的方向行走。他們所走的路程，用正數以及負數來度量是比較方便的，而且數的符號可以表明行動的方向。例如"所經過的路程依次爲 2 千米，-3 千米，-5 千米等"就表明第一個人向某一個方向走了 2 千米，而第二人和第三人向相反的方向走了 3 千米和 5 千米。

點 M 在座標軸上的座標顯然就是由座標原點到 M 點的有向距離。所以在解析幾何的第一個步驟上，實質上就遇到了有向距離的概念。

圖 3

在座標軸上，研究任意線段 AB（圖 3）。

我們稱數 $\gamma=\pm\dfrac{AB}{OE}$ 爲它的有向長，並且當線段 AB 與 OE 同方向時取＋號，當這兩個線段反方向時取－號。例如在圖 3 中，線段 AB 的有向長等於-2，因爲線段 AB 所指的方向，和 OE 所指的方向相反，又線段 AB 與 OE 的比等於 2。在同一圖上，線段 BA 的有向長等於 2，因爲線段 BA 和 OE 同方向，而它和 OE 的比仍然爲 2。

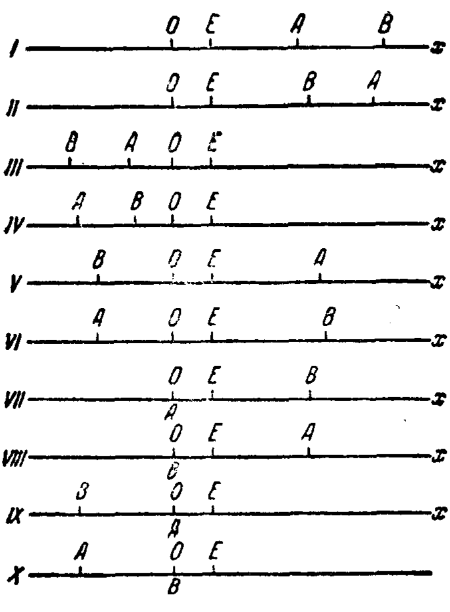

圖 4

定理　端點座標依次爲 x_1 與 x_2 的線段 AB 的有向長 γ，等於兩座標的差 x_2-x_1，其中被減數是線段終點的座

標，而減數是始點的座標：

$$\gamma=x_2-x_1\text{。}\tag{1}$$

證明　為了得出公式(1)，應研究 A 點和 B 點對於座標原點的一切可能位置；這些位置一共有十種(圖4)。現在對其中任意兩種情形求出公式(1)；至於所餘的情形，希望讀者自己研究。

例如研究第二種情形。在這裏 A 點和 B 點的座標為正，而 γ 為負因此

$$x_1=\frac{OA}{OE},\quad x_2=\frac{OB}{OE},$$

$$\gamma=-\frac{AB}{OE}=-\frac{OA-OB}{OE}=-\left(\frac{OA}{OE}-\frac{OB}{OE}\right)=$$

$$=\frac{OB}{OE}-\frac{OA}{OE}=x_2-x_1\text{。}$$

在第六種情形中有：

$$x_1=-\frac{OA}{OE},\quad x_2=\frac{OB}{OE},$$

$$\gamma=\frac{AB}{OE}=\frac{OA+OB}{OE}=\frac{OA}{OE}+\frac{OB}{OE}=-x_1+x_2=x_2-x_1\text{。}$$

注意　當 A 點和 B 點重合時，公式(1)也成立；那時 $\gamma=0$。

練　習

2．在座標軸上取點 O 與 E 的距離為一厘米，作以下各對點：

(1) $A(4)$，$B(7)$；　(2) $A(3)$，$B(-2)$；

(3) $A(-2)$，$B(-7)$；　(4) $A(-1)$，$B(5)$；

由以上每種情形計算線段 AB 的有向長 γ，並由圖形檢查計算的結果。

3．證明由座標原點到點 M 的有向距離等於 M 點的座標。

4．溫度計指出溫度 $t_1=-10°$；經過了某一個時間後，它又指出 $t_2=-25°$；求自第一次所指的到第二次所指的有向距離，並說明計算結果的意義。

§3　距離

由前節所述可得線段 AB 的長 d 為此線段有向長 γ 的絕對值：

$d=|\gamma|$ 或

$$d=|x_2-x_1|。\qquad (1)$$

所以具有端點 $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ 的線段 AB 的長，等於這些點座標的差的絕對值，同時無論哪一個座標爲減數，哪一個座標爲被減數都是一樣，因爲我們所取的是這個差的絕對值。

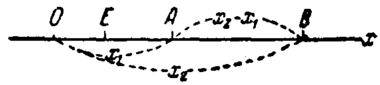

圖 5

注意 1　對於相重合的點，公式 $d=|x_2-x_2|$ 也成立，假如我們規定相重合的兩點之間的距離等於零。

注意 2　按照圖 5 不難記憶公式 $\gamma=x_2-x_1$ 和 $d=|x_2-x_1|$。

練　習

5. 在以下各情形中，計算線段 AB 的長

(1) $A(3)$, $B(-2)$;　　(2) $A(-5)$, $B(-10)$;　　(3) $A(0)$, $B(-4)$。

§4　開間隔與閉間隔

今後我們時常遇到兩個不同的數 α 與 β 之間所有數的集合。例如取代數式

$$(x-2)(x-5)$$

並提出一個問題：對於哪些 x 的值，這個式子的值是負的？容易看到，使以上乘積爲負的一切 x 值，構成數 2 與 5 之間一切數的集合：

$$2<x<5。$$

兩個不同的數 α 與 β 之間一切數 x 的集合：

$$\alpha<x<\beta$$

叫作開間隔並表示爲　　(α, β);

永遠將較小的數 α 寫在前面；數 α 與 β 叫作開間隔的界。在開間隔 (α, β) 內，嚴格地包括着大於 α 且小於 β 的一切數，開間隔的界其實不在這個範圍之內。

在座標軸上作出點 $P(\alpha)$ 與 $Q(\beta)$(圖 6)。和開間隔(α, β)的一切座標值 x 相對應的點集合 $M(x)$，是由座標軸上位於 P, Q 二點之間的一切點所構成的(圖 6 中線段 PQ 端點的箭頭是用來強調 P, Q 兩點不在所研究的開間隔之內的)。

數 α 與 β 之和的一半，即 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 叫作開間隔(α, β)的中心；這個數對應於線段 PQ 的中點 $A\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，因爲由 A 點到 P, Q 兩點的距離相等：

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right|, \text{及}\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right|。$$

數 $\delta=\frac{\beta-\alpha}{2}$，即線段 PQ 之長的一半；或由開間隔中心到它任一界的距離，叫作開間隔的半徑(圖 6)。

圖　6

由中心與半徑的概念，可用以下不等式來說明開間隔：

$$|x-a|<\delta。$$

這個不等式表明點 $M(x)$ 與開間隔中心 $A(a)$ 的距離，小於開間隔的半徑 δ，所以與滿足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切 x 相對應的點集合 $M(x)$，是座標軸上在 P, Q 兩點之間的一切點的集合。

當已知 a 與 δ 時，由關係式

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \delta=\frac{\beta-\alpha}{2},$$

可以求 α 與 β：　　$\alpha=a-\delta, \quad \beta=a+\delta。$

於是對於任意的 a 與 $\delta>0$，可以表示開間隔爲：

$$(a-\delta, a+\delta)$$

或

$$a-\delta<x<a+\delta,$$

不過在幾何方面這是十分明顯的。

例 1. 對於開間隔(3, 7)或 $3<x<7$，中心 $a=\frac{3+7}{2}=5$，半徑 $\delta=\frac{7-3}{2}=2$，也就是說開

間隔可以表示爲：

$|x-5|<2$ (圖7)。

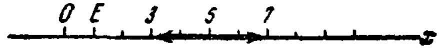

圖　7

例 2. 開間隔 $|x+4|<6$ 或 $|x-(-4)|<6$ 可以表示爲：$(-4-6, -4+6)$ 或是 $(-10, 2)$ 或 $-10<x<2$ (圖 8)。

圖　8

現在轉到以下的重要概念。

在兩數 α 與 β 之間的一切數 x 的集合，包括 α 與 β 本身在內：$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$，叫作閉間隔。

閉間隔表示爲：$[\alpha, \beta]$；永遠將較小的數 α 放在第一位置。顯然閉間隔也可以表示爲：$|x-a| \leqslant \delta$；其中

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \delta=\frac{\beta-\alpha}{2}。$$

在幾何方面，閉間隔 $[\alpha, \beta]$ 對應於座標軸上以 $P(\alpha)$，$Q(\beta)$ 兩點爲界的線段上的一切點的集合(圖 9)。

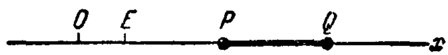

圖　9

在 α 與 β 二數之間的一切數的集合，包括其中的一數在內，稱爲半開間隔或半閉間隔，並表示爲：$[\alpha, \beta)$ (如果半開間隔內含有數 α)，或爲：$(\alpha, \beta]$ (如半開間隔內含有數 β)。

圖　10

圖　11

在圖 10 與 11 中作出了半開間隔 $[\alpha, \beta)$ 與 $(\alpha, \beta]$。

大於數 α 的一切數的集合 $(x>\alpha)$ (圖 12)，也稱爲開間隔，並表示爲：$(\alpha, +\infty)$ 或 $\alpha<x<+\infty$。

圖　12

小於數 α 的一切數的集合 $(x<\alpha)$，也叫作開間隔，並表示爲：$(-\infty, \alpha)$ 或 $-\infty<x<\alpha$ (圖 13)。

圖　13

一切實數的集合，

也稱爲開間隔，並表示爲：$(-\infty, +\infty)$ 或爲 $-\infty<x<+\infty$。

圖　14

最後，大於或等於數 a 的一切數的集合，以及小於或等於數 a 的一切數的集合，稱爲半開間隔或半閉間隔；而表示爲：$[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, a]$，或 $a\leqslant x<+\infty$ 及 $-\infty<x\leqslant a$，或 $x\geqslant a$，$x\leqslant a$（圖 14 與 15）。

圖　15

開間隔 $(a-\delta, a+\delta)$ 或 $|x-a|<\delta$ 也叫作數 a 的 δ 鄰域。滿足條件 $a\leqslant x<a+\delta$ 的一切數 x 的集合，叫作 a 點的右鄰域。能使不等式 $a-\delta<x\leqslant a$ 成立的一切數 x 的集合，叫作 a 點的左鄰域（圖 16 與 17）。

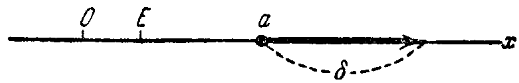

圖　16

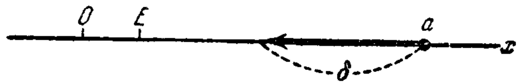

圖　17

注意　我們稱 $-\infty$ 與 $+\infty$ 爲非原有數（$-\infty$ 爲“負無限”非原有數；$+\infty$ 爲“正無限”非原有數）。由以上定義顯然可知數 $+\infty$ 大於任何實數，而數 $-\infty$ 小於任何實數。

對於非原有數，也可進行某些算術運算。但這兩個數不具有初等數學中所談到的那許多實數的性質❶。所以對它們進行運算時應十分注意；並且這種運算本身當然也應該預先定義出來；本書中不談到這些問題❷。

練　習

6. 用一切方法表示以下的數集合：

❶ 參考 Новосёлов С. И. 代數，師範專科學校教本，1947。

❷ 參考“學校數學”雜誌，1947 年第 4 期中 А. И. Маркушевича 教授論文“函數概念”。