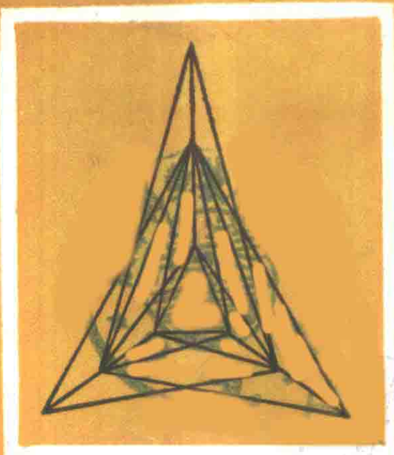
图论的知识

赵庸 著



知识出版社

图论的知识

赵　庸　著

知识出版社

图论的知识

赵 庸 著

知识出版社出版

（北京安定门外外馆东街甲1号）

新华书店北京发行所发行　中国空间技术研究院印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张5　字数97千

1985年8月第1版　1985年8月第1次印刷

印数：1—8280

书号：7214·17　定价：0.75元

内 容 提 要

本书是系统工程丛书中的一册。系统工程学在很多领域中得到广泛的应用，而图论理论又是系统工程学的核心内容之一。它是工程课题进行系统抽象的很好助手，本书通俗地介绍一些图论理论的基本概念，同时还介绍了一些在工程方面的应用实例以便读者从中举一反三。本书适用于高中以上文化程度的读者和工程技术人员，也可做为短训班的教材。

前　　言

图论理论一般都认为是1736年由欧拉创始的。可是随后的一百多年，图论的理论发展得并不快。一直到了1874年科希霍夫才把树的理论应用在电网路的计算上。1936年左右科学界提出用图论解决四色问题，促进了图论的进一步的发展。

只是到了最近的40年间，图论理论才得到了迅速、稳定的发展，尤其是最近5～10年得到了强有力的发展。它的发展主要在两方面展开，一是有关图论理论方面的研究，另一方面是图论在工程上的应用。

图论的理论大致在如下领域内得到应用：

1．用于解决组合性问题；

2．用于解决管理方面的问题；

3．博弈问题；

4．结构设计的方案优选问题；

5．交通运输的优化问题；

6．电网络计算；

7．系统的静力学与动力学分析；

8．用于计算机科学；

9．用于化学；

10．社会科学；

11．用于计算数学。

工程技术人员都很熟悉，解决一项工程课题的时候，常

常是把要解决的问题抽象成某一数学模型（或计算模型），描述它的可以是有限个代数方程或微分方程，然后再求其解答。因此，对于解决工程课题来说，利用图论的理论可以把课题中的各项物理量之间用一个抽象的图来表示，按此图可以拟出方程，同时又可利用图的某些特性方便地简化这些方程，求解这些方程。另一特点是这种图又会不困难地与数字计算机的使用相配合，这一点是我们非常感兴趣的。由此可见，图论理论也是一种选用和求解数学模型的有力工具。

每本书都有它各自的特点和重点，这本书准备介绍有关图论的一些基本概念、定义、定理，以及在工程等方面的应用。本书不是一本纯数学教材。我们知道一般工程技术人员不易读懂图论的书籍，这样就对迅速了解和掌握图论理论用于解决实际工程问题带来不便。本书正是针对这种情况而写的，因此，这本书就做为工程技术人员学习图论的桥梁。基于这样的目的，这本书对于所介绍的有关定理就不加证明。虽然如此，但对其定理还是做了定性的解释，至于详细论证读者可参考有关图论的书籍。

本书是根据作者的讲稿修改后写成。该讲稿在结构优化设计短训班，结构计算机辅助设计短训班用过多次，这次成书时增加了一些内容。

一些同志在本书编写过程中提出很多宝贵的修改意见，作者在这里表示感谢。

作　　者

1982 年 4 月

目　　录

第一章　图论的基本概念

1—1　图

在图论中讨论的图是什么样的图呢？我们可以日常的教学、科研中的问题和生活当中的问题为例来说明。当我们分析研究问题的时候，必然存在着被研究的对象，而对象之间又存在着某种联系，这时我们把研究对象抽象成点（一般称为顶或结点），而把顶之间用线连接起来表示它们之间的物理联系，至于线是怎样连法是无关紧要的，这条连线一般称为边。

例如三个单位 a，b，c 之间有电话相通，这样一件事情可用图（1－1－1）来表示，三个单位 a,b,c 抽象为顶，三个

$$G=(V,\ E)$$
$$V=\{a,\ b,\ c\}$$
$$E=\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$$

单位之间相互的电话联系定为边 e_1，e_2，e_3，它表明

$$e_1=(a,\ b)=(b,\ a)$$
$$e_2=(b,\ c)=(c,\ b)$$
$$e_3=(a,\ c)=(c,\ a)$$

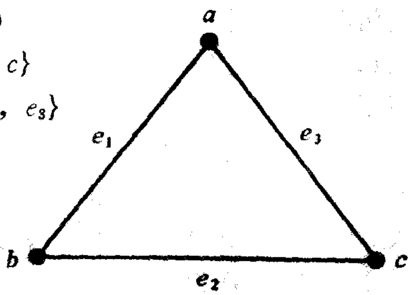


图 1－1－1　图的表示

这种类型的图称为无向图，它表明图的边 e_1，e_2，e_3 代

表了单位之间电话的相互联系，如 e_1 表示从 a 可以打到 b，也可以从 b 打到 a。如果电话联系是单向的，若 a 只能打到 b，b 只能打到 c，c 只能打到 a 时，这样的图称为向图，示于图（1－1－2）。这时

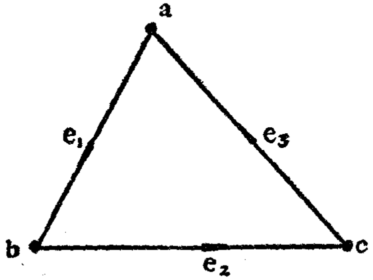


图1－1－2　向　　图

$e_1=(a,b)$；$e_2=(b,c)$；$e_3=(c,a)$

$$e_1=(a,b)$$
$$e_2=(b,c)$$
$$e_3=(c,a)$$

我们上面所定义的图可以用一个统一的符号来代表，即是 $G=(V,E)$，式中 V 代表顶集，E 代表边集，这样我们就可以说图 G 是顶集和边集的组合。

需要注意的是，我们所定义的图是用来表示对象（顶）之间的某种联系，那么，它与几何学中所定义的图是不一样的，因此，点的准确位置，边的曲直长短都是没关系的，我们重视的是顶之间相互连结的情况。例如图（1－1－1）可以画成图（1－1－3）样子。

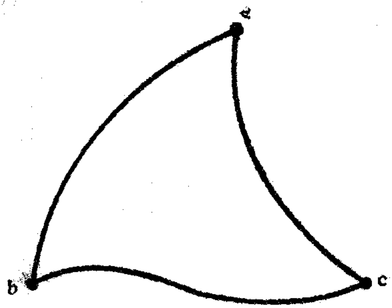


图1－1－3　图

又例如 A 与 B 是朋友，B 与 C 是朋友，C 与 A 是朋友，A 与 D 也是朋友，这样一个社交关系我们可以用图（1－1－4）或（1－1－5）来表示。值得注意的是图

（1－1－4）中的K点，它不是顶，它并不是我们研究的对象，只不过是边的交叉点而已，为了使顶表示得比较明显，本书中都用·表示。当然，我们尽量避免图（1－1－4）这种画法。

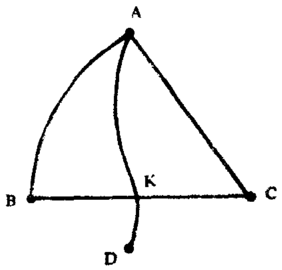


图1－1－4

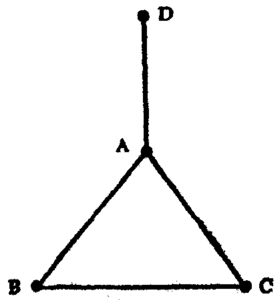


图1－1－5

又例如化学分子式CH_4，其中原子之间的相互关系也可用图（1－1－6）来表示。

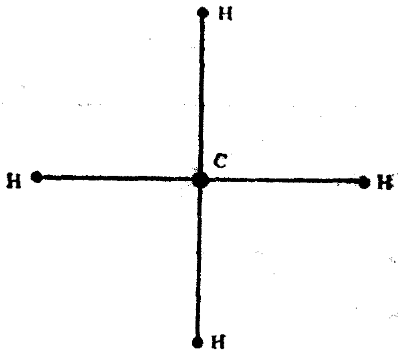


图1－1－6 CH_4图

例如，著名的哥尼斯堡（Königsberg）桥问题，C和D两个岛通向A和B有七座桥，见图（1－1－7），它们之间的相互关系就可以用图（1－1－8）来表示。

到此，我们以图（1－1－9）为例进一步讨论我们定义的图。这个图定义为

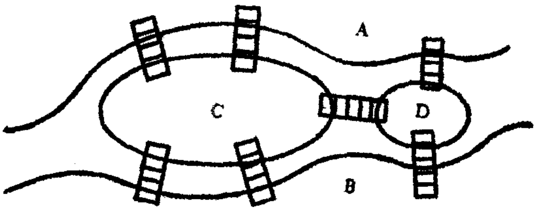


图 1-1-7

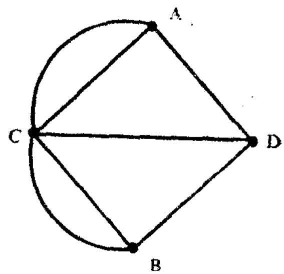


图 1-1-8

$V=\{a, b, c, d, e\}$，$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$。从图（1-1-9）可以看出：

1. 图的边集和顶集是有限的，故称为有限图，我们以后讨论的图都是这类的图；

2. 没有任何边与顶 e 相连接，这种顶 e 称为孤立顶；

3. 在一般情况下，一条边终止于两个顶，例如边 e_1，$e_1=(a, b)=(b, a)$。边与顶的连接关系叫做关联。换句话说 e_1 与 a，b 两个顶点关联，如果一条边所关联的顶不是有本质区别的顶就叫做自身回路，例如 e_6。那么没有边与其关联的顶就是孤立顶。

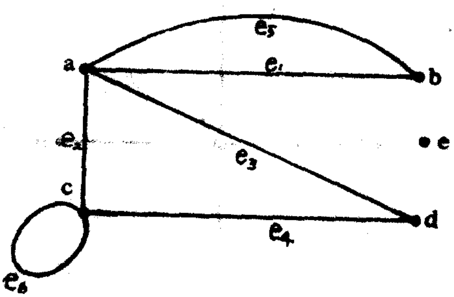


图 1-1-9　图 G=(V, E)

4. 两个已定的边仅仅汇交于顶的图叫做平面图，也就是说除了顶点以外图中的边没有交叉点。如果画图时不能尽量避开，那只要认识到它不是顶点就够了。

5. 如果一个图不存在自身回路，那么这个图称为是简单图。

6. e_4与e_5两条边互称为并行边。

7. 如果在图（1-1-9）中没有边，只有a，b，c，d，e顶，那么这种图称为零图。显然，至少有一个顶才能称为图。见图（1-1-10）所示。这表明顶集不是空集$V\neq\phi$，而边集是空集$E=\phi$。有的作者认为$V=\phi$，$E=\phi$才叫做零图（ϕ表示零集）。

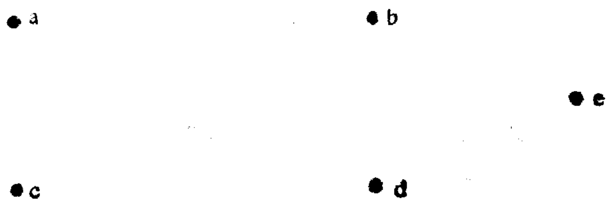


图1-1-10 零 图

1—2 子 图

设H和G各为一图，如果H图的顶集$V(H)$，边集$E(H)$是G图的顶集$V(G)$，边集$E(G)$的子集〔可以写成$V(H)\subset V(G)$，$E(H)\subset E(G)$〕，那么H图就是G图的子图。举例以明之，见图（1-2-1）和图（1-2-2）所示，由$G=(V, E)$图可见$V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$，$E(G)=$

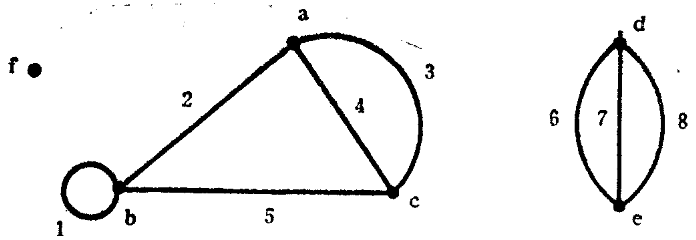
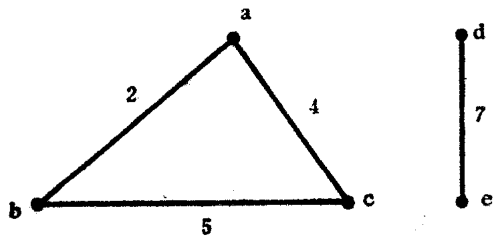
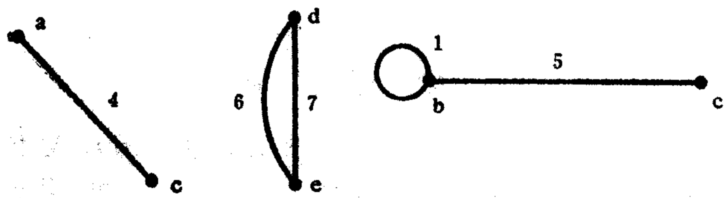


图1-2-1　图 G=(V, E)

{1，2，3，4，5，6，7，8}。图（1-2-2）中，举出了图$G=(V, E)$子图的几个例子(a)，(b)，(c)，(d)。



(a)



(b)　(c)　(d)

图1-2-2　G=(V, E)的子图

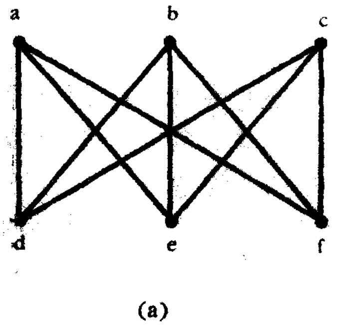
例如，由（a）子图可见 $E[(a)]=\{2,4,5,7\}$，$V[(a)]=\{a,b,c,d,e,f\}$，（a）图它具有 G 图的所有顶点，而边则是 G 图的一部分，有时把这种子图称为部分子图。从上面的简单介绍中可以得出这样两点看法：

1．每一个图都是它自身的子图；

2．图 G 的子图的子图也是 G 的子图。

1—3　同　构　图

如果有两个图，从表面图形样子上来看不一样，但边与顶是一一对应的，顶的数目和边的数目相同，顶与边的关联关系也相同，象这样的两个图叫做同构图。我们可以比较一下在图（1－3－1）中的（a），（b）二图，可不难看出，它们是符合上述定义的。



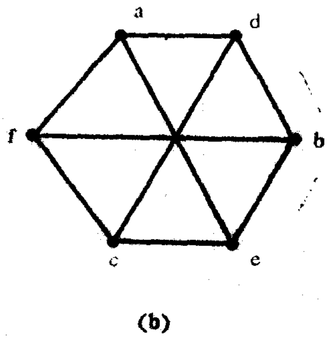


图1－8－1　同　构　图

对于图（1－3－1）中的（a）图，有的文献把它称为对分图，这是由于它的顶点分别集中在两侧的缘故。

对于向图的同构图，还要求边对顶的射向要一致，这可

以从图（1－3－2）中看出。对比其中的（a），（b）二图可见 $a \leftrightarrow a'$，$b \leftrightarrow b'$，$c \leftrightarrow c'$，$d \leftrightarrow d'$，（a，b）$\leftrightarrow$（a'，b'），（c，d）$\leftrightarrow$（c'，d'）等等。

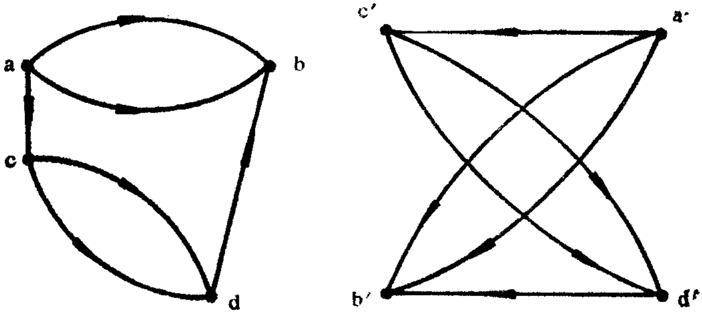


图1－3－2　向图的同构

1—4　通路与环

我们可以将图的某些边按一定次序排列起来成为一个边序列，这个序列可以重复经过某一个顶，但其边不能重复经过。图（1－4－1）示出的序列就是一个边序列。边序列中的边是首尾一个接一个地连接起来的，因此又形象地叫做边链。把边序列（1，2），（2，3），（3，3），（3，4），（4，2），（2，5），与图（1－4－1）对照看一下，可见对于这个边序列每条边只经过一次，可是顶点2和顶点3各经过了两次。这个边序列的起始顶点1和终了顶点5不是同一个顶点，对于这种边链常称为开边链。反之起始顶与终了顶是同一个顶点的边链称为闭边链。