2003

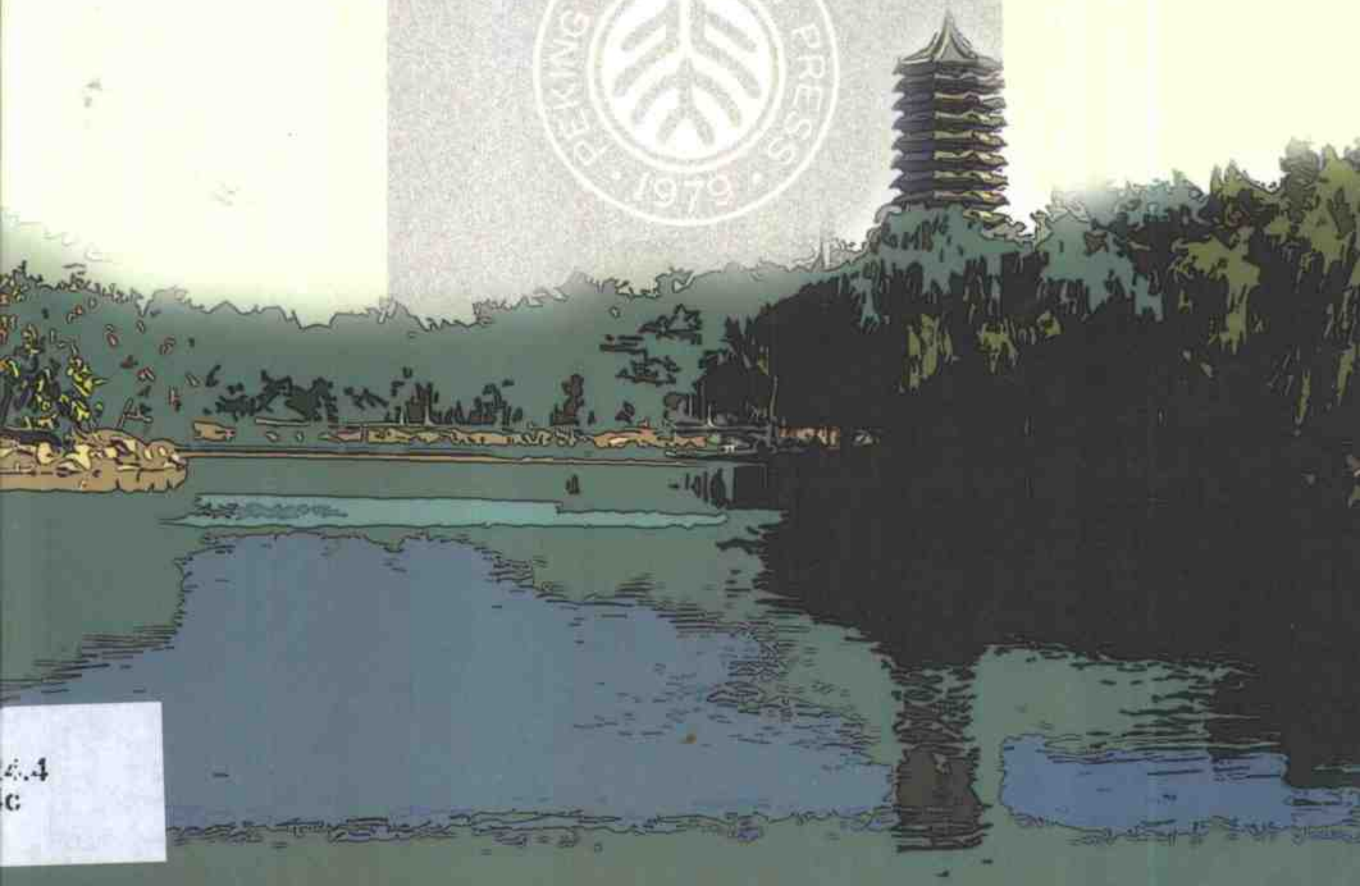
全国各类成人高等教育专升本

应试专家指导丛书

高等数学（二）

高等数学（二）专升本考试命题研究组　编

天白　主审



339

全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书

高等数学(二)

高等数学(二)专升本考试命题研究组 编

天 白 主审

北京大学出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)/高等数学(二)专升本考试命题研究组编. —北京：北京大学出版社，2002.8
(全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书)
ISBN 7-301-05798-9

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053754 号

书　　名：全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书·高等数学(二)
著作责任者：高等数学(二)专升本考试命题研究组　编
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-05798-9/G·0754
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
　　　　787×1092　16 开本　13.25 印张　350 千字
　　　　2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
定　　　价：20.00 元

出版前言

为了帮助参加全国各类成人高等教育专科段的广大考生顺利通过全国各类成人高等学校专科起点升本科(即专升本)入学考试,我们特组织专家、教授按新大纲编写了复习考试系列配套辅导教材——《全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书》。本套辅导教材包括《政治》、《英语》、《大学语文》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《教育理论》和《艺术概论》共8册。

应邀参加系列辅导教材编写工作的专家、教授,来自北京大学、中国人民大学、北京师范大学、首都师范大学等重点大学。他们长期从事专升本考前班辅导,有丰富的教学经验,深知考生的疑难与困惑。作者把他们的教学经验结合考生的考试实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大考生,旨在提高考生的考试合格率;他们中有曾多年参加过教育部考试中心命题工作,熟悉命题要求和命题规律;他们中许多人熟悉制定和修订复习考试大纲的出发点和目的,对考核内容和考核要点有深入的研究和透彻的理解。因此,本套辅导教材的作者对各学科的专升本考试命题研究有权威性。

本套复习考试辅导教材是依据2002年7月教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写的。辅导教材根据《复习考试大纲》的要求、命题难易比例和考试题型比例,设计了"应试指导"、"应试辅导"和"应试演练"三部分内容。

应试指导——对最新考试大纲中所列的知识点和要求进行详细的阐述,起到大纲内容的延伸、细化的作用。同时精选了典型例题,力求突出考试内容的要求、考试题型的了解以及解题技巧的训练。为了让考生了解试卷命题的特点和趋势,本套辅导教材附有各学科专升本考试的试卷结构和2003年"样卷",以供考生参考。

应试辅导——设计了考点测试题。测试题难易搭配,涵盖了考试大纲所要求的全部考点(包括考核的基本知识点、重点、难点和综合运用点)。

应试演练——提供两套演练试卷并附有详细解答,旨在帮助考生掌握试卷结构、熟悉考试题型。

北京大学出版社

2002年8月

编者的话

本书是根据教育部高校学生司、教育部考试中心于2002年7月制定的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》《高等数学》(二)编写的配套应试辅导书。

本书分三部分。第一部分是对最新考试大纲中所列的知识点和要求进行详细的阐述，是大纲内容的延伸和具体化，同时精选了代表性较强的例题，力求培养考生的数学思想，使考生更好地了解考试题型，以及掌握必要的解题技巧。

第二部分是考点测试题及详细解答。考生在解题运算时，应首先确定题目的类型和解题方法，即是从定义出发运算，还是根据定理、性质、运算法则来进行运算，还应注意解题的每一步根据。如发现解题错误，应找出错误的原因，及时纠正。多做练习，可以熟能生巧，同时要注意不断总结解题经验，这样可以掌握基本的运算方法，还可以巩固和加强所学的理论知识，检查自己对理论知识和运算技能的掌握程度，培养自己分析和解决问题的能力。

第三部分是两套演练试卷及详细解答，旨在帮助考生掌握试卷结构以及熟悉考试题型。

高等数学(二)的题目是多样的，命题形式也可以变换，但是基本内容不变，解题要求不变。理解了基本概念，把握了基本解题思路，应对考试就不会有问题。

参加本书编写的有张星炜、姚佩华、赵志芬、顾白都、张惠欣、张莹等同志，天白同志主审了全部书稿。

由于编者水平所限，书中一定有不少缺点和错误，请读者批评指正。

编　者

2002年8月于北京

目　录

第一部分　应试指导

第二部分 应试辅导

第三部分 应试演练

第一部分

应试指导

考纲总要求

考生应按本大纲的要求了解或理解“高等数学”中函数、极限和连续、一元函数微分学、一元函数积分学和多元函数微积分初步的基本概念与基本理论；学会、掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法. 应注意各部分知识结构及知识的内在联系；应具有一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力；能运用基本概念、基本理论和基本方法正确地判断和证明，准确地计算；能综合运用所学知识分析并解决简单的实际问题.

本大纲对内容的要求由低到高，对概念和理论分为“了解”和“理解”两个层次；对方法和运算分为“会”、“掌握”和“熟练掌握”三个层次.

第一章　函数、极限和连续

考试内容与要求

【考试内容】

（一）**函数**

（1）函数的概念：函数的定义，函数的表示法，分段函数，隐函数.

（2）函数的简单性质：单调性，奇偶性，有界性，周期性.

（3）反函数：反函数的定义，反函数的图像.

（4）函数的四则运算与复合运算.

（5）基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

（6）初等函数.

（二）**极限**

（1）数列极限的概念：数列，数列极限的定义.

（2）数列极限的性质：惟一性，有界性，四则运算法则，两面夹定理，单调有界数列极限存在定理.

（3）函数极限的概念：函数在一点处极限的定义，左、右极限及其与极限的关系，x 趋于无穷（$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时函数的极限，函数极限的几何意义.

（4）函数极限的性质：惟一性，四则运算法则，夹逼定理.

（5）无穷小量和无穷大量：无穷小量与无穷大量的定义，无穷小量与无穷大量的关系，无穷小量的性质，无穷小量的阶.

（6）两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

（三）**连续**

（1）函数连续的概念：函数在一点连续的定义，左连续和右连续，函数在一点连续的充分必要条件，函数的间断点及其分类.

（2）函数在一点处连续的性质：四则运算连续性，复合函数连续性.

（3）闭区间上连续函数的性质：有界性定理，最大值与最小值定理，介值定理（包括零点定理）.

（4）初等函数的连续性.

【考试要求】

（一）**函数**

（1）理解函数的概念，会求函数的表达式、定义域及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值，并会作出简单的分段函数图像.

(2) 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

(3) 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数.

(4) 熟练掌握函数的四则运算与复合运算.

(5) 掌握基本初等函数的性质及其图像.

(6) 了解初等函数的概念.

(7) 会建立简单实际问题的函数关系式.

(二) 极限

(1) 了解极限的概念(对极限定义中"ε-N","ε-δ","ε-M"的描述不作要求),掌握函数在一点处的左极限与右极限,以及函数在一点处极限存在的充分必要条件.

(2) 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质,无穷小量与无穷大量的关系.会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价).会用等价无穷小量代换求极限.

(4) 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

(三) 连续

(1) 理解函数在一点处连续与间断的概念,理解函数在一点处连续与极限存在之间的关系,掌握判断函数(含分段函数)在一点处连续的方法.

(2) 会求函数的间断点及确定其类型.

(3) 掌握在闭区间上连续函数的性质,会用它们证明一些简单命题.

(4) 理解初等函数在其定义区间上连续,并会利用函数连续性求极限.

§1.1 函　　数

一、函数的概念

(一) 函数的定义

设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y,变量 y 随变量 x 而变化,如果变量 x 在实数集合 D 中取某个数值时,变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**,记为

$$y=f(x),$$

其中 x 叫**自变量**,y 叫**因变量**或**函数**.

定义域　使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D,称为函数的**定义域**,记为 $D(f)$.

值域　函数 y 的取值范围,称为函数的**值域**,记为 $Z(f)$.

函数的定义有五个因素:自变量 x 表示主动变化的变量;定义域 D 表示自变量 x 的变化范围;因变量 y 在函数关系中是一个被动的、随自变量 x 的变化而变化的变量;x 和 y 的对应规律 f 表示因变量 y 关于自变量 x 的对应关系,使对 D 中每一个值 x,相应地确定惟一的对应值 $y=f(x)$;值域 Z 表示因变量的变化范围.

如果两个函数的对应关系 f 和定义域 D 都相同,则称这两个函数是相同的,否则就表示这两个函数是不同的.

例 1 下列各对函数中 $f(x),g(x)$ 为同一函数的为(　　).

A. $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　B. $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

C. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $g(x)=x$　　D. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

解 应选 B. 因为

A. 定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是

$$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

B. $f(x)$ 的分母、分子可约去 x，得到 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$，这与 $g(x)$ 相同.

C. 定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

D. 两个函数的对应法则不同. 当 $x\geqslant 0$ 时，有 $x=\sqrt{x^2}$；而当 $x<0$ 时，有 $-x=\sqrt{x^2}$.

求函数的定义域时，应考虑以下情况：

(1) 分式的分母取值不能为零；

(2) 偶次根的根底式应该为非负数；

(3) 对数符号下的式子(真数部分)只能是正的；

(4) 反正弦函数、反余弦函数符号下的式子只能介于 -1 和 1(包括 -1 和 1)之间；

(5) 若函数式有两项，其定义域应是两项定义域的公共部分；

(6) 对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

例 2 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(3-2x)$；　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　(3) $y=\ln(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

解 (1) 因为 $3-2x>0$，即 $2x<3$，所以 $x<\dfrac{3}{2}$. 故函数的定义域为 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$.

(2) 因为 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$. 化简不等式得

$$-2\leqslant x-1\leqslant 2,\quad -1\leqslant x\leqslant 3.$$

故函数的定义域为 $[-1,3]$.

(3) 设 $y_1=\ln(x-1)$，$y_2=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

对于 y_1，要求 $x-1>0$，即 $x>1$，所以 y_1 的定义域为 $(1,+\infty)$.

对于 y_2，要求 $x+1>0$，即 $x>-1$，所以 y_2 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

由于 $y=y_1+y_2$，所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的公共部分，即 $x>1$. 所以函数的定义域为 $(1,+\infty)$.

例 3 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，因此求 $f(x^2)$ 的定义域的问题就变成了求 x 的取值范围，使得 $x^2\in(0,1)$. 显然，当 $x\in(0,1)$ 时，可使 $x^2\in(0,1)$，但当 $x\in(-1,0)$ 时，也可使 $x^2\in(0,1)$，所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

(二) 函数的表示法

常用的函数表示法有以下三种形式：

1. 公式(解析法)

对自变量 x 和常数施以四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的数学式子,称为**解析表达式**.用解析表达式表示的一个函数,就称为函数的**解析法**,也称为**公式法**.例如

$$y = f(x) = 4x + e^{\sin x} + \ln(1 + x^2).$$

高等数学中所讨论的函数,绝大多数都是由解析法来表示的,这主要是便于对解析表达式进行各种运算,便于研究函数的性质.

2. 表格法

在实际应用中,常把自变量 x 所取的值与对应的函数值列成表格,用以表示函数关系.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

这种表示法就称为函数的**表格法**.例如,我们经常使用的各种数学用表,统计报表等等.

3. 图示法

在平面直角坐标系 Oxy 中,一般用 x 轴上的点表示自变量的取值,用 y 轴上的点表示因变量的取值.对给定的函数 $y=f(x)$,在定义域 $D(f)$中的每一个点 x 与相应的函数值 $f(x)$ 就确定了平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$,当自变量 x 在 $D(f)$中变动时,点 P 就在坐标平面上作相应的移动,于是便得到平面上的一条函数曲线,这就是函数的**图示法**(如图 1.1.1).

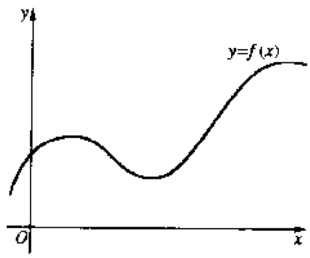


图 1.1.1

(三) 分段函数

在函数的解析式表示法中,有时会遇到对于定义域内自变量 x 的不同值,不能用一个统一的公式表示,而要用两个或两个以上的公式来表示,用这种方法表示的函数关系,称为**分段函数**.

对于分段函数,需要注意以下四点:

(1) 用两个或多个式子表示函数关系时,它表达的是一个整体函数,不是多个函数.

(2) 分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围之和.

(3) 在不同的子区间,函数的对应规则也不同.

(4) 在分段点处,函数的取值.

例 4 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 2, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

求 $f(-2)$,$f(1/2)$,$f(2)$及其定义域.

解 $f(-2)=\left.\dfrac{1}{x-1}\right|_{x=-2}=\dfrac{1}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left.x\right|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$, $f(2)=2$.

因为这个函数在 $x=0$ 时无定义,所以它的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,2]$.

例 5 求函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$$

的定义域.

解 函数的定义域为$(-2,2)$.

例 6 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$.

解 因为 $y=3-|x-1|$,所以

$$y=\begin{cases}3-(x-1), & x-1\geqslant 0,\\ 3-(1-x), & x-1<0,\end{cases}\quad 即\quad y=\begin{cases}4-x, & x\geqslant 1,\\ 2+x, & x<1.\end{cases}$$

二、函数的性质

(一) 单调性

对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,

如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内单调增加;

如果 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内严格单调增加,记作 $f(x)\uparrow,x\in(a,b)$;

如果 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内单调减少;

如果 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内严格单调减少,记作 $f(x)\downarrow,x\in(a,b)$.

(严格)单调增加和(严格)单调减少的函数统称为**单调函数**.

例 7 判定函数 $f(x)=3-x^2$ 的单调增减性.

解 设 x_1,x_2 是$(-\infty,+\infty)$内的任意两点,且 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=(3-x_1^2)-(3-x_2^2)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1).$$

当 x_1,x_2 都是负数时,有

$$(x_2+x_1)<0,\quad (x_2-x_1)>0,$$

所以$(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$. 所以函数 $f(x)=3-x^2$ 在$(-\infty,0)$内严格单调增加;

当 x_1,x_2 都是正数时,有

$$(x_2+x_1)>0,\quad (x_2-x_1)>0,$$

所以$(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$. 所以函数 $f(x)=3-x^2$ 在$(0,+\infty)$内严格单调减少. 但在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)=3-x^2$ 不是单调函数.

(二) 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域是以原点为对称的区间,对 $x\in D$:

奇函数:$f(-x)=-f(x)$,图形对称于坐标原点.

偶函数:$f(-x)=f(x)$,图形对称于 y 轴.

若上二式均不成立,则称 $f(x)$为非奇非偶函数.

例 8 判定函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

例 9 讨论函数 $f(x)=x^3(1+\cos x)$图形的对称性.

解 因为 $f(-x)=(-x)^3[1+\cos(-x)]=-x(1+\cos x)=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函

数，其图形关于原点对称.

（三）有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于 (a,b) 内的任意一点 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个数 B，使得对于 (a,b) 内的任意一点 x，总有 $f(x)\leqslant B$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有上界的；如果存在一个数 A，使得对于 (a,b) 内的任意一点 x，总有 $f(x)\geqslant A$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有下界的.

例 10 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

证 要证明 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，只要证明对于预先给定的不论多么大的正数 M，总能在 $(0,1)$ 内找到一点 x_0，使得 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|>M$ 即可.

实际上，对于任一大正数 M，要使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$，即要 $|x|<\dfrac{1}{M}$，只要 $x<\dfrac{1}{M}$（x 为非负数）. 所以只需取 $x_0<\dfrac{1}{M}$ 即可. 因此 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的.

（四）周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不等于 0 的常数 l，使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 的值都成立，则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数. 此时 l 的整数倍也是 $f(x)$ 的周期. 通常称满足这个等式的最小正数 l 为函数的周期.

例 11 求函数 $f(x)=\sin 3x$ 的周期.

解 因为 $f(x)=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$，即有 $f(x)=f\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$. 所以函数 $f(x)$ 的周期为：$l=\dfrac{2}{3}\pi$.

例 12 若函数 $f(x)$ 是周期为 l 的周期函数，试证：$f(ax+b)$（a,b 是常数，$a>0$）是以 $\dfrac{l}{a}$ 为周期的周期函数.

证 设 $f(t)$ 是周期为 l 的周期函数，所以，对一切 t 成立

$$f(t+l)=f(t).$$

把 $t=ax+b$ 代入上式，则对一切 x 成立

$$f(ax+b+l)=f(ax+b).$$

上式左端为

$$f(ax+b+l)=f\left[a\left(x+\frac{l}{a}\right)+b\right],$$

从而对一切 x 成立

$$f\left[a\left(x+\frac{l}{a}\right)+b\right]=f(ax+b),$$

即 $f(ax+b)$ 在 x 处和 $x+\dfrac{l}{a}$ 处的函数相等，所以 $f(ax+b)$ 是以 $\dfrac{l}{a}$ 为周期的周期函数.

值得注意的是，通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期. 但是并非每一个周期函数都有最小周期. 例如 $f(x)=c$（c 为常数），因为任何实数 $a>0$ 都是它的周期，所以 $f(x)$ 没有最小周期.

三、反函数、隐函数

(一) 反函数

1. 反函数的定义

设已知函数为 $y=f(x)$. 如果由此解出的 $x=\varphi(y)$是一个函数,则称它为 $f(x)$的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $f(x)$为**直接函数**.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,为了与习惯一致,通常将 $x=\varphi(y)$中的自变量 y 改写成 x,而将函数 x 改写成 y,于是 $y=f(x)$的反函数就变为 $y=\varphi(x)$. 记为 $y=f^{-1}(x)$.

2. 反函数存在定理

如果函数 $y=f(x)$的定义域 $D(f)=X$,值域为 $Z(f)=Y$ 是严格单调增加(或减少)的,则它必定存在反函数 $x=\varphi(y)$,其定义域 $D(\varphi)=Y$,值域为 $Z(\varphi)=X$,并且也是严格单调增加(或减少)的.

3. 反函数的图形

反函数 $y=\varphi(x)$与直接函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

4. 求反函数的步骤

第一步:从直接函数 $y=f(x)$中解出 $x=\varphi(y)$,看它是否能成为函数;

第二步:如果 $x=\varphi(y)$是函数,将字母 x 换成 y,将字母 y 换成 x,得 $y=\varphi(x)$,这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 13 求下列函数的反函数

(1) $y=2\sin\frac{x}{3},\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; (2) $y=e^{2x}+2$; (3) $y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$.

解 (1) 由 $y=f(x)=2\sin\frac{x}{3}$解出

$$x=3\arcsin\frac{y}{2}.$$

当 y 在$[-2,2]$上任取一值时,x 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上有惟一确定的值与之对应,所以是一个函数. 改变变量的字母,得到反函数为

$$y=f^{-1}(x)=3\arcsin\frac{x}{2},\quad x\in[-2,2].$$

注意 本题如果原定义域不是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,而是$(-\infty,+\infty)$,则因不单调而不存在反函数.

(2) 由 $y=e^{2x}+2$,得 $e^{2x}=y-2$. 两边取对数,得 $\ln e^{2x}=\ln(y-2)$. 从而有

$$2x=\ln(y-2),\quad x=\frac{1}{2}\ln(y-2).$$

所给函数的反函数为 $y=\frac{1}{2}\ln(x-2)$.

(3) 由 $y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$得 $2y=e^{x}-e^{-x}$. 两端同乘以 e^{x},整理后得到

$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0.$$

求解上述关于 e^{x} 的方程,得 $e^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}+1}$. 由于 $e^{x}>0$,所以取

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}.$$

上式两边取对数,得 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$. 所给函数的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(二) 隐函数

称 $y=f(x)$的函数为**显函数**. 其特点是因变量 y 单独地在等号的一边,而另一边则仅仅是自变量 x 的表达式 $f(x)$.

称由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系为**隐函数**. 其特点是函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$表示出来.

四、复合函数

设 y 是 u 的函数: $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数: $u=\varphi(x)$. 又设 X 表示函数 $u=\varphi(x)$的定义域的一个子集. 如果对于在 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$有定义,则 y 通过 $u=\varphi(x)$而成为 x 的函数,记为

$$y = f[\varphi(x)].$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**,它的定义域为 X, u 叫做**中间变量**.

例 14 设 $y=f(u)=\ln u$,定义域为$(0,+\infty)$,而 $u=\varphi(x)=\sin x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,则 $y=f[\varphi(x)]=\ln\sin x$ 是一个复合函数. 这个复合函数的定义域为 $X=(2k\pi,(2k+1)\pi)$ (k 为一切整数),而不是$(-\infty,+\infty)$. 即 x 是函数 $u=\sin x$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的一部分,在 x 上取每一个值 x 时所对应的 u 值,使函数 $y=f(u)$有定义.

复合函数的定义域可以由复合函数的表达式 $y=\ln\sin x$ 求出.

例 15 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $\varphi(x)=1+x^3$,求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

解 求 $f[\varphi(x)]$时,应将 $\varphi(x)$代换 $f(x)$中的 x,得

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{1-(1+x^3)} = -\frac{1}{x^3}.$$

求 $\varphi[f(x)]$时,应将 $f(x)$代换 $\varphi(x)$中的 x,得

$$\varphi[f(x)] = 1 + \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = 1 + \frac{1}{(1-x)^3}.$$

例 16 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{x}{2x-1}$,求 $f(x)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{x}{2x-1}$可理解成由函数 $f(u)$和 $u=\dfrac{1}{x}-1$ 复合而成的复合函数.

设 $u=\dfrac{1}{x}-1$,则 $x=\dfrac{1}{u+1}$. 于是,将 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$中的$\dfrac{1}{x}-1$ 代换成 u,将$\dfrac{x}{2x-1}$中的 x 代换成$\dfrac{1}{u+1}$,得

$$f(u) = \frac{\dfrac{1}{u+1}}{\dfrac{2}{u+1}-1} = \frac{1}{1-u}, \quad 即 \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

五、基本初等函数

(一) 常量函数: $y=c$ (常数), $x\in(-\infty,+\infty)$

常量函数是偶函数，其图形见图 1.1.2.

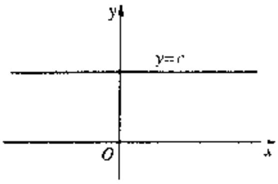


图 1.1.2

（二）**幂函数**：$y=x^{\alpha}$（α 为实数）

幂函数随着实数 α 的不同，其定义域和性质都有很大差别，然而不论 α 取何实数，x^{α} 在 $(0,-\infty)$ 内总有定义，且其图形必通过点 $(1,1)$. 对幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中的 α 取一些特殊的值其表现形式为：

当 $\alpha=1$ 时，$y=x$；定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$. 该函数为奇函数，单调增函数. 其图形见图 1.1.3.

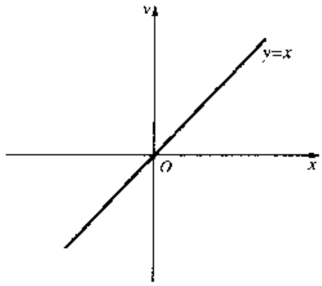


图 1.1.3

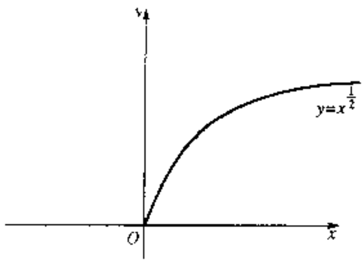


图 1.1.4

当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}$；定义域：$[0,+\infty)$，值域：$[0,+\infty)$. 该函数为非奇非偶函数，单调增加函数. 其图形见图 1.1.4.

当 $\alpha=2$ 时，$y=x^2$；定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$. 该函数为偶函数，非单调函数. 其图形见图 1.1.5.

当 $\alpha=-1$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$；定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 该函数为奇函数，非单调函数. 其图形见图 1.1.6.

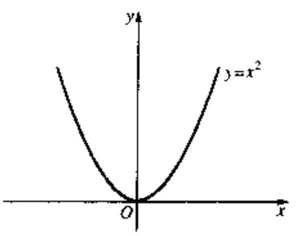


图 1.1.5

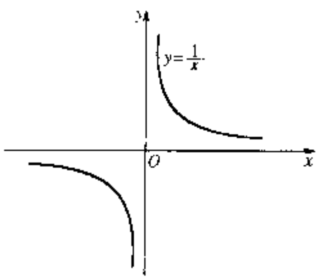


图 1.1.6

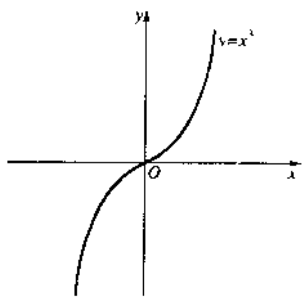


图 1.1.7

当 $\alpha=3$ 时，$y=x^3$；定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$. 该函数为奇函数，单调增加函数. 其图形见图 1.1.7.

当 $\alpha\neq0$ 时，不论 α 取何实数，$y=x^{\alpha}$ 都不是周期函数，在定义域内是无界的.

（三）**指数函数**：$y=a^x$（$a>0,a\neq1$）

函数定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(0,+\infty)$.

由于不论 x 取何值，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，所以它的图形总是在 x 轴的上方，且通过点 $(0,1)$.