高等学校交流讲义

高等代数

GAODENG DAISHU

吉林大学数学系主编

人民教育出版社

高 等 代 数

GAODENG DAISHU

吉林大学数学系主编

人民教育出版社

本书是以吉林大学数学系1960年教改中編写的讲义为基础，經修改和增补之后而成的。这次参加修改和增补工作的还有北京师范大学王世强同志，四川大学何召同志和北京大学聶灵昭同志。

本书內容共分十章，即多项式及其根的近似求法、矩陣、行列式、綫性方程組及其数值解法、綫性规划、向量空間与綫性变换、特征根、矩陣的若当标准形式、欧氏空間与酉空間、二次形式、群等。

本书可作为綜合大学、高等师范学校数学各专业高等代数課程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

簡装本說明

目前850×1168毫米規格紙張較少，本书暫以787×1092毫米規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

高 等 代 数

吉林大学数学系主編

人民教育出版社出版（高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

京华印书局印刷

新华书店科技发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·943 开本 787×1092 1/32 印張 9 10/16

字数 235,000 印数 00001—40,000 定价(C) ¥0.75

1961年6月第1版 1961年6月北京第1次印刷

序

这本书是以吉林大学数学系在1960年教学改革中编写的讲义为基础，修改补充而成的。修改补充工作除由吉林大学的王湘浩同志和谢邦杰同志主要負責外，还有北京大学的聶灵昭同志、四川大学的柯召同志和北京师范大学的王世强同志参加。此外，綫性規划的单純形法一节基本上是采用北京师范大学張禾瑞同志的讲稿。

本书可以作为綜合大学数学系和师范院校数学系高等代数課的教材。若教学时数不充裕，可以删去下列章节的一部分内容或全部内容：第九章、第十章、第一章的§6和§7、第二章的§3。第一、二两章和第三章是互相独立的，所以第三章也可以提前在开始时讲授。另外，綫性規划虽編为第十章，最好是接在第三章后面来讲。

第四章讲了向量空間和子空間以后，最好让学生把第三章§6的所有定义、命题(命題1除外)和定理都就一般向量空間重新思考和重証一下，这虽沒有任何困难，但对后面的学习是很重要的。

关于本书题材的选擇和处理我們作几点說明：

高等代数的主要内容是方程式論和綫性代数。为了讲方程式論的中心部分方程的数值解法，本来可以不必讲一般数域上多項式的因式分解。但有理系数多項式还是有其重要性的，而且中学代数里出現的多項式多半都是有理系数的。必須了解一般数域上多項式的因式分解，才能更好地处理有理系数多項式，也才能更好地掌握中学代数里的因式分解問題。

关于方程的数值解法，一般高等代数书在题材的处理上似乎

比較零散，不易使学生系統地加以掌握。这里，我們用秦九韶程序把根的界限問題、根的分离問題和秦九韶近似求根法这些題材統一起来，用迭代法的观点把牛頓法和直綫插入法串起来，又以虛根的計算为目的来介紹罗巴切夫斯基方法和林士諤方法，似乎在系統上要好一些。

矩陣是重要的数学工具；如果学生不能熟练地加以运用，对教育計划中許多課程的学习都会有影响。因此，我們从第三章起便特别强調矩陣这一工具，而且在問題的处理上尽量多用矩陣。初等变換在綫性代数中无論从計算或从理論的角度来看都起着基本性的作用，所以我們又特别强調了这一方法。

定义行列式有各种各样的方法，但看来都不够使人滿意。例如，用数学归納法使学生感觉不具体，用排列而直接以展式定义又使学生感覺突如其来。这里，我們采用了数学归納法而立即推出行列式的展式，在行列式几个最基本的性质的推証中，看哪一种方法容易懂而利用展式或数学归納法。

由于时間匆促，这本书一定有許多粗糙的地方以及取舍不恰当的地方，特别是在辯証唯物主义观点和理論联系实际方面作得还十分不够。我們把希望寄托在广大教师和同学的“大审查”上面，衷心欢迎同志和同学們把各种意見都写下来寄給我們，从而帮助我們进行修改。

吉林大学数学系

1961·5·

目录

第一章　多項式的基本理論

§1. 数域

高等代数是中学代数的继續和提高。

在小学和中学里，我們学过各种数的运算。首先是自然数，然后分数、负数、实数和复数。数学問題有的要在这一类数的范圍內討論，有的要在那一类数的范圍內討論。

例如本章和下一章我們研究多项式和代数方程。这方面的問題有的要在复数的范圍內討論，有的要在实数的范圍內討論，还有的限于在有理数的范圍內討論。此外，有些問題，不論在有理数、实数、或复数的范圍內討論，都可以用同样的方法并且得到同样的結果。

这三种数系有很大的不同，但有一个明显的共同点：对于四則运算封閉。这就是說，每个数系都具有下面的性质：数系中任意一些数的和差积商仍在数系之內。我們把这三个数系概括在数域这一名称之下：

定义．一个数系称为一个**数域**，如果其中任意两个数的和差积商仍在該数系之內。

有理数系、实数系、复数系都是数域。但由于数域的定义所要求的条件很少，数域这一名称所包括的数系远不只这三个。事实上，数域是有无穷多的。例如，所有形如

$$a+b\sqrt{2} \tag{1}$$

的数，其中 a 和 b 代表任意有理数，便形成一个数域。我們有

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},$$
$$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2},$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2},$$

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

可見，两个形如(1)的数的和差积商仍是形如(1)的数；所以所有形如(1)的数形成一个数域。

照这样可以举出任意多个数域的例子。

命題. 任意数域 Y 必然包含有理数域在内。

証明：在 Y 中取任意数 $a\neq 0$。于是，$1=\frac{a}{a}$ 和 $0=a-a$ 都在 Y 内。因之，$2=1+1, 3=2+1, 4=3+1, \cdots$ 都在 Y 内，換句話說，所有正整数都在 Y 内。因为 $-n=0-n$，所以所有負整数也在 Y 内。这样，所有有理数 $\frac{m}{n}$ 也便在 Y 内，故命題得証。

数域虽然有无穷多，重要的自然是有理数域、实数域、复数域这三个。

§2. 多項式的初等性質

本章我們研究多項式的基本理論。变数 x 的一个多項式 $f(x)$ 就是下列形式的一个式子：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1}$$

其中 n 是一个非負整数，而 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 是一些常数。比方

$$\frac{1}{2}x^3-4x+5,\ (\sqrt{2}+i)x+\pi,\ 3, 0$$

都是 x 的多項式；而

$$2x^{\frac{1}{3}}-x,\ x^2-3x+2x^{-1}$$

却不算是 x 的多項式。

x 的一个多項式 $f(x)$ 自然是 x 的一个函数。多項式的重要性在于它是最基本的函数，而数学分析中說明，比較复杂的函数可以用多項式去逼近。

定义 1. 两个多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 說是**相等**:

$$f(x)=g(x),$$

如果两个多項式中同次項的系数完全相同。

一个多項式中可以任意加入或去掉一些系数是 0 的項。据此及定义 1, 我們有

$$0x^3+2x^2-1=2x^2+0x-1,$$

$$0x^2+0x+0=0.$$

定义 2. 若 $a_0\neq0$, 則多項式(1)的**次数**說是 n。常数多項式 0 的次数說是 $-\infty$。

据定义, $0x^3+2x^2-1$ 的次数是 2, 常数多項式 4 的次数是 0。

$f(x)$ 的次数記为次 $f(x)$。

設 Y 是一个数域。若 $f(x)$ 的系数都在 Y 內, 則 $f(x)$ 說是 Y 上面的多項式。

我們在中学代数里学过多項式的运算。設 $f(x), g(x)$ 是 Y 上面的多項式。計算 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ 只用到系数的四則运算, 因而这些多項式仍是 Y 上面的多項式。設 $g(x)\neq0$。用长除法可以求商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$:

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),\quad 次\, r(x)<次\, g(x). \tag{2}$$

作长除法所用到的也只是系数的四則运算, 所以 $q(x)$, $r(x)$ 也是 Y 上面的多項式。

現在我們問: 商式和余式是不是唯一确定的? 換句話說, 能不能不用长除法而通过什么别的办法求出两个多項式 $q_1(x)$, $r_1(x)$ 使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),\quad 次\, r_1(x)<次\, g(x), \tag{2'}$$

而 $q_1(x), r_1(x)$ 和 $q(x), r(x)$ 不一样呢?

命題 1. 若(2)、(2')成立, 則

$$q_1(x)=q(x),\quad r_1(x)=r(x).$$

証明：由(2)、(2′)有

$$q_1(x)g(x)+r_1(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

即
$$(q_1(x)-q(x))g(x)=r(x)-r_1(x). \tag{3}$$

若 $q_1(x)-q(x)\neq 0$，則次 $(q_1(x)-q(x))g(x)\geqslant$ 次 $g(x)$ 而次 $(r(x)-r_1(x))<$ 次 $g(x)$，由(3)此不可能。因之，$q_1(x)-q(x)=0$，即 $q_1(x)=q(x)$。由此及(3)立得 $r_1(x)=r(x)$。

下面的事实容易説明：若 $f(x)\neq 0$ 而

$$f(x)g(x)=f(x)h(x),$$

則可以消去 $f(x)$ 而得

$$g(x)=h(x).$$

事実上，我們有 $f(x)(g(x)-h(x))=0$。若 $g(x)-h(x)\neq 0$，則次 $f(x)(g(x)-h(x))\geqslant 0$，此与 $f(x)(g(x)-h(x))=0$ 矛盾。故 $g(x)-h(x)=0$，即 $g(x)=h(x)$

現在，我們取定一个数域 Y 而討論 Y 上面的多項式。本节以下凡説多項式即指 Y 上面的多項式而言。

定义 3. 若对 $f(x)$ 和 $g(x)$，$g(x)\neq 0$，有 $h(x)$ 使

$$f(x)=h(x)g(x), \tag{4}$$

則我們説 $g(x)$ **整除** $f(x)$：

$$g(x)\mid f(x),$$

或説 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的**因式**，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**倍式**。

例如，任意 $g(x)\neq 0$ 整除自己，因为 $g(x)=1g(x)$。常数 $c\neq 0$ 整除任意多項式 $f(x)$，因为 $f(x)=c^{-1}f(x)c$。

命題 2. $g(x)\mid f(x)$，必要而且只要以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 0。

証明：若在(2)中，$r(x)=0$，則 $q(x)$ 便可作为(4)中之 $h(x)$，因而 $g(x)\mid f(x)$。若 $g(x)\mid f(x)$，則有 $h(x)$ 使(4)成立，即

$$f(x)=h(x)g(x)+0, \quad 次\ 0<次\ g(x);$$

据此及命題1知$h(x)$即以$g(x)$除$f(x)$所得之商式而0即以$g(x)$除$f(x)$所得之余式；这就是説，以$g(x)$除$f(x)$所得之余式为0。

命題 3. 我們有下面的法則：

1）若 $f|g, g|h$，則 $f|h$；

2）若 $f|g$，則 $f|gh$；

3）若 $f|g, f|h$，則 $f|g\pm h$。

証明：$f|g, g|h$ 表示有 k, l 使 $g=kf, h=lg$。因之，$h=(lk)f$，故$f|h$，因而 1)得証。

显然$g|gh$是对的，故$f|g$时，由 1)有$f|gh$，因而 2)得証。

今証 3)。因为$f|g$, $f|h$，故有 k, l 使 $g=kf$, $h=lf$。于是，$g\pm h=(k\pm l)f$，因而$f|g\pm h$。

命題 4. 若f整除$g_1, \cdots, g_n$，則$f|h_1g_1+\cdots+h_ng_n$。

証明：因为$f|g_i$，故$f|h_ig_i$，$i=1, 2, \cdots, n$。因为$f|h_1g_1$，$f|h_2g_2$，故$f|h_1g_1+h_2g_2$。因为$f|h_1g_1+h_2g_2$，$f|h_3g_3$，故$f|h_1g_1+h_2g_2+h_3g_3$。如此类推，到第$n-1$步，便証明了$f|h_1g_1+\cdots+h_ng_n$。

命題 5. 若在一个等式中，除某項外，其余各項都是f的倍式，則此項也是f的倍式。

証明：例如在等式

$$g+\cdots+h+\cdots+k=l+\cdots+m$$

中，已知除h外其余各項都是f的倍式。解出h，

$$h=l+\cdots+m-g-\cdots-\cdots-k.$$

因为f整除右边各項，故由命題4，$f|h$。

命題 6. 非0多項式$f(x)$和$g(x)$互相整除，必要而且只要$f(x)$和$g(x)$差一个常数因子。

証明：若$f(x)$和$g(x)$差一个常数因子，比方$g(x)=cf(x)$，其中c是一个非0常数。由此式有$f(x)|g(x)$。但$f(x)=c^{-1}g(x)$，

故又有 $g(x)|f(x)$。反之，設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互相整除：

$$g(x)=h(x)f(x),\ f(x)=k(x)g(x). \tag{5}$$

于是 $g(x)=h(x)k(x)g(x)$，消去 $g(x)$ 得

$$h(x)k(x)=1. \tag{6}$$

若 $h(x)$ 或 $k(x)$ 不是常数，則 $h(x)k(x)$ 也不是常数，因而不能等于 1，此与(6)矛盾。可見 $h(x)$，$k(x)$ 都是常数，而(5)表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 差一个常数因子。

在中学代数里我們应当已經看到，多項式的討論和方程的討論是紧密相联的。例如，二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的求根和二次式 ax^2+bx+c 的因式分解基本上是同一个問題。由于这种联系，方程

$$f(x)=0$$

的根我們也說是 $f(x)$ 的根。換句話說，若

$$f(\alpha)=0,$$

則 α 說是 $f(x)$ 的一个根。$f(x)$ 的根也称为 $f(x)$ 的**零点**。

試看一次多項式 $x-\alpha$，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 所得的余式自然是一个常数。

定理 1（余式定理）. 以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 所得的余式等于 $f(\alpha)$.

証明：設商式为 $q(x)$，余式为常数 c。于是，

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+c. \tag{7}$$

以 α 代 x 得

$$f(\alpha)=q(\alpha)(\alpha-\alpha)+c,$$

即 $f(\alpha)=0+c$，故 $c=f(\alpha)$ 而定理得証。

系 $x-\alpha|f(x)$ 必要而且只要 α 是 $f(x)$ 的根。

証明：由定理 1，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 $f(\alpha)$。我們知道，$x-\alpha|f(x)$ 必要而且只要以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 0。

因之，$x-\alpha \mid f(x)$必要而且只要 $f(\alpha)=0$，而系得証。

定理 2. 設 $f(x)$ 是一个 n 次多項式。$f(x)$ 在 Y 中最多有 n 个根。

証明：設 α_1 是 $f(x)$的根。于是 $x-\alpha_1 \mid f(x)$，因而

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x), \tag{8}$$

其中 $f_1(x)$是一个 $n-1$ 次多項式。設 $\alpha_2 \neq \alpha_1$ 也是 $f(x)$的根。代入(8)，

$$0=(\alpha_2-\alpha_1)f_1(\alpha_2).$$

今 $\alpha_2 \neq \alpha_1$，故可消去 $\alpha_2-\alpha_1$ 而得 $f(\alpha_2)=0$，从而 α_2 是 $f_1(x)$的根。由此得 $f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x)$，其中 $f_2(x)$是一个 $n-2$ 次多項式。代入(8)，

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x). \tag{9}$$

設 $\alpha_3 \neq \alpha_1, \alpha_2$ 又是 $f(x)$的根。代入(9)，

$$0=(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)f_2(\alpha_3).$$

消去 $\alpha_3-\alpha_1$, $\alpha_3-\alpha_2$ 得 $f_2(\alpha_3)=0$，从而 α_3 是 $f_2(x)$的根。由此得 $f_2(x)=(x-\alpha_3)f_3(x)$，而

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)f_3(x).$$

如此类推，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $f(x)$的 n 个不同的根，則

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)f_n(x).$$

比較两边的次数知 $f_n(x)$必是一个常数。再比較两边的首系数知 $f_n(x)$等于 $f(x)$的首系数 a_0。于是，

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n). \tag{10}$$

今若 $f(x)$还有另外的根 α，則代入(10)得

$$0=a_0(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\cdots(\alpha-\alpha_n). \tag{11}$$

但 $a_0, \alpha-\alpha_1, \alpha-\alpha_2, \cdots, \alpha-\alpha_n$ 都不等于 0，(11)式显然不可能。所以 $f(x)$最多只能有 n 个根。

两个多項式 $f(x)$和 $g(x)$說是**恒等**，如果对于变数 x 在 Y 中所

取的任意值 α 有

$$f(\alpha)=g(\alpha). \tag{12}$$

定理 3. $f(x)$和 $g(x)$ 恒等，必要而且只要这两个多项式相等。

証明：若 $f(x)=g(x)$，則它們的同次項的系数完全一样，因而自然对于 Y 中的任意 α,(12)成立，故 $f(x)$和 $g(x)$恒等。反之，設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 恒等。于是，对 Y 中的任意 α, (12)成立，从而 $f(\alpha)-g(\alpha)=0$。但这表示多項式 $f(x)-g(x)$恒等于 0, 即 Y 中的任意数 α 都是 $f(x)-g(x)$的根。因为 Y 中包含所有有理数，所以 Y 中有无穷多个数。可見多項式 $f(x)-g(x)$ 有无穷多个根。据定理 2, 只有多項式 0 才能这样。故 $f(x)-g(x)=0$, 而 $f(x)=g(x)$。

根据定理 3, 以后我們把恒等和相等看作是一样的，而

$$f(x)=g(x)$$

看作，又表示 $f(x)$和 $g(x)$相等，又表示 $f(x)$和 $g(x)$恒等。

§3. 最高公因式及因式分解

取定一个数域 Y 而看 Y 上面的多項式。

定义 1. 若 $d(x)$是 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$的公因式，而 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$的任意公因式整除 $d(x)$，則 $d(x)$称为 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$的最高公因式。

最高公因式在有关多項式的計算和理論問題上是很重要的。例如化簡分式

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

就是要求出 $f(x)$, $g(x)$的最高公因式 $d(x)$并約去 $d(x)$ 而将分式化为最簡分式。

我們还沒有証明任意一組多項式 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$必有最高公因式。这并不是显然的。

命題 1. 若 $f(x),g(x)$不都是多項式 0, 則 $f(x),g(x)$必有最高公因式。

証明: 若 $f(x)$ 和$g(x)$有一个是 0, 譬如 $g(x)=0$, 則 $f(x)$就是它們的最高公因式。今設 $f(x)\neq0$, $g(x)\neq0$。以 $g(x)$除 $f(x)$求商式及余式,再以此余式除 $g(x)$,如此輾轉相除,假定得到下列諸式:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=q_1(x)g(x)+r_1(x),\\ g(x)&=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),\\ r_1(x)&=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ r_{n-2}(x)&=q_n(x)r_{n-1}(x)+r_n(x),\\ r_{n-1}(x)&=q_{n+1}(x)r_n(x). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在輾轉相除的过程中,由于余式 $r_1(x),r_2(x),\cdots$的次数逐步降低,所以除到某一步所得的余式必为0。(1)表示除到第 $n+1$ 步 $r_n(x)$便整除 $r_{n-1}(x)$而余式为 0. 我們将說明 $r_n(x)$ 便是 $f(x)$和 $g(x)$的最高公因式.

先証 $r_n(x)$是 $f(x)$, $g(x)$的公因式。从(1)中最后一式倒看。由最后一式, $r_n(x)|r_{n-1}(x)$. 倒数第二式中, $r_n(x)$整除右边的两項,所以 $r_n(x)$整除左边的 $r_{n-2}(x)$。如此类推,知 $r_n(x)$整除 $g(x)$和 $f(x)$, 所以是它們的公因式。

次証 $f(x)$和 $g(x)$ 的任意公因式 $h(x)$整除 $r_n(x)$。現在順看(1) 中各式。因为 $h(x)$ 整除第一式的左边和右边第一項, 所以 $h(x)|r_1(x)$。因为 $h(x)$整除第二式的左边和右边第一項, 所以 $h(x)|r_2(x)$。如此类推,知 $h(x)$整除 $r_n(x)$。

既然 $r_n(x)$是公因式而任意公因式整除 $r_n(x)$, 所以 $r_n(x)$ 是最高公因式。

命題1証明中所用的輾轉相除法不但証明了命題而且可用以实际計算最高公因式。

由命題1不難推証：若 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 不全是0，則它們必有最高公因式。下面我們将用另一方法論証这一事实。

容易說明：最高公因式，除常数因子外，是唯一确定的。事实上，若 $d(x)$ 和 $d_1(x)$ 都是 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 的最高公因式，則 $d(x) \mid d_1(x)$，$d_1(x) \mid d(x)$，因而 $d(x)$ 和 $d_1(x)$ 只差一个常数因子。

命題 2. 設 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式，則有两个多項式 $\lambda(x), \mu(x)$ 存在使

$$d(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x). \tag{2}$$

証明：試看輾轉相除所得的各式(1)。由第一式，

$$r_1(x) = f(x) + (-q_1(x))g(x),$$

代入第二式解出 $r_2(x)$ 得

$$r_2(x) = (-q_2(x))f(x) + (1 + q_1(x)q_2(x))g(x),$$

如此类推，最后便把最高公因 $r_n(x)$ 表成了 $\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$ 的形式。

下面我們討論多項式的因式分解問題。在中学代数里我們学过一些具体方法把一个多項式分解为不能再分的因式的乘积。但那里并沒有深入討論这个問題。首先，那里所謂不能再分实际上只是我們已經看不出来怎样再分下去的意思，一般并不論証它們确实不能再分。其次，所謂不能再分并沒有明确在什么范圍內不能再分。例如，在有理域上，把 x^4-4 分为下面的形式：

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) \tag{3}$$

自然就不能再分，但在实数域上却有下面的分解式

$$x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2),$$

而在复数域上还可进一步分解如下：

$$x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{-2})(x + \sqrt{-2}).$$