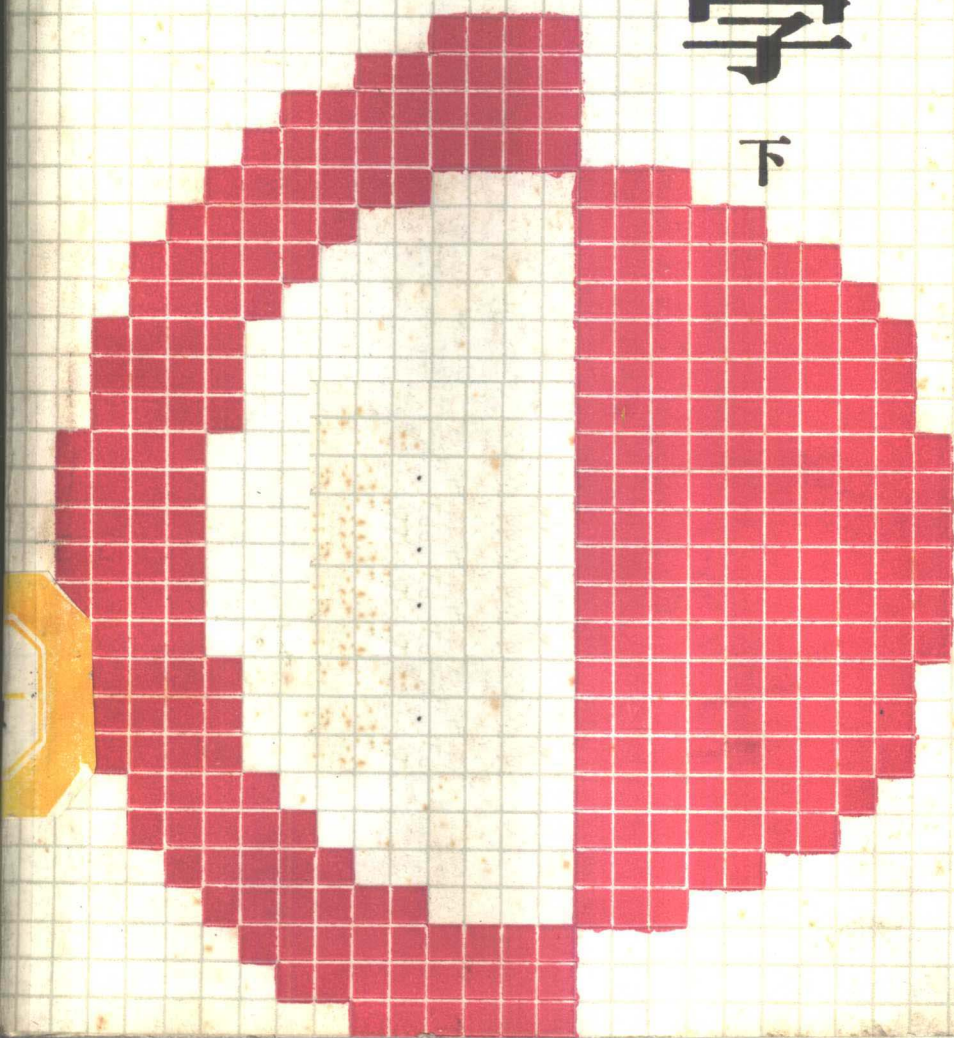


徐燕侯 郭长铭 周凯元 编

中国科学技术大学出版社

理论力学

下



内 容 简 介

本书是高校非物理类型理论力学课程的教学用书。它扬弃了传统刚体静力学中纯几何学的公理体系,用现代的观点,统一地阐明了理论力学中的核心理论和方法。按运动学、动力学、静力学和分析力学的次序组织内容,并配以相应的专题。全书附有习题六百多道,其中选进了一些近年来研究生入学考试的试题。本书概念清晰,理论严明,叙述简要。通过对本书内容的不同组合,可满足不同的教学要求。本书也可作为准备研究生入学考试的复习参考书,对工程与机械设计人员亦有参考价值。

全书分上、下两册。上册共七章是基础部分,包括运动学,动力学和刚体静力学。下册共十章,主要阐述有关专题和分析力学。

理 论 力 学 (下 册)

徐燕侯 郭长铭 周凯元 编

责任编辑:王安民

封面设计:王瑞荣

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号)

中国科学技术大学教务处激光照排中心排版

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本: 850×1168/32

字数: 275千

印数: 1—3000册

印张: 9.8125

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

ISBN 7-312-00112-2/O·54

定价: 2.40元

上册 章 目

前 言

符号表

第一章 绪 论

第二章 物体机械运动的基本规律

第三章 刚体运动学基础

第四章 刚体的平面运动

第五章 刚体的定点运动和一般运动

第六章 动力学基本定理

第七章 刚体静力学

下册 目 次

第八章 刚体定点运动动力学 1

§ 8.1 刚体的惯性积和惯性主轴 1

§ 8.2 刚体定点运动的欧拉动力学方程 10

§ 8.3 重刚体的定点运动 13

§ 8.4 刚体一般运动的动力学方程 15

§ 8.5 刚体定轴转动时轴承上的动约束反力 16

习题 22

第九章 动静法 27

§ 9.1 引言 27

§ 9.2 质点的达朗伯原理·动静法 28

§ 9.3 惯性力的概念	33
§ 9.4 质点系的达朗伯原理	35
§ 9.5 平动刚体上惯性力系的简化	38
§ 9.6 平面运动刚体上惯性力系的简化	39
§ 9.7 定轴转动刚体上惯性力系的简化	44
§ 9.8 转子的静平衡和动平衡概念	48
习题	50
第十章 分析静力学	57
§ 10.1 引言	57
§ 10.2 虚位移	58
§ 10.3 力的虚功	62
§ 10.4 理想约束	65
§ 10.5 虚位移原理	67
§ 10.6 势能原理	75
§ 10.7 由虚位移原理导出刚体的平衡方程	83
§ 10.8 质点系等速直线平动中约束的特性	85
§ 10.9 非定常约束下的虚位移	87
§ 10.10 虚位移原理的一般形式	89
§ 10.11 关于虚位移原理的几点说明	91
习题	94
第十一章 拉格朗日力学	103
§ 11.1 动力学普遍方程	103
§ 11.2 第二类拉格朗日方程	107
§ 11.3 第二类拉格朗日方程的首次积分	115
§ 11.4 完整约束和非完整约束	124
§ 11.5 第一类拉格朗日方程	127
§ 11.6 罗兹方程	130
习题	132

第十二章	微振动	140
§ 12.1	一个自由度系统的自由振动	140
§ 12.2	多自由度系统的自由振动	148
§ 12.3	两个自由度系统的自由振动	150
§ 12.4	阻尼对自由振动的影响	157
§ 12.5	一个自由度系统的受迫振动	164
§ 12.6	隔振原理	172
§ 12.7	两个自由度系统的受迫振动	177
	习题	179
第十三章	碰撞	186
§ 13.1	碰撞现象和碰撞力	186
§ 13.2	碰撞问题中的冲量定理和冲量矩定理	187
§ 13.3	两球体的正碰撞·恢复系数	189
§ 13.4	斜碰撞	194
§ 13.5	碰撞冲量对刚体的作用·撞击中心	197
	习题	204
第十四章	陀螺运动的近似理论	212
§ 14.1	引言	212
§ 14.2	陀螺模型	212
§ 14.3	近似理论的使用条件	213
§ 14.4	赖柴尔定理	214
§ 14.5	陀螺的性质	215
§ 14.6	陀螺力矩和陀螺效应	217
	习题	219
第十五章	变质量体动力学问题	223
§ 15.1	变质量体的概念	223

§ 15.2 变质量体的运动微分方程·推力项	224
§ 15.3 火箭运动方程	234
习题	237
第十六章 非惯性坐标系中的动力学问题	240
§ 16.1 引言	240
§ 16.2 物体的相对运动微分方程	241
§ 16.3 牵连惯性力和科氏惯性力	245
§ 16.4 地球自转产生的影响	247
§ 16.5 傅科摆	253
习题	257
第十七章 哈密顿力学	265
§ 17.1 哈密顿正则方程	265
§ 17.2 哈密顿-雅可比方程与雅可比定理	273
§ 17.3 泊松括号与泊松定理	281
§ 17.4 哈密顿变分原理	286
§ 17.5 正则变换	294
习题	303

第八章 刚体定点运动动力学

在 § 6.6 中通过例 6.9 我们讨论了刚体定轴转动的动力学问题，在 § 6.8 中又讨论了刚体平面运动的动力学问题。在本章中我们将讨论刚体更一般运动的动力学问题。读者将会看到，研究刚体更一般运动的动力学问题的依据，仍然是我们在第六章中所提出的三个基本定理，即动量、动量矩和动能定理。

§ 8.1 刚体的惯性积和惯性主轴

我们先讨论刚体定点运动的动力学问题。

刚体在运动过程中若其上有一点始终保持不动，这种运动称为刚体的定点运动，或刚体绕定点的转动。在第五章中我们已经分析过，作定点运动的刚体在每一瞬时的运动，可以看成是绕通过定点的某一瞬时转动轴作转动。在不同的瞬时，瞬时转动轴在空间的位置各不相同。故作定点运动的刚体，其整个运动可以看成是绕一系列连续变化位置的瞬时转动轴的连续转动。这样，就有必要首先来讨论刚体对任意轴的转动惯量问题。

在 § 6.6 的例 6.10 中，我们得到了刚体绕两平行轴转动时转动惯量之间的关系。现在来讨论刚体对相交轴的转动惯量之间的关系。

设已知刚体对坐标系 $Oxyz$ 三轴的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

现有一任意方向的轴 $O\xi$ ，它与坐标系 Ox 、 Oy 、 Oz 三轴

的夹角分别为 α , β 和 γ , 如图 8.1 所示。我们来求刚体对 $O\xi$ 轴的转动惯量。

由转动惯量的定义, 可写出

$$I_\xi = \sum m_i h_i^2,$$

式中 h_i 为刚体上任一质点 M_i 到 $O\xi$ 轴的距离, 如图 8.1 上虚线所示。由直角三角形 OM_iP_i 可知,

$$h_i^2 = OM_i^2 - OP_i^2.$$

OM_i 即为质点 M_i 在坐标系 $Oxyz$ 中的矢径, 故可表示成

$$\overrightarrow{OM_i} = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}.$$

图 8.1

所以

$$OM_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

$$\text{而 } OP_i = \overrightarrow{OM_i} \cdot \frac{\overrightarrow{OP_i}}{OP_i}$$

$$= (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}) \cdot (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})$$

$$= x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma.$$

所以

$$\begin{aligned} h_i^2 &= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 \\ &= x_i^2(1 - \cos^2 \alpha) + y_i^2(1 - \cos^2 \beta) + z_i^2(1 - \cos^2 \gamma) \\ &\quad - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

因为

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

故上式可改写成

$$\begin{aligned} h_i^2 &= (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)x_i^2 + (\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha)y_i^2 \\ &\quad + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)z_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \alpha (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta (z_i^2 + x_i^2) \\
&\quad + \cos^2 \gamma (x_i^2 + y_i^2) - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta \\
&\quad - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha .
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
I_z &= \cos^2 \alpha \cdot \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \cdot \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \\
&\quad + \cos^2 \gamma \cdot \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot \sum m_i x_i y_i \\
&\quad - 2 \cos \beta \cos \gamma \cdot \sum m_i y_i z_i - 2 \cos \gamma \cos \alpha \cdot \sum m_i z_i x_i .
\end{aligned}$$

这样, 最后可得

$$\begin{aligned}
I_z &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\
&\quad - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha .
\end{aligned} \quad (8.1)$$

这里,

$$I_{xy} = \sum m_i x_i y_i, \quad I_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum m_i z_i x_i . \quad (8.2)$$

分别称为刚体对 x 、 y 轴, y 、 z 轴和 z 、 x 轴的惯性积。若刚体质量是连续分布的, 可以将式 (8.2) 写成积分形式, 即

$$I_{xy} = \int_M x y dm, \quad I_{yz} = \int_M y z dm, \quad I_{zx} = \int_M z x dm . \quad (8.3)$$

惯性积具有和转动惯量相同的量纲, 它也是表征刚体的质量对某一直角坐标系 $Oxyz$ 分布状况的一种物理量。但是, 二者还是有区别的。刚体的转动惯量总是一正值, 而惯性积却可为正值、负值或零。

借助于矩阵概念, 式 (8.1) 可以表示成如下形式

$$I_z = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma] \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} . \quad (8.4)$$

式 (8.4) 中间的矩阵称为刚体在坐标系 $Oxyz$ 中的惯量矩阵。矩阵中两个相同的足标可用一个足标表示, 由于对称性, 两个不同的足标位置互换并不影响惯性积的值。惯量矩阵主对角线上的三个元素就是刚体对坐标系 $Oxyz$ 的三个坐标轴的转动惯量, 其余六

个元素为刚体对坐标系 $Oxyz$ 的转动惯量，其中只有三个元素是独立的，惯量矩阵中的各元素仅与刚体的质量分布及其坐标系的选取有关，而与转动轴的方向无关，对于确定的刚体和确定的坐标系来说，惯量矩阵中该元素都是确定值，故称 I_x 、 I_y 、 I_z 、 I_{xy} 、 I_{yz} 、 I_{zx} 六个量为刚体对 O 点的特征惯量，所以，如果已知刚体对 O 点的特征惯量，就可求刚体对通过 O 点任意一转轴 Oz 的转动惯量 I_z 。

例 8.1 质量为 M 的均质长方体如图 8.2 所示，求它对坐标系 $Oxyz$ 的惯量矩阵。

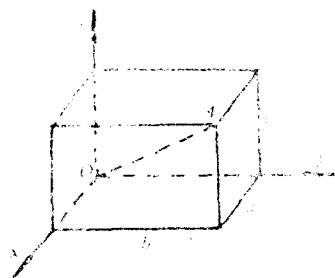


图 8.2

解 长方体的质量为 M ，则

$$\rho = \frac{M}{abc}.$$

由 $I_{xx} = \int_V y^2 + z^2 \rho dV$ 得

$$I_{xx} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (y^2 + z^2) \rho dx \\ = \frac{\rho}{2} (b^3 + c^3)a;$$

$$I_{xx} = \int_V xy \rho dV \\ = \frac{M}{4} ab.$$

惯量矩阵中其它元素可以由类似的计算得到。实际上， x 、 y 和 z 在算式中地位相当，所以其它元素可以仿照上面结果直接写出。故所求的惯量矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac \\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(c^2 + a^2) & -\frac{1}{4}bc \\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \cdot M.$$

例 8.2 求例 8.1 中均质长方体对它的对角线 OA 的转动惯量。

解 惯量矩阵已由上例算出。由图 8.2，对角线 OA 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

所以对于对角线 OA 的转动惯量为

$$I_{OA} = \frac{M}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cdot [a, b, c] \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac \\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(c^2 + a^2) & -\frac{1}{4}bc \\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{M}{b} \cdot \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

对于具有对称平面的均质刚体，惯性积的计算就大为简化。

例如，图 8.3 中 Oxy 是刚体的对称平面，则

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \sum m_i y_i z_i \\ &= \sum_{\text{上}} m_i y_i z_i \\ &\quad + \sum_{\text{下}} m_i y_i z_i. \end{aligned}$$

在计算两个求和式时，我们总可以取相同的 y 而等值异号的 z ，使这两个和式相加为零，故有

$$I_{yz} = 0.$$

同理，

$$I_{xz} = 0.$$

如果刚体对以 O 为原点所建立的直角坐标系 $Oxyz$ 恰好满足下列条件：

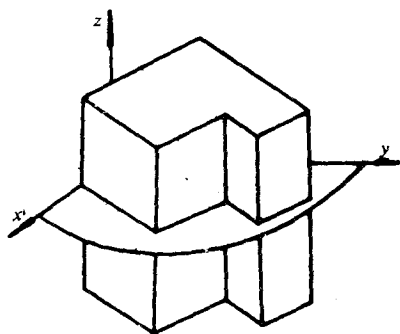


图 8.3

$$\left. \begin{aligned} I_{yz} &= \sum m_i y_i z_i = 0, \\ I_{zx} &= \sum m_i z_i x_i = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

则称 Oz 轴为刚体对 O 点的惯性主轴。同样，如果式

$$I_{yz} = 0; \quad I_{xy} = 0 \quad (8.6)$$

成立，则 Oy 轴为刚体对 O 点的惯性主轴；若式

$$I_{zx} = 0; \quad I_{xy} = 0 \quad (8.7)$$

成立，则 Ox 轴为刚体对 O 点的惯性主轴。如果 Ox 、 Oy 、 Oz 三根轴都是惯性主轴，则刚体对该坐标系的所有惯性积皆为零。此时刚体对通过 O 点的任一轴 $O\xi$ 的转动惯量为

$$I_\xi = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma. \quad (8.8)$$

这是刚体对于过 O 点任一轴的转动惯量最简单的形式。我们通常称刚体对于惯性主轴的转动惯量为主转动惯量。

既然惯量矩阵与坐标系的方向有关，一个很自然的问题是，对于一个确定的刚体是否存在这样三根惯性主轴？回答是肯定的。刚体对于空间任一点都存在三根相互垂直的惯性主轴，刚体对这三根主轴具有三个主转动惯量。为了证明这一结论，我们可以用几何的方法来说明式(8.1)。设 $O\xi$ 为坐标系 $Oxyz$ 内通过 O 点的任一轴，刚体对于此轴的转动惯量为 I_ξ ，现在 $O\xi$ 轴上取一

点 N ，如图 8.4 所示，使得 ON 的长度与 I_ξ 的平方根成反比，即

$$ON = \frac{k}{\sqrt{I_\xi}},$$

其中 k 是一具有量纲的适当选取的常量。对于通过 O 点的每一根轴，都可以按上述方法在轴上找到这样一点。当 $O\xi$ 轴的方向取遍空间的各个方向时， N

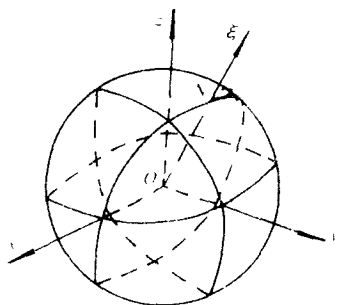


图 8.4

点在空间的位置将组成一个曲面。设 N 点在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (x, y, z) ，则有关系式

$$\cos \alpha = \frac{x}{ON} = \frac{1}{k} x \sqrt{I_z},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{ON} = \frac{1}{k} y \sqrt{I_z},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{ON} = \frac{1}{k} z \sqrt{I_z}.$$

将此关系式代入式 (8.1), 并注意到 $I_z = \frac{k^2}{ON^2}$, 得

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = k^2. \quad (8.9)$$

这就是上述曲面的方程。由于 $I_z > 0$ (只有当刚体的质量沿轴 $O\xi$ 分布时, 才有 $I_z = 0$), 所以 ON 应为一有限值, 即点 N 在空间的轨迹必为一封闭曲面。由式 (8.9) 可知, 这封闭曲面是一个椭球面, 如图 8.4 所示。这个椭球面上每一点到 O 点的距离都与刚体对此轴转动惯量的平方根成反比, 所以称之为**惯量椭球**。如果作一坐标变换, 保持原点 O 不动, 取椭球的长、中、短轴为新的坐标轴, 对此新坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 来说, 椭球面方程可写成如下标准形式:

$$I_{x_1} \cdot x_1^2 + I_{y_1} \cdot y_1^2 + I_{z_1} \cdot z_1^2 = k^2.$$

这样, 对于新坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 来说, 惯性积 $I_{x_1y_1} = I_{y_1z_1} = I_{z_1x_1} = 0$, 也就是说, Ox_1 、 Oy_1 和 Oz_1 轴是刚体对于 O 点的三根相互垂直的惯性主轴, 而 I_{x_1} 、 I_{y_1} 、 I_{z_1} 即为刚体对于 O 点的三个主转动惯量。

如果 $I_{x_1} \neq I_{y_1} \neq I_{z_1}$, 则惯性主轴的三个方向是唯一确定的; 如果 $I_{x_1} = I_{y_1} \neq I_{z_1}$, 此时惯量椭球为一旋转椭球, 其中对应于主转动惯量 I_{z_1} 的惯性主轴方向是唯一确定的, 而在 Ox_1y_1 平面内任何两个相互垂直的方向都可以取作另外两根惯性主轴的方向 (在这种情况下, 称轴 Oz_1 为极轴, I_{z_1} 为极轴转动惯量, 称轴 Ox_1 或 Oy_1 为赤道轴, I_{x_1} 或 I_{y_1} 为赤道轴转动惯量); 如果 $I_{x_1} = I_{y_1} = I_{z_1}$, 此时惯量椭球退化为一圆球, 则任何方向都可以取作惯性主轴的方向。

对于惯性主轴，我们还作下面两点说明：

(1) 图 8.4 中的惯性主轴 Ox_1 、 Oy_1 、 Oz_1 只是对 O 点而言的。在一般情况下，同一刚体对空间不同的点的惯性椭圆是不同的，惯性主轴的方向不同，刚体的主转动惯量也不同。

(2) 如果 O 点恰好与刚体的质心 C 重合，则此时的三根惯性主轴称为**中心惯性主轴**。刚体对中心惯性主轴的转动惯量称为**中心主转动惯量**，用 I_{xc} 、 I_{yc} 、 I_{zc} 表示。如果已知刚体的三个中心主转动惯量，则不仅可用式 (8.8) 求得刚体对过质心的任一轴的转动惯量，还可利用 § 6.6 的例 6.10 所提出的公式求得刚体对平行于过质心轴的任一轴的转动惯量，也就是说，在中心惯性主轴的条件下，关于转动惯量的平行轴定理依然成立。如图 8.5 所示，

$$I_{O'\zeta} = I_{C\xi} + Md^2$$

$$= I_{xc} \cos^2 \alpha + I_{yc} \cos^2 \beta + I_{zc} \cos^2 \gamma + Md^2 \quad (8.10)$$

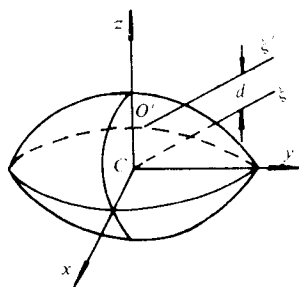


图 8.5

式中 M 是刚体的质量， d 是两平行轴 $C\xi$ 和 $O'\zeta$ 之间的距离。

惯性主轴的方向及相应的主转动惯量，在解析几何中已经提供了直接求解的方法，这里不再详述。我们提请读者注意，在工程技术和机械构件中，有时可以根据对称性确定主轴。这可能有以下几种情况：

(1) 若均质刚体有一对称轴，则它一定是该轴上任意一点的惯性主轴。

(2) 若均质刚体有一对称平面，则垂直于此平面的任意直线必是直线与平面之交点的惯性主轴。

(3) 若刚体是均质旋转体，则旋转轴必是中心惯量主轴。另外，通过旋转轴的任意平面都是对称平面，因此垂直于这个平面的任意轴均为惯性主轴，即垂直于旋转轴的任意轴均是惯性主

轴。

例 8.3 矩形薄板的长和宽分别为 $3a$ 和 $2a$ ，质量为 m ，求它的惯量椭圆。

解 取坐标系 $Oxyz$ 如图 8.6(a) 所示，其中 z 轴由纸面指向读者。不难算出

$$I_x = 3ma^2, \quad I_y = \frac{4}{3}ma^2,$$

$$I_z = 3ma^2 + \frac{4}{3}ma^2 = \frac{13}{3}ma^2,$$

$$I_{xy} = \frac{3}{2}ma^2, \quad I_{yz} = I_{zx} = 0$$

将上述诸特征惯量代入式(8.9)，化简后得

$$9x^2 - 9xy + 4y^2 + 13z^2 = \frac{3k^2}{ma^2}.$$

图 8.6(b)中的椭圆是这个椭球面在 Oxy 平面上的截线，当取 $k^2 = 12ma^4$ 时，该椭圆的方程为

$$9x^2 - 9xy + 4y^2 = 36a^2.$$

可以算出它的长半轴为 $5.16a$ 而短半

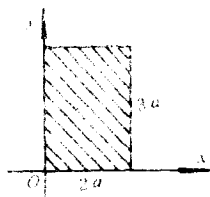
轴为 $1.76a$ ，由式 $ON = \frac{k}{\sqrt{I_t}}$ 可算出对应的主转动惯量为

$$I_y = 0.4507ma^2$$

和

$$I_{x'} = 3.883ma^2.$$

椭球面对于 Oxy 平面对称的， z 方向的半轴长为 $1.664a$ ，在三根惯性主轴中最短，因而对于此轴的主转动惯量最大。



(a)

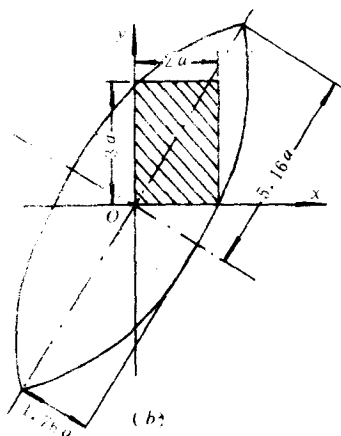


图 8.6

§ 8.2 刚体定点运动的欧拉动力学方程

推导刚体定点运动的动力学方程，要应用动量矩定理式(6.23)。为此，我们先来求刚体作定点运动时对固定点 O 的动量矩表达式。

设刚体绕固定点 O 转动，角速度为 ω ，其中第 i 个质点 M_i 的矢径为 $\mathbf{r}_i$ ，速度为 $\mathbf{v}_i$ ，质量为 m_i 。取坐标系 $Oxyz$ ，其原点与固定点重合，其三根轴可以指向空间固定方向（即定坐标系），也可以和运动的刚体固结（即动坐标系）。根据动量矩的定义，有

$$\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) .$$

应用双重矢积的变换公式

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r},$$

上式可改写成

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \boldsymbol{\omega} \sum m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \\ &= \boldsymbol{\omega} \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &\quad - \sum m_i \mathbf{r}_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i), \end{aligned}$$

式中 x_i, y_i, z_i 是第 i 个质点的矢径 $\mathbf{r}_i$ 在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的投影； $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 是刚体角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在相同轴上的投影。

将上式投影到坐标系各轴上，整理后得

$$\begin{cases} H_x = \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i z_i x_i \\ H_y = -\omega_x \sum m_i x_i y_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i \\ H_z = -\omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i y_i z_i + \omega_z \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) . \end{cases}$$

利用 § 8.1 引入的惯性积符号 I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} 和转动惯量的表示法，上式最终可写成

$$\begin{aligned} H_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ H_y &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y - I_z\omega_z.$$

式(8.11)可以用矩阵来表示, 即

$$\mathbf{H}_O = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

与刚体定轴转动(设转轴为 Oz 轴)时的动量矩表达式 $H_z = I_z\omega$ 相比较, 式(8.12)中的惯量矩阵和 I_z 的地位相当。

这里要强调一点, 如果坐标系 $Oxyz$ 是一固定坐标系, 则惯量矩阵中各特征惯量一般将随时间而改变; 如果 $Oxyz$ 是一固结在运动刚体上的动坐标系, 则惯量矩阵中各特征惯量均为常量。在研究刚体定点运动时, 当然是取动坐标系方便。

如果轴 Ox 、 Oy 和 Oz 恰好就是刚体对 O 点的三根惯性主轴, 则动量矩的表达式(8.11)可简化为

$$H_x = I_x\omega_x, \quad H_y = I_y\omega_y, \quad H_z = I_z\omega_z.$$

写成矢量式就是

$$\mathbf{H}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k} \quad (8.13)$$

在一般情况下, $I_x \neq I_y \neq I_z$, 由上式可知, 动量矩 $\mathbf{H}$ 的方向与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不重合, 如图 8.7 所示。只有在 $I_x = I_y = I_z$ 或刚体转动的瞬时转轴为惯性主轴时, 动量矩矢量和角速度矢量的方向才是一致的。

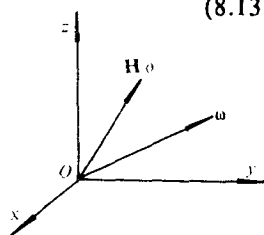


图 8.7

为了推导刚体定点运动的动力学方程, 取固定点 O 为坐标原点, 建立一个与运动刚体相固结的动坐标系 $Oxyz$ 。由式(6.23)可得

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \mathbf{L}_O,$$

而

$$\mathbf{H}_O = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k},$$