電工數學

·譯者·
劉宜倫 陸鶴壽

序　言

數學一門應用於工程方面之範圍甚廣，如僅有微積分及微分方程等之基本方法，在實用上常感不敷．反之，如遇數學上之困難時即須參考專書，則不特時間及設備不許，卽訓練及需要亦有不同，往往不得其要領．電機工程方面所應用之數學尤廣，困難亦多．年來國內外各大學在電機工程學程中，常注重電工數學一課，予學生以充分之數學訓練，其旨卽在此也．

電工數學一課搜集材料頗非易事，蓋高等工程數學雖不乏專書，唯性質均過於普通，不切合電機工程之需要．而運算微積及電機工程微分方程等書，又嫌涉及專門，偏而未能概括． 最近英國 A. G. Warren氏以三十多年之經驗，視實用之需要，廣事搜集，編成是書．凡普通電機工程所應用之數學，幾概括無遺．所舉之例題，亦均切實而盡詳，不特爲電工數學一課之寶貴課本，亦電機工程師之必備數學手冊也．

譯者因感國內各界之急迫需要，又覺是書內容之豐富，爰譯成中文，以供國人之參考．唯譯者學識譾薄，訛誤難免，如承學者不吝指敎，實爲幸甚．

劉宜倫　陸鶴壽

目　　錄

第　一　章

實數與複數

1. 實數(Real Number)

算學之基本運算爲加減乘除，其計算之步驟可與其原物品或其數量相聯關。但其應用之定則則不相同。

加法在有效運用時，物品之性質並不重要。故計算時，可由討論物品本體進而計其數目或運算素(Operator)。 但此種理論仍受物體本質之限制而未完全，其主要之限制爲數目之性質。蓋有意義者，僅正整數耳。 在某種情形之下，非整數(分數)亦有其意義。 唯此種意義，亦已不在物品本體範圍之內，而限於其數量上之性質。因此計算時，可僅採用抽象之運算素。

減法仍受物品之限制，且尙不能從較小之數目減去一較大數。

乘法乃多次重複之加法，故其法則無庸贅述。

除法亦有其限度，數量及度量均有助其計算之程序。 分數與整數同樣重要。

負數單獨言之並無意義；與方向相聯時卽將數量分成無向量(Scalars)及向量(Vectors)二類。無向量僅有量而無向。向量則量及向二者並重也。

2. 複數(Complex Number)

設從一直線 OX 之原點 O，劃出一小段 OP_1 (P_1 在 O 之右方)。當另取一長度 OP_x 時，可使 OP_x/OP_1 之比數成一任何實數(圖 1)。當此比數 x 為一正數時，P_x 係在 O 之右方，反之則將位在 O 之左端。現可注意者乃此抽象數目 x 係取 OP_x 及一單位長度 OP_1 之比數，而非僅由 OP_x 之長度所代表也。

圖 1

反之，在 OX 線上，P_x 點之任何位移，均可由一實數 x 代表之。惟如 P_z 為在一平面上之任何一點，其位置之說明，則需二實數，卽．代表其與 OX 平行之位移；而 y 則代表其與 OX 垂直之位移(見圖 2x)

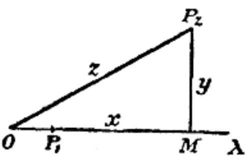

圖 2

同樣可知 P_z 之方位，係經 $OP_z/OP_1 = z$ 所定。此 z 係一複乘數，與 OP_1 相乘卽得 OP_z，一如實數 x 乘 OP_1 可得 OP_x 者同。現此 OP_z 之位移可目為由二部分所組成，卽 $OM(= x\cdot OP_1)$ 及 $MP_z(= y\cdot OP_1)$ 是也。唯 MP_z 與 OX 成一直角，故常書為 $MP_z = jy \cdot OP_1$，其中 j 係一運算素(虛數)，與一長度相乘卽可將其方向旋轉一直角(或其相移前 $\pi/2$)，結果乃得一複數 $z = x + jy$。

平面上之任何一點僅代表一複數。反之，每一複數亦僅代表平面上之一點。x 及 y 則分別為 z 之實量及虛量，並常書為 $x = R(z)$ 及 $y = I(z)$。

下列之關係為顯然正確者:

設 $z_1 = x_1 + jy_1$ 及 $z_2 = x_2 + jy_2$

則

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{1}$$

同時

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \tag{2}$$

又如

$$z_1 = x_1 + jy_1 = z_2 = x_2 + jy_2$$

則

$$x_1 = x_2 \quad 及 \quad y_1 = y_2 \tag{3}$$

方程式(3)爲一重要之關係,卽如二複數相等,則其實虛二部份亦分別相等.

3. Argand 圖

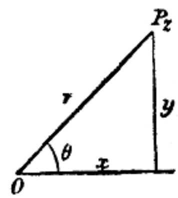

圖 3

P_z 點之位置,亦可從原點以距離 $r \cdot OP_1$ 代表之,其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 設 θ 爲向徑 (Radius Vector)與 x 軸線所成之角(圖 3)(此圖係 Argand 氏在 1806 年發表,通常以其姓氏名之),則 $r\cos\theta = x$ 及 $r\sin\theta = y$.

故

$$z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{4}$$

其中 r 代表 z 之絕對值,亦名爲 z 之幅模(Modulus),亦可寫作 $|z|$ 或 Mod. z. 角度 θ 爲 z 之幅角 (Argument) 或相 (Phase),可寫 $\theta =$ Arg. z.

故一長度乘以 z,係將其數值依 r 或 $|z|$ 之比數而增加,同時又轉動一正角 θ,此可由下式表出之.

$$z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{5}$$

已知複數之幅模爲唯一者,唯其幅角則否. 設以 $2n\pi + \theta$ 代替 θ,而 n 爲整數,則 z 之值並不變動. 故 Arg. z 之主要值係在滿足下列之關係時得之,卽

$$-\pi < \text{Arg. } z \leq \pi$$

(當然此僅係一種慣式. 假定 $0 \leq \text{Arg.}\, z \leq 2\pi$, 則兩可之情形,亦可避免之. 此卽第二十二章共軛函數 (Conjugate Functions) 所採用者. 實際上,所須考慮者乃當 n 之數値並非零時,此方程式有無意義.)

4. 複數之乘法

設 OP_1 以一複數

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$$

乘之,則其長增加 r_1 倍,其相移前 θ_1. 設其積再乘以

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

其長增加至 r_1r_2,其相又移前一角度 θ_2;其積之幅模為 r_1r_2,其幅角為 $\theta_1+\theta_2$. 故

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned} \tag{6}$$

5. j 之數學解釋

j 之簡單數學解釋,可由方程式(6)得之. 設令 j 為一簡單之係數,則方程式

$$\begin{aligned} &(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) \\ &\qquad = \cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

變成

$$\begin{aligned} &\cos\theta_1\cos\theta_2 + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) + j^2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &\quad = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \end{aligned}$$

或

$$j^2\sin\theta_1\sin\theta_2 = -\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$j^2 = -1, \quad j = \sqrt{-1} \tag{7}$$

6. 指數定理(Exponential Function)

指數函數 ε 之定義爲

$$\varepsilon = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt.}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{8}$$

由二項定理(Binomial Theorem)得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\text{等}$$

當 n 爲無限大時,得

$$\varepsilon = 1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots \tag{9}$$

設 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ 以同理展開,並使 n 爲無限大,則得下列之結果:

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots$$

既因 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$, 則

$$\varepsilon^x = 1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots \tag{10}$$

此卽係指數定理。

(ε 之值爲 2.71828…)

此定理之簡單推廣,亦屬有用。設令 $c=\log_\varepsilon a$, 其中 a 爲一任擇數,則 $\varepsilon^c = a$, 得

$$a^x = (\varepsilon^c)^x = \varepsilon^{cx} = \varepsilon^{x\log_\varepsilon a}$$

於是

$$a^x = 1+x\log_\varepsilon a+\frac{x^2(\log_\varepsilon a)^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3(\log_\varepsilon a)^3}{\underline{|3}}+\cdots \tag{11}$$