

436584

5(3)31
7/442

電工數學

成都工學院圖書館

·譯者·

基本館藏

劉宜倫 陸鶴壽



序 言

數學一門應用於工程方面之範圍甚廣，如僅有微積分及微分方程等之基本方法，在實用上常感不敷。反之，如遇數學上之困難時即須參考專書，則不特時間及設備不許，即訓練及需要亦有不同，往往不得其要領。電機工程方面所應用之數學尤廣，困難亦多。年來國內外各大學在電機工程學程中，常注重電工數學一課，予學生以充分之數學訓練，其旨即在此也。

電工數學一課搜集材料頗非易事，蓋高等工程數學雖不乏專書，唯性質均過於普通，不切合電機工程之需要。而運算微積及電機工程微分方程等書，又嫌涉及專門，偏而未能概括。最近英國 A. G. Warren氏以三十多年之經驗，視實用之需要，廣事搜集，編成是書。凡普通電機工程所應用之數學，幾概括無遺。所舉之例題，亦均切實而盡詳，不特為電工數學一課之寶貴課本，亦電機工程師之必備數學手冊也。

譯者因感國內各界之急迫需要，又覺是書內容之豐富，爰譯成中文，以供國人之參考。唯譯者學識謬薄，訛誤難免，如承學者不吝指教，實為幸甚。

劉宜倫 陸鶴壽

目 錄

序	1
第一章 實數與複數	1
1. 實數	1
2. 複數	2
3. Argand 圖	3
4. 複數之乘法	4
5. i 之數學解釋	4
6. 指數定理	5
7. 對數之展式	6
8. 複數化為指數函數	6
9. 雙曲線函數	8
10. 例題	9
第二章 微積分原理	13
11. 引言	13
12. 微分——觀察者 A	13
13. 積分——觀察者 B	15
14. 微分及積分；互易關係	15
第三章 微分法	19
15. 函數之函數	19
16. 標準式之微分	22

17. 微分定則之例解	27
18. 遞次微分	28
19. 積之遞次微分; Leibnitz 定理	26
20. 馬克勞林定理	27
21. 台勞定理	28
22. 最大及最小	31
第四章 積分法(一)	33
23. 引言	33
24. 積分常數	34
25. 積分之普通定律	34
26. 積分之普通程序	35
27. 代替法	36
28. 分部積分法	39
29. 雙曲線函數	42
第五章 靜電學磁學及電動學中基本關係之概述	44
30. 電荷間之力	44
31. 電場及力線	44
32. 電勢	45
33. 點電荷之電勢	45
34. 等勢面	46
35. 高斯定理	46
36. 偏微分之基礎	47
37. 布阿松方程式	48
38. 拉拍拉斯方程式	49
39. 力管	49
40. 電荷之面密度	50

41. 力管頂端電荷量之相等性	51
42. 電位移	51
43. 電容	51
44. 導體面代替等勢面；球體之電容	52
45. 同心球體之電容	52
46. 平行片式電容器之電容	53
47. 電容器之勢能	54
48. 電場中之電能	54
49. 二磁極間之力及磁鐵之磁矩	54
50. 磁場及力線	55
51. 磁勢	55
52. 磁化強度	57
53. 二相等及均勻磁化極間之磁場	57
54. 電流所產生之磁場及磁場中導體所受之力	58
55. 通路中電流之磁勢	61
56. 磁場中運動電荷所受之力	61
57. 磁場中運動導體內所產生之電動勢	62
58. 改變匝連電路磁通時之功	63
59. 電感	63
60. 向量場及電勢	64
61. 電場中之線積分	65
62. 磁場中之磁勢	66
63. 向量之旋度	68
64. 鐵之磁化	71
65. 單位；電動定律	75
66. 各單位間之數量關係	76

第六章 電工實用問題	78
67. 正弦函數之平均值.....	78
68. 正弦函數之均方根值.....	79
69. 載流直導線附近之磁場強度.....	79
70. 實心圓柱導線內之磁場強度.....	80
71. 圓電流之磁場.....	81
72. 電路平面一點上由於圓電流之磁力.....	82
73. 正方形中心之場強度.....	84
74. 載流導線間之力.....	85
75. 二無限長平行導線間之力.....	85
76. 壓縮效應.....	85
77. 電路自感之計算.....	87
78. 同軸電纜之電感.....	87
79. 平行線之電感.....	88
80. 同軸電纜之電容.....	88
81. 平行導線之電容(近似解).....	89
82. 平行導線之電容(正確解).....	90
83. 同軸電纜之介質應力;內導線之最佳半徑.....	91
84. 高週率同軸饋電線之最佳尺寸.....	92
85. 螺線管施於鐵活柱之引力;動鐵安培計.....	94
86. 電路面積增加時所作之功.....	96
87. 電場中電子之運動.....	97
88. 陰極射線之電偏向.....	98
89. 陰極射線之磁偏向.....	99
第七章 諧量向量及對稱成分	101
90. 引言.....	101

91. 波動之向量標示制	105
92. 交流電上之應用	106
93. 向量導納	108
94. 反演變換及向量軌跡	108
95. 直線之反演變換	109
96. 圓之反演變換	110
97. 諧振電路	112
98. 耦合電路	113
99. 交流電路中之電功率	115
100. 多相制	116
101. 平衡及不平衡之三相制	118
102. 三相平衡電路之電功率	119
103. 對稱成分	120
104. 導出制	122
105. 不平衡三相制之電功率	125
第八章 偏微分法	126
106. 遞次偏微分	127
107. 全偏微係數	128
108. 最大及最小	129
109. 三自變數	130
第九章 積分法(二)	131
110. 簡化公式	133
111. Γ 函數 $\Gamma(p)$ 之說明	135
112. 重積分	138
113. 從極方程式求面積	140
114. 三重積分	141

115. 積分號下微分法	141
116. B 函數	142
117. B 函數之另一式	142
118. Γ 函數	143
119. B 函數與 Γ 函數之關係	143
120. 特積分化為 Γ 函數	144
121. Γ 函數之積分值	145
第十章 簡單微分方程及實例	146
122. 引言	146
123. 積分常數之數目	150
124. 第一階第一次之方程式	150
125. 時間常數	158
第十一章 常係數線性微分方程	160
126. 常係數之方程式	161
127. 輔助方程式中之等根	162
128. 輔助方程式中之複根	163
129. 運算素 D	163
130. 運算素 D (續)	164
131. D 中之多項式	166
132. 特積分	167
133. 特積分之特殊求法	168
第十二章 普通之運算法	174
134. 運算素及其定義	174
135. 運算素 D 及其規則	176
136. 反運算素之展開	177
137. $F(D) \cdot e^{\phi(x)}$ 之移動	179

138.	圓函數及雙曲線函數	181
139.	第一階線性微分方程	182
140.	常係數線性微分方程	183
141.	在零數上之運算;補函數	183
142.	單位上之反運算	185
第十三章	常係數線性微分方程之實例	188
143.	電阻電感及電容之串聯電路	188
144.	同步電花式發射機	195
145.	阻尼振盪概論	198
146.	動圈電流計	200
147.	衝擊電流計	203
第十四章	聯立線性微分方程及其實例	206
148.	變壓器	207
149.	單相交流發電機	210
150.	變壓器電路中加電容	216
151.	真空管振盪器	218
152.	動圈揚聲器	221
153.	電話耳機膜片	225
第十五章	微分方程	227
154.	齊線性微分方程	227
155.	恰當線性微分方程	229
156.	運算素之因子分解法	232
157.	互換運算素之方程式	234
158.	不直接包括 y 之方程式	235
159.	第二階方程式	235
160.	已知一積分之全解	236

161. 因變數之變換	239
第十六章 微分方程之級數解法	241
162. 引言	241
163. m 相差一整數之值	243
164. 勒襄特方程式	244
第十七章 栢色函數	247
165. 零階之栢色方程式	248
166. n 階之栢色方程式	250
167. n 爲整數時 n 階方程式之第二解	254
168. 變式之栢色函數 $I_n(x)$ 及 $K_n(x)$	254
169. 栢色函數之整式	256
170. $J_0(x)$ 及 $I_0(x)$ 之定積分	258
第十八章 栢色函數之實例	260
171. 圓柱形導體中之高週率電流	260
172. 實心導線	264
173. 超高週率之情形	267
174. 空心導體	268
175. 實心導體之電流分佈	269
176. 螺線管鐵心之渦流損失	269
177. 消耗之能量	273
178. 超高週率	275
179. 平行闊條片之電阻	276
180. 條片在市電週率之電阻	278
181. 條片之高週電阻	279
182. 在高週率磁通透入分片之程度	280
第十九章 偏微分方程及其應用	283

183. 引言	283
184. 電磁輻射	286
185. 特解——平面波	288
186. 特殊情形——球面波	289
187. 沿導線之傳遞	291
188. 穩定正弦情形	292
189. 無限長線	294
190. 無畸變之電線	295
191. 低損失之電線	296
192. 配端電線之阻抗	297
193. $\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 之方程式	299
194. 電報方程式	301
195. 收到之曲線	303
第二十章 福里哀級數及諧分析	305
196. 引言	305
197. 福里哀之半級數	308
198. 諧曲線	310
199. 梯形波	315
200. 三相電機空氣隙磁通之旋波	317
201. 已整流之正弦電波	319
202. 諧分析	320
203. 其他方法	323
204. 第九諧	324
第二十一章 赫維賽德之運算微積	326
205. 單位函數	326

206. 展開定理	330
207. 當 $f_z(p)$ 爲乘積時之簡式	333
208. 外加變動之電壓	334
209. 傳遞線之方程式	336
210. 電報方程式	337
211. 損失微小之開路傳遞線	339
212. 具有電阻電感電漏及電容之傳遞線	346
第二十二章 共軛函數	349
213. 拉拍拉斯方程式	350
214. S 之意義	351
215. 保角表示法	354
216. $W = z^2$ 之變換	355
217. $W = A \log z$ 之變換	357
218. $W = A \log z$ 之變換(續)	358
219. 變換之比例	359
220. Schwarz-Christoffel 變換	364
221. 遞次變換	366
222. 在厚度均勻其寬度驟變之導體中電流及電勢之分佈	367
223. 實用例題	372
224. 變化截面所增加之電阻	374
225. 由點源流至電阻片之電流	376
226. 由點源流至沿二軸線電導不同片之電流	377
附錄一 各種函數及微積分方程式表	381
附錄二 磁電方程式表	397
附錄三 中英文名詞表	401

第一章

實數與複數

1. 實數(Real Number)

算學之基本運算爲加減乘除，其計算之步驟可與其原物品或其數量相聯關。但其應用之定則則不相同。

加法在有效運用時，物品之性質並不重要。故計算時，可由討論物品本體進而計其數目或運算素(Operator)。但此種理論仍受物體本質之限制而未完全，其主要之限制爲數目之性質。蓋有意義者，僅正整數耳。在某種情形之下，非整數(分數)亦有其意義。唯此種意義，亦已不在物品本體範圍之內，而限於其數量上之性質。因此計算時，可僅採用抽象之運算素。

減法仍受物品之限制，且尙不能從較小之數目減去一較大數。

乘法乃多次重複之加法，故其法則無庸贅述。

除法亦有其限度，數量及度量均有助其計算之程序。分數與整數同樣重要。

負數單獨言之並無意義；與方向相聯時即將數量分成無向量(Scalars)及向量(Vectors)二類。無向量僅有量而無向。向量則量及向二者並重也。

2. 複數(Complex Number)

設從一直線 OX 之原點 O ，劃出一小段 OP_1 (P_1 在 O 之右方)。
當另取一長度 OP_x 時，可使 OP_x/OP_1 之
比數成—任何實數(圖 1)。當此比數 x 為 $\overline{O \quad P_1 \quad P_x \quad X}$
一正數時， P_x 係在 O 之右方，反之則將位
在 O 之左端。現可注意者乃此抽象數目 x 係取 OP_x 及—單位長度
 OP_1 之比數，而非僅由 OP_x 之長度所代表也。

圖 1

反之，在 OX 線上， P_x 點之任何位移，均可由—實數 x 代表之。
惟如 P_x 為在一平面上之任何一點，其位置之說明，則需二實數，即
代表其與 OX 平行之位移；而 y 則代表其與 OX 垂直之位移(見圖 2)

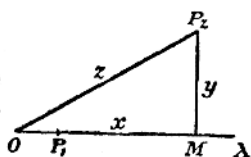


圖 2

同樣可知 P_x 之方位，係經 $OP_x/OP_1 = z$
所定。此 z 係—複乘數，與 OP_1 相乘即得
 OP_x ，一如實數 x 乘 OP_1 可得 OP_x 者同。
現此 OP_x 之位移可目為由二部分所組
成，即 $OM (= x \cdot OP_1)$ 及 $MP_x (= y \cdot OP_1)$
是也。唯 MP_x 與 OX 成一直角，故常書為 $MP_x = jy \cdot OP_1$ ，其中 j
係—運算素(虛數)，與一長度相乘即可將其方向旋轉一直角(或其相
移前 $\pi/2$)，結果乃得—複數 $z = x + jy$ 。

平面上之任何一點僅代表—複數。反之，每一複數亦僅代表平
面上之一點。 x 及 y 則分別為 z 之實量及虛量，並常書為 $x = R(z)$
及 $y = I(z)$ 。

下列之關係為顯然正確者：

設 $z_1 = x_1 + jy_1$ 及 $z_2 = x_2 + jy_2$

則

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (1)$$

同時

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (2)$$

又如

$$z_1 = x_1 + jy_1 = z_2 = x_2 + jy_2$$

則

$$x_1 = x_2 \quad \text{及} \quad y_1 = y_2 \quad (3)$$

方程式(3)爲一重要之關係,即如二複數相等,則其實虛二部份亦分別相等。

3. Argand 圖

P_z 點之位置,亦可從原點以距離 $r \cdot OP_1$ 代表之,其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。設 θ 爲向徑 (Radius Vector) 與 x 軸線所成之角(圖 3)(此圖係 Argand 氏在 1806 年發表,通常以其姓氏名之),則 $r \cos \theta = x$ 及 $r \sin \theta = y$ 。

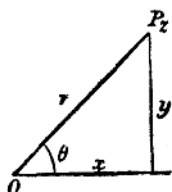


圖 3

故

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (4)$$

其中 r 代表 z 之絕對值,亦名爲 z 之幅模 (Modulus),亦可寫作 $|z|$ 或 $\text{Mod. } z$ 。角度 θ 爲 z 之幅角 (Argument) 或相 (Phase),可寫 $\theta = \text{Arg. } z$ 。

故一長度乘以 z ,係將其數值依 r 或 $|z|$ 之比數而增加,同時又轉動一正角 θ ,此可由下式表出之。

$$z = |z|(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (5)$$

已知複數之幅模爲唯一者,唯其幅角則否。設以 $2n\pi + \theta$ 代替 θ ,而 n 爲整數,則 z 之值並不變動。故 $\text{Arg. } z$ 之主要值係在滿足下列之關係時得之,即

$$-\pi < \text{Arg. } z \leq \pi$$

(當然此僅係一種慣式。假定 $0 \leq \text{Arg. } z \leq 2\pi$, 則兩可之情形, 亦可避免之。此即第二十二章共軛函數 (Conjugate Functions) 所採用者。實際上, 所須考慮者乃當 n 之數值並非零時, 此方程式有無意義。)

4. 複數之乘法

設 OP_1 以一複數

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$$

乘之, 則其長增加 r_1 倍, 其相移前 θ_1 。設其積再乘以

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$$

其長增加至 $r_1 r_2$, 其相又移前一角度 θ_2 ; 其積之幅模為 $r_1 r_2$, 其幅角為 $\theta_1 + \theta_2$ 。故

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned} \quad (6)$$

5. j 之數學解釋

j 之簡單數學解釋, 可由方程式(6)得之。設令 j 為一簡單之係數, 則方程式

$$\begin{aligned} &(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

變成

$$\begin{aligned} &\cos \theta_1 \cos \theta_2 + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) + j^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} j^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 &= -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ j^2 &= -1, \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

6. 指數定理 (Exponential Function)

指數函數 ε 之定義為

$$\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

由二項定理 (Binomial Theorem) 得

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3} + \dots$$

當 n 為無限大時, 得

$$\varepsilon = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (9)$$

設 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ 以同理展開, 並使 n 為無限大, 則得下列之結果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

既因 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$, 則

$$\varepsilon^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (10)$$

此即係指數定理。

(ε 之值為 2.71828...)

此定理之簡單推廣, 亦屬有用。設令 $c = \log_{\varepsilon} a$, 其中 a 為一任擇數, 則 $\varepsilon^c = a$, 得

$$a^x = (\varepsilon^c)^x = \varepsilon^{cx} = \varepsilon^{x \log_{\varepsilon} a}$$

於是

$$a^x = 1 + x \log_{\varepsilon} a + \frac{x^2 (\log_{\varepsilon} a)^2}{2} + \frac{x^3 (\log_{\varepsilon} a)^3}{3} + \dots \quad (11)$$