李晓林 编著

精算学原理

JINGSUANXUE YUANLI

（第三卷）

一元生命保险与年金

经济科学出版社

精算学原理

（第三卷）

一元生命保险与年金

精 算 学 原 理

（第三卷）

一元生命保险与年金

李晓林　编著

经 济 科 学 出 版 社

1999 年·北京

责任编辑：贺聿坤
责任校对：董蔚挺
版式设计：周国强
技术编辑：潘泽新　李长建

精算学原理（第三卷）
—元生命保险与年金
李晓林　编著
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@public2.east.net.cn

社址：北京海淀区万泉河路 66 号　邮编：100086
出版部电话：62630591　发行部电话：62568485
经济科学出版社出版、发行、新华书店经销
北京新华印刷厂印刷
河北省三佳装订厂装订
850×1168 毫米　32 开　20 印张　500000 字
1999 年12月第一版　1999 年12月第一次印刷
印数：0001—3000 册
ISBN 7-5058-1794-9/F·1274　定价：33.60 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

目　　录

第一章
生存模型

第一节　简单生存模型

一、生存状况与生存模型

通常，我们把寿险公司出售的合同称为寿险保单。按寿险保单的约定，保险人（即寿险公司）将根据被保险人在约定时间内的生存或死亡决定是否给付保险金。

例如，我们考虑一个 30 岁的人购买一份期限为 10 年的生存保险，保额为 10 000 元。也就是说，如果他活到 40 岁，将得到 10 000 元的保险金；如果他在 10 年内死亡，保险公司不会有任何给付。

这种只有在特定事件发生时才给付的保险金称作条件支付(contingent payment)。其最重要特征就是它发生的不确定性。一个人的未来生存时间是不确定的，只有在特殊情况下才是预先可知的。

被保险人在未来某个时期的生死是一个不确定性事件，对这个不确定性事件的研究是寿险精算中最重要的工作之一，它决定着保险金的给付与否。它的研究把数学和生存与死亡概率结合在一起。

从数学的角度，生存状况是一个简单的过程。这个过程有如下的特征：

·存在两种状态：生存和死亡。

·单个的人——经常称作生命个体——可被划分为生存者或死亡者，也就是说，我们可说出他们所处的状态。

·生命个体可从“生存”状态到“死亡”状态，但不能相反。

·任何个体的未来生存时间都是未知的，所以我们应从生存或死亡概率的探讨而着手生存状况的研究。

生存模型就是对此过程建立的一个数学模型，用数学公式进行清晰的描述，从而对死亡率的问题作出了一些解释。下面就是生存模型可回答的几个问题的例子：

·一个 45 岁的人在下一年中死亡的概率是多少？

·假若有 1 000 个45 岁的人，那么他们中有多少人可能在下一年内死亡？

·如果某一 45 岁的男性公民，投保了一个 10 年的定期的某种人寿保险，那么应该向他收多少保费？

·一个 45 岁男性公民将可能继续生存的年数？

·由许多 45 岁的男性公民组成的一组人，其死亡概率分布是怎样的？

·一些特定因素（如一天吸 50 根烟）对于 45 岁的男性公民的未来生存时间的影响是怎样的？

以上这些问题都是从概率和统计的角度阐述的，是根据过去的统计资料所做的估计和预测，因为死亡率不是一个确定的常量。

二、新生婴儿的未来生存时间

一个刚刚出生的个体（0 岁），其未来生存时间（或称存活时间）可作为一个随机变量，我们用 T_0 表示。T_0 代表一个 0

岁的人未来生存的时间，也就是他的寿命。T_0 经常以年来计量。

我们经常假定 T_0 是一个连续随机变量，T_0 可以取任何比 0 大的值。

我们用 $P[A]$ 表示事件 A 发生的概率。

我们定义随机变量 T_0 的分布函数 $F_0(t)$ 为：

$$F_0(t) = P[T_0 \leqslant t] \tag{1.1}$$

依定义，$F_0(t)$ 是一个整好 0 岁的人不晚于 t 岁死亡的概率。

另一个互补性的概率也是经常用的，即，一个 0 岁的人在 t 岁之后死亡的概率，也就是他的未来生存时间超过 t 年的概率，我们记作 $S_0(t)$，称为生存函数或生存分布，即：

$$S_0(t) = P[T_0 > t] = 1 - F_0(t) \tag{1.2}$$

例如：一个 0 岁的人在 50 岁之后死亡的概率为：

$$P[T_0 > 50] = S_0(50)$$

在 60 岁之前死亡的概率为：

$$P[T_0 \leqslant 60] = F_0(60)$$

50 岁到 60 岁之间死亡的概率为：

$$P[50 < T_0 \leqslant 60] = F_0(60) - F_0(50)$$

三、年龄为 x 岁（$x>0$）的人的未来生存时间

我们已定义了生存时间分布 $F_0(t)$ 是一个新生个体（定义为 0）随机未来生存时间的分布函数，我们考虑一些年龄为 x 岁（$x>0$）的人。我们可以同样的方式将一个年龄已为 x 岁的人的未来生存时间定义为一个随机变量 T_x。

$$T_x = \text{一个 } x \text{ 岁的人将来继续生存的时间}$$

例如，假设我们考虑一个 30 岁的人，假设他将在 52.5 岁死亡。那么，对于这个人，T_{30}的值为 22.5。在这里，重要的是

意识到 T_x 是一个 x 岁的人将来继续生存的时间，这比知道一个 x 岁的人死亡的年龄更重要。

随机变量 T_x 的分布函数记作 $F_x(t)$，因此：

$$F_x(t) = P[T_x \leqslant t] \tag{1.3}$$

类似地，我们定义一个 x 岁的人在 t 年之后死亡的概率，也就是他的未来生存时间超过 t 年的概率，我们记作 $S_x(t)$，称为生存函数或生存分布，即：

$$S_x(t) = P[T_x > t] = 1 - F_x(t) \tag{1.4}$$

事实上，分布 $F_0(t)$ 和 $F_x(t)$ 之间是有联系的，如果我们知道 0 岁的人（即新生个体）的生存时间分布 $F_0(t)$，我们也就能知道所有年龄 $x>0$ 的人的生存时间分布。

为了说明这个问题，让我们再仔细看一下 T_x 的定义。它是一个 x 岁的人将来可继续生存的时间，以他已生存了 x 岁为条件的。

回忆一下条件概率的定义。假设两个事件 A 和 B，在 B 已发生条件下的概率是：

$$P[A \mid B] = \frac{P[AB]}{P[B]}$$

因此对所有年龄 $x>0$ 的人，假设我们知道 $F_0(t)$，则：

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P[T_0 \leqslant x + t \mid T_0 > x] \\ &= \frac{P[x < T_0 \leqslant x + t]}{P[T_0 > x]} \\ &= \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

生存函数也有类似的表达式，并且这种表示用得更多。

$$\begin{aligned} S_x(t) &= P[T_0 > x + t \mid T_0 > x] \\ &= \frac{P[T_0 > x + t]}{P[T_0 > x]} \end{aligned}$$

$$= \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} \tag{1.6}$$

还有更引人注意的直观解释。如果我们把它重写成：

$$S_0(x+t) = S_0(x) \times S_x(t) \tag{1.7}$$

我们可以把上式右边的结果解释为 0 岁的人生存到 x 岁的生存概率与一个已经活到 x 岁的人再生存到 $x+t$ 岁的条件概率的乘积。这是一个重要的结果——我们将重复使用它。

容易证明，对于 t，当 $u \geqslant 0$ 时，

$$S_x(t+u) = S_x(t) \times S_{x+t}(u) = S_x(u) \times S_{x+u}(t) \tag{1.8}$$

四、生存概率与死亡概率及其符号

（一）未来一年的生存与死亡概率（p_x 和 q_x）

精算界已设计了一些国际标准符号，包括世界公认的生存和死亡概率符号。

定义：

$$p_x = S_x(1) = P[T_x > 1] \tag{1.9}$$

$$q_x = F_x(1) = P[T_x \leqslant 1] \tag{1.10}$$

显然，p_x 表示一个 x 岁的人在 $x+1$ 岁时仍然生存的概率；q_x 表示一个 x 岁的人在未来一年内死亡的概率。很明显，

$$p_x = 1 - q_x \tag{1.11}$$

q_x 被称作死亡概率，不严格地讲，它用来度量 x 岁到 $x+1$ 岁之间死亡的比率，但不要忽视一个事实——它是用概率来定义的。

这些符号很有用的一个原因是整数年龄的 q_x 的数值常常用表格的形式列出。其中有生命偶然事件的概率和其他相关数字的表格称作生命表。本书后的附表中即有英国 12 号（男性）生命表、英国 $A1967 \sim 1970$ 生命表等例子。

（二）未来任意期限内的生存与死亡概率

符号 p_x 和 q_x 可扩展到不只限于 1 年的死亡和生存概率。

定义：

$$_tp_x = S_x(t) = P[T_x > t] \tag{1.12}$$

$$_tq_x = F_x(t) = P[T_x \leqslant t] \tag{1.13}$$

即，$_tp_x$ 表示 x 岁的人在 $x+t$ 岁时仍然生存的概率；$_tq_x$ 表示 x 岁的人在未来 t 年中死亡的概率。显然，

$$_tp_x = 1 - {_tq_x} \tag{1.14}$$

注意，p_x 和 q_x 是 $_tp_x$ 和 $_tq_x$ 的特殊形式，

$$p_x = {_1p_x}$$

$$q_x = {_1q_x}$$

回想一下上一节的结论：

$$S_x(t+u) = S_x(t) \times S_{x+t}(u) = S_x(u) \times S_{x+u}(t)$$

用精算符号，可以表示为：

$$_{t+u}p_x = {_tp_x} \times {_up_{x+t}} = {_up_x} \times {_tp_{x+u}} \tag{1.15}$$

容易理解：

$$_{t+u}q_x = 1 - (1 - {_uq_x})(1 - {_tq_{x+u}}) \tag{1.16}$$

注意：等式 $_{t+u}q_x = {_uq_x} \times {_tq_{x+u}}$ 是不成立的，用这结果代替公式 1.16 是错误的。

五、未来生存时间的密度函数

既然未来生存时间是个随机变量，它的密度函数就显得尤为重要。我们用 $f_x(t)$ 表示 T_x 的密度函数，也就是：

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}F_x(t) \tag{1.17}$$

第二节 死 亡 力

一、死亡力的概念

死亡力是从生存模型中获得的最重要的数据，是生存问题研究中的一个基本概念。

死亡力通常被统计学家称为危险率，在本书中，死亡力和危险率的意思是相同的。我们将一个生命在 x 岁（$0 \leqslant x \leqslant w$）的死亡力记作 μ_x，定义为：

$$\mu_x = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{1}{h} \times P[T_0 \leqslant x + h \mid T_0 > x] \right) \quad (1.18)$$

我们假定式中的极限总是存在的。

在这个表达式中的概率是一个条件概率：活到 x 岁的人在一个很少时间间隔 h 内死亡的概率。把这个条件概率以长度为 h 的时间单位加以分割（如年龄年），这样当 h 趋于 0 时，整个表达式有意义。括号中的表达式是在一个很小的时间间隔，即每单位时间死亡的概率。

直观地看，从 μ_x 的定义中可以理解，如果 h 很小，μ_x 近似等于：

$$\frac{1}{h} \times P[T_0 \leqslant x + h \mid T_0 > x]$$

因此，对于很小的 h，$h\mu_x$ 近似看作一个 x 岁的人在一个很少的时间间隔（x，$x+h$）中死亡的概率。也就是说，

$$h\mu_x \approx {}_hq_x$$

二、关于死亡力的重要公式

从以上所给定义，我们可得到关于死亡力的一个简捷公式：

$$\mu_x = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{1}{h} \times P[T_0 \leqslant x + h \mid T_0 > x] \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{1}{h} \times \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \right)$$

$$= \frac{1}{1 - F_0(x)} \times \frac{d}{dx} F_0(x) \tag{1.19}$$

$$= \frac{-1}{S_0(x)} \times \frac{d}{dx} S_0(x) \tag{1.20}$$

我们假设 $F_0(t)$、$F_x(t)$、$S_0(t)$ 和 $S_x(t)$ 都是关于 t 的可微函数。

三、死亡力与未来生存时间的分布函数、密度函数之间的关系

死亡力与未来生存时间的分布函数、密度函数之间的关系是生存模型中最重要的关系，我们可以通过有关的概念和性质，得出它们之间的表达式。

根据 $f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t)$

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} P[T_x \leqslant t]$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \times \{P[T_x \leqslant t + h] - P[T_x \leqslant t]\}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P[T \leqslant x + t + h \mid T > x] - P[T \leqslant x + t \mid T > x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P[T \leqslant x + t + h] - P[T \leqslant x] - P[T \leqslant x + t] + P[T \leqslant x]}{S(x) \times h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P[T \leqslant x + t + h] - P[T \leqslant x + t]}{S(x) \times h} \tag{1.21}$$

同时乘以和除以 $S(x+t)$ 得到：

$$f_x(t)=\frac{S(x+t)}{S(x)}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\frac{P[T\leqslant x+t+h]-P[T\leqslant x+t]}{S(x+t)}$$

$$=S_x(t)\times\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}P[T\leqslant x+t+h\mid T>x+t]$$

$$=S_x(t)\times\mu_{x+t} \tag{1.22}$$

或者，用精算记号，对 0 到 ω 间的某一年龄 x

$$f_x(t)={}_tp_x\times\mu_{x+t}\qquad 0\leqslant t\leqslant\omega-x \tag{1.23}$$

这是生存模型的最重要的一个结果。

四、两个重要公式

本节的最后，我们探讨一下死亡概率、生存概率与死亡力的两个重要关系式。

（一）${}_tq_x$ 的公式

根据密度函数的上述表达式，我们可以很容易地写出从死亡力 μ_{x+t} 的角度来探讨 ${}_tq_x$ 的公式：

$${}_tq_x=F_x(t)=\int_0^t f_x(s)ds=\int_0^t {}_sp_x\times\mu_{x+s}ds \tag{1.24}$$

这是一个非常有用的公式。特别地，当 $t=1$ 时，有：

$$q_x=\int_0^1 {}_sp_x\times\mu_{x+s}ds \tag{1.25}$$

它是一个简单的直观的说明：${}_sp_x\times\mu_{x+s}ds$ 是（近似地）一个 x 岁的人生存到 $x+s$ 岁，并在一个很短的时间间隔 ds 里死亡的概率。这个定积分因此是这个人在 x 岁到 $x+1$ 岁之间任意一给定时刻死亡的概率的加总。这些事件当然都是独立的，所以我们把它们的概率加起来得到总的概率 q_x。

（二）${}_tp_x$ 的公式

由公式 1.20，我们有：

$$\mu_s=\frac{-({}_sp_0)'}{{}_sp_0}$$