

李晓林 编著

# 精算学原理

JINGSUANXUE YUANLI

(第三卷)

## 一元生命 保险与年金

精算师资格考试

# 精算学原理

（第三版）

一元生命  
保险与年金

.....

精 算 学 原 理

(第三卷)

# 一元生命保险 与年金

李晓林 编著

经济科学出版社

1999年·北京

责任编辑：贺聿坤  
责任校对：董蔚挺  
版式设计：周国强  
技术编辑：潘泽新 李长建

**精算学原理（第三卷）**

**一元生命保险与年金**

李晓林 编著

网址：[www.esp.com.cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件：[esp@public2.east.net.cn](mailto:esp@public2.east.net.cn)

**（版权所有 翻印必究）**

社址：北京海淀区万泉河路 66 号 邮编：100086

出版部电话：62630591 发行部电话：62568485

经济科学出版社出版、发行、新华书店经销

北京新华印刷厂印刷

河北省三佳装订厂装订

850×1168 毫米 32 开 20 印张 500000 字

1999 年 12 月第一版 1999 年 12 月第一次印刷

印数：0001—3000 册

ISBN 7 - 5058 - 1794 - 9/F · 1274 定价：33.60 元

**（图书出现印装问题，本社负责调换）**

# 目 录

<b>第一章 生存模型</b> .....	( 1 )
第一节 简单生存模型 .....	( 1 )
第二节 死亡力 .....	( 7 )
第三节 生命期望值 .....	( 10 )
<b>第二章 生命表</b> .....	( 14 )
第一节 生命表函数 .....	( 14 )
第二节 延期死亡概率和非整数年龄的生命表函数 ..	( 18 )
第三节 选择表 .....	( 22 )
第四节 死亡率的简单定律 .....	( 29 )
第五节 国内外生命表状况简介 .....	( 30 )
<b>第三章 基本生命保险</b> .....	( 34 )
第一节 生命保险与生命年金 .....	( 34 )
第二节 生存保险 ( pure endowment ) 及其预期现值 .....	( 35 )
第三节 定期寿险 ( Term assurance ) 及其预期现值 .....	( 37 )
第四节 两全保险及其预期现值 .....	( 39 )
第五节 终身寿险及其预期现值 .....	( 42 )
第六节 延期支付的生命保险 .....	( 43 )
第七节 基本生命保险的数值计算 .....	( 44 )
<b>第四章 基本生命年金</b> .....	( 48 )
第一节 终身生命年金及其预期现值 .....	( 48 )
第二节 定期生命年金及其预期现值 .....	( 51 )

第三节	生命保险与生命年金的预期现值之间的关系	(55)
第四节	延期支付的生命年金	(57)
第五节	生命年金预期现值的数值计算	(58)
<b>第五章</b>	<b>一般年金与保险函数</b>	(61)
第一节	每年支付 $m$ 次的生命年金	(61)
第二节	递增寿险与年金	(65)
第三节	死亡时刻立即给付的生命保险与连续支付的生命年金	(73)
<b>第六章</b>	<b>寿险保费的计算原理</b>	(82)
第一节	价值方程	(82)
第二节	保费与净保费	(83)
第三节	费用	(92)
第四节	超常风险	(99)
第五节	分红保险	(107)
<b>第七章</b>	<b>保单价值与准备金</b>	(116)
第一节	不考虑费用的预期保单价值	(116)
第二节	不计费用的追溯保单价值	(128)
第三节	考虑了费用的保单价值	(133)
第四节	分红保单的保单价值	(135)
第五节	纯保费保单价值	(142)
第六节	死差益	(150)
<b>第八章</b>	<b>解约价值与准备金</b>	(157)
第一节	解约价值	(157)
第二节	缴清保单	(162)
第三节	其他保单转换	(167)
<b>第九章</b>	<b>现金流量与利润测算</b>	(170)
第一节	现金流量模型	(170)

---

第二节 利润测算	(179)
第三节 利润预期	(188)
<b>第十章 利润现值及利润水平</b>	<b>(194)</b>
第一节 利润现值	(194)
第二节 利润水平	(197)
第三节 利润测试和准备金	(201)
<b>第十一章 精算基础</b>	<b>(208)</b>
第一节 精算基础的内容	(208)
第二节 定价基础	(214)
第三节 估价基础	(218)
<b>附录:</b>	<b>(223)</b>
附表一 复利年金表	(223)
复利年金表 1	(223)
复利年金表 2	(228)
附表二 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993)	(233)
1. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) (男)	(233)
2. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) 换算函数表 (男)	(239)
3. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) (女)	(281)
4. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) 换算函数表 (女)	(287)
5. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) (男女混合)	(329)
6. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) 换算函数表 (男女混合)	(335)
7. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) 换算函数表 (养老金专用) (男)	(377)
8. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) 换算函数表	

(养老金专用) (女) .....	(419)
9. 中国人寿保险业经验生命表 (1990~1993) 换算函数表	
(养老金专用) (男女混合) .....	(461)
附表三 英国经验生命表 .....	(503)
1. 英国 ELT12 号生命表 (男) .....	(503)
2. 英国 A1967~1970 生命表 .....	(520)
3. 英国 a (55) 生命表 .....	(602)
附表四 美国经验生命表 (1980) .....	(617)
1. 美国经验生命表 (Commissioners 1980 Standard Ordinary)	
(男) .....	(617)
2. 美国经验生命表 (Commissioners 1980 Standard Ordinary)	
(女) .....	(622)
<b>主要参考文献</b> .....	<b>(627)</b>



# 第一章

## 生存模型

### 第一节 简单生存模型

#### 一、生存状况与生存模型

通常，我们把寿险公司出售的合同称为寿险保单。按寿险保单的约定，保险人（即寿险公司）将根据被保险人在约定时间内的生存或死亡决定是否给付保险金。

例如，我们考虑一个 30 岁的人购买一份期限为 10 年的生存保险，保额为 10 000 元。也就是说，如果他活到 40 岁，将得到 10 000 元的保险金；如果他在 10 年内死亡，保险公司不会有任何给付。

这种只有在特定事件发生时才给付的保险金称作条件支付 (contingent payment)。其最重要特征就是它发生的不确定性。一个人的未来生存时间是不确定的，只有在特殊情况下才是预先可知的。

被保险人在未来某个时期的生死是一个不确定性事件，对这个不确定性事件的研究是寿险精算中最重要的工作之一，它决定着保险金的给付与否。它的研究把数学和生存与死亡概率结合在一起。

从数学的角度, 生存状况是一个简单的过程。这个过程有如下的特征:

- 存在两种状态: 生存和死亡。
- 单个的人——经常称作生命个体——可被划分为生存者或死亡者, 也就是说, 我们可说出他们所处的状态。
- 生命个体可从“生存”状态到“死亡”状态, 但不能相反。

· 任何个体的未来生存时间都是未知的, 所以我们应从生存或死亡概率的探讨而着手生存状况的研究。

生存模型就是对此过程建立的一个数学模型, 用数学公式进行清晰的描述, 从而对死亡率的问题作出了一些解释。下面就是生存模型可回答的几个问题的例子:

- 一个 45 岁的人在下一年中死亡的概率是多少?
- 假若有 1 000 个 45 岁的人, 那么他们中有多少人可能在下一年内死亡?
- 如果某一 45 岁的男性公民, 投保了一个 10 年的定期的某种人寿保险, 那么应该向他收多少保费?
- 一个 45 岁男性公民将可能继续生存的年数?
- 由许多 45 岁的男性公民组成的一组人, 其死亡概率分布是怎样的?
- 一些特定因素 (如一天吸 50 根烟) 对于 45 岁的男性公民的未来生存时间的影响是怎样的?

以上这些问题都是从概率和统计的角度阐述的, 是根据过去的统计资料所做的估计和预测, 因为死亡率不是一个确定的常量。

## 二、新生婴儿的未来生存时间

一个刚刚出生的个体 (0 岁), 其未来生存时间 (或称存活时间) 可作为一个随机变量, 我们用  $T_0$  表示。  $T_0$  代表一个 0

岁的人未来生存的时间，也就是他的寿命。 $T_0$  经常以年来计量。

我们经常假定  $T_0$  是一个连续随机变量， $T_0$  可以取任何比 0 大的值。

我们用  $P[A]$  表示事件  $A$  发生的概率。

我们定义随机变量  $T_0$  的分布函数  $F_0(t)$  为：

$$F_0(t) = P[T_0 \leq t] \quad (1.1)$$

依定义， $F_0(t)$  是一个正好 0 岁的人不晚于  $t$  岁死亡的概率。

另一个互补性的概率也是经常用的，即，一个 0 岁的人在  $t$  岁之后死亡的概率，也就是他的未来生存时间超过  $t$  年的概率，我们记作  $S_0(t)$ ，称为生存函数或生存分布，即：

$$S_0(t) = P[T_0 > t] = 1 - F_0(t) \quad (1.2)$$

例如：一个 0 岁的人在 50 岁之后死亡的概率为：

$$P[T_0 > 50] = S_0(50)$$

在 60 岁之前死亡的概率为：

$$P[T_0 \leq 60] = F_0(60)$$

50 岁到 60 岁之间死亡的概率为：

$$P[50 < T_0 \leq 60] = F_0(60) - F_0(50)$$

### 三、年龄为 $x$ 岁 ( $x > 0$ ) 的人的未来生存时间

我们已定义了生存时间分布  $F_0(t)$  是一个新生个体（定义为 0）随机未来生存时间的分布函数，我们考虑一些年龄为  $x$  岁 ( $x > 0$ ) 的人。我们可以同样的方式将一个年龄已为  $x$  岁的人的未来生存时间定义为一个随机变量  $T_x$ 。

$T_x$  = 一个  $x$  岁的人将来继续生存的时间

例如，假设我们考虑一个 30 岁的人，假设他将在 52.5 岁死亡。那么，对于这个人， $T_{30}$  的值为 22.5。在这里，重要的是

意识到  $T_x$  是一个  $x$  岁的人将来继续生存的时间, 这比知道一个  $x$  岁的人死亡的年龄更重要。

随机变量  $T_x$  的分布函数记作  $F_x(t)$ , 因此:

$$F_x(t) = P[T_x \leq t] \quad (1.3)$$

类似地, 我们定义一个  $x$  岁的人在  $t$  年之后死亡的概率, 也就是他的未来生存时间超过  $t$  年的概率, 我们记作  $S_x(t)$ , 称为生存函数或生存分布, 即:

$$S_x(t) = P[T_x > t] = 1 - F_x(t) \quad (1.4)$$

事实上, 分布  $F_0(t)$  和  $F_x(t)$  之间是有联系的, 如果我们知道 0 岁的人 (即新生个体) 的生存时间分布  $F_0(t)$ , 我们也就知道所有年龄  $x > 0$  的人的生存时间分布。

为了说明这个问题, 让我们再仔细看一下  $T_x$  的定义。它是一个  $x$  岁的人将来可继续生存的时间, 以他已生存了  $x$  岁为条件的。

回忆一下条件概率的定义。假设两个事件  $A$  和  $B$ , 在  $B$  已发生条件下的概率是:

$$P[A | B] = \frac{P[AB]}{P[B]}$$

因此对所有年龄  $x > 0$  的人, 假设我们知道  $F_0(t)$ , 则:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P[T_0 \leq x + t | T_0 > x] \\ &= \frac{P[x < T_0 \leq x + t]}{P[T_0 > x]} \\ &= \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

生存函数也有类似的表达式, 并且这种表示用得更多。

$$\begin{aligned} S_x(t) &= P[T_0 > x + t | T_0 > x] \\ &= \frac{P[T_0 > x + t]}{P[T_0 > x]} \end{aligned}$$

$$= \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} \quad (1.6)$$

还有更引人注意的直观解释。如果我们把它重写成：

$$S_0(x+t) = S_0(x) \times S_x(t) \quad (1.7)$$

我们可以把上式右边的结果解释为 0 岁的人生存到  $x$  岁的生存概率与一个已经活到  $x$  岁的人再生存到  $x+t$  岁的条件概率的乘积。这是一个重要的结果——我们将重复使用它。

容易证明，对于  $t$ ，当  $u \geq 0$  时，

$$S_x(t+u) = S_x(t) \times S_{x+t}(u) = S_x(u) \times S_{x+u}(t) \quad (1.8)$$

#### 四、生存概率与死亡概率及其符号

##### (一) 未来一年的生存与死亡概率 ( $p_x$ 和 $q_x$ )

精算界已设计了一些国际标准符号，包括世界公认的生存和死亡概率符号。

定义：

$$p_x = S_x(1) = P[T_x > 1] \quad (1.9)$$

$$q_x = F_x(1) = P[T_x \leq 1] \quad (1.10)$$

显然， $p_x$  表示一个  $x$  岁的人在  $x+1$  岁时仍然生存的概率； $q_x$  表示一个  $x$  岁的人在未一年内死亡的概率。很明显，

$$p_x = 1 - q_x \quad (1.11)$$

$q_x$  被称作死亡概率，不严格地讲，它用来度量  $x$  岁到  $x+1$  岁之间死亡的比率，但不要忽视一个事实——它是用概率来定义的。

这些符号很有用的一个原因是整数年龄的  $q_x$  的数值常常用表格的形式列出。其中有生命偶然事件的概率和其他相关数字的表格称作生命表。本书后的附表中即有英国 12 号（男性）生命表、英国 A1967~1970 生命表等例子。

## (二) 未来任意期限内的生存与死亡概率

符号  $p_x$  和  $q_x$  可扩展到不只限于 1 年的死亡和生存概率。

定义:

$${}_t p_x = S_x(t) = P[T_x > t] \quad (1.12)$$

$${}_t q_x = F_x(t) = P[T_x \leq t] \quad (1.13)$$

即,  ${}_t p_x$  表示  $x$  岁的人在  $x+t$  岁时仍然生存的概率;  ${}_t q_x$  表示  $x$  岁的人在将来  $t$  年中死亡的概率。显然,

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x \quad (1.14)$$

注意,  $p_x$  和  $q_x$  是  ${}_1 p_x$  和  ${}_1 q_x$  的特殊形式,

$$p_x = {}_1 p_x$$

$$q_x = {}_1 q_x$$

回想一下上一节的结论:

$$S_x(t+u) = S_x(t) \times S_{x+t}(u) = S_x(u) \times S_{x+u}(t)$$

用精算符号, 可以表示为:

$${}_{t+u} p_x = {}_t p_x \times {}_u p_{x+t} = {}_u p_x \times {}_t p_{x+u} \quad (1.15)$$

容易理解:

$${}_{t+u} q_x = 1 - (1 - {}_u q_x)(1 - {}_t q_{x+u}) \quad (1.16)$$

注意: 等式  ${}_{t+u} q_x = {}_u q_x \times {}_t q_{x+u}$  是不成立的, 用这结果代替公式 1.16 是错误的。

## 五、未来生存时间的密度函数

既然未来生存时间是个随机变量, 它的密度函数就显得尤为重要。我们用  $f_x(t)$  表示  $T_x$  的密度函数, 也就是:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) \quad (1.17)$$

## 第二节 死亡力

### 一、死亡力的概念

死亡力是从生存模型中获得的最重要的数据，是生存问题研究中的一个基本概念。

死亡力通常被统计学家称为危险率，在本书中，死亡力和危险率的意思是相同的。我们将一个生命在  $x$  岁 ( $0 \leq x \leq w$ ) 的死亡力记作  $\mu_x$ ，定义为：

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{h} \times P[T_0 \leq x + h \mid T_0 > x] \right) \quad (1.18)$$

我们假定式中的极限总是存在的。

在这个表达式中的概率是一个条件概率：活到  $x$  岁的人在一个很少时间间隔  $h$  内死亡的概率。把这个条件概率以长度为  $h$  的时间单位加以分割（如年龄年），这样当  $h$  趋于 0 时，整个表达式有意义。括号中的表达式是在一个很小的时间间隔，即每单位时间死亡的概率。

直观地看，从  $\mu_x$  的定义中可以理解，如果  $h$  很小， $\mu_x$  近似等于：

$$\frac{1}{h} \times P[T_0 \leq x + h \mid T_0 > x]$$

因此，对于很小的  $h$ ， $h\mu_x$  近似看作一个  $x$  岁的人在一个很少的时间间隔 ( $x, x + h$ ) 中死亡的概率。也就是说，

$$h\mu_x \approx {}_h q_x$$

### 二、关于死亡力的重要公式

从以上所给定义，我们可得到关于死亡力的一个简捷公式：

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{h} \times P[T_0 \leq x+h \mid T_0 > x] \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{h} \times \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \right) \\ &= \frac{1}{1 - F_0(x)} \times \frac{d}{dx} F_0(x) \quad (1.19)\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{S_0(x)} \times \frac{d}{dx} S_0(x) \quad (1.20)$$

我们假设  $F_0(t)$ 、 $F_x(t)$ 、 $S_0(t)$  和  $S_x(t)$  都是关于  $t$  的可微函数。

### 三、死亡力与未来生存时间的分布函数、密度函数之间的关系

死亡力与未来生存时间的分布函数、密度函数之间的关系是生存模型中最重要的关系，我们可以通过有关的概念和性质，得出它们之间的表达式。

根据  $f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t)$

$$\begin{aligned}f_x(t) &= \frac{d}{dt} P[T_x \leq t] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \times \{P[T_x \leq t+h] - P[T_x \leq t]\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P[T \leq x+t+h \mid T > x] - P[T \leq x+t \mid T > x]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P[T \leq x+t+h] - P[T \leq x] - P[T \leq x+t] + P[T \leq x]}{S(x) \times h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P[T \leq x+t+h] - P[T \leq x+t]}{S(x) \times h} \quad (1.21)\end{aligned}$$

同时乘以和除以  $S(x+t)$  得到：



$$\begin{aligned}
 f_x(t) &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \frac{P[T \leq x+t+h] - P[T \leq x+t]}{S(x+t)} \\
 &= S_x(t) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} P[T \leq x+t+h \mid T > x+t] \\
 &= S_x(t) \times \mu_{x+t} \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

或者，用精算记号，对 0 到  $\omega$  间的某一年龄  $x$

$$f_x(t) = {}_t p_x \times \mu_{x+t} \quad 0 \leq t \leq \omega - x \quad (1.23)$$

这是生存模型的最重要的一个结果。

#### 四、两个重要公式

本节的最后，我们探讨一下死亡概率、生存概率与死亡力的两个重要关系式。

##### (一) ${}_t q_x$ 的公式

根据密度函数的上述表达式，我们可以很容易地写出从死亡力  $\mu_{x+t}$  的角度来探讨  ${}_t q_x$  的公式：

$${}_t q_x = F_x(t) = \int_0^t f_x(s) ds = \int_0^t {}_s p_x \times \mu_{x+s} ds \quad (1.24)$$

这是一个非常有用的公式。特别地，当  $t=1$  时，有：

$$q_x = \int_0^1 {}_s p_x \times \mu_{x+s} ds \quad (1.25)$$

它是一个简单的直观的说明： ${}_s p_x \times \mu_{x+s} ds$  是（近似地）一个  $x$  岁的人生存到  $x+s$  岁，并在一个很短的时间间隔  $ds$  里死亡的概率。这个定积分因此是这个人从  $x$  岁到  $x+1$  岁之间任意一给定时刻死亡的概率的加总。这些事件当然都是独立的，所以我们把它们的概率加起来得到总的概率  $q_x$ 。

##### (二) ${}_t p_x$ 的公式

由公式 1.20，我们有：

$$\mu_s = \frac{-({}_s p_0)'}{{}_s p_0}$$