

分形 小波与图像压缩

曾文曲 文有为 孙 炜 编著



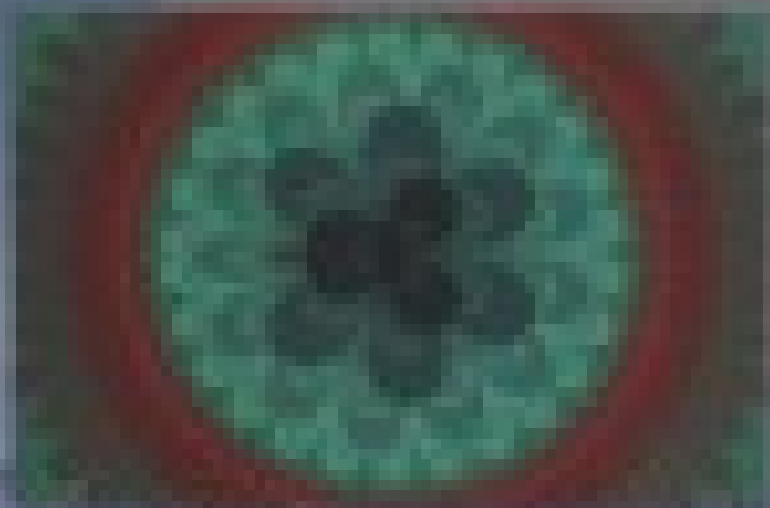
919.8



NEUPRESS
东北大学出版社

分形 小波与图像压缩

曹文彪 王德胜 编 唐 浩 插图



997

分形 小波与图像压缩

曾文曲 文有为 孙 炜 编著

东 北 大 学 出 版 社
• 沈 阳 •

© 曾文曲等 2002

图书在版编目 (CIP) 数据

分形 小波与图像压缩 / 曾文曲, 文有为, 孙炜编著. — 沈阳 :
东北大学出版社, 2002.10

ISBN 7-81054-809-3

I. 分… II. ①曾… ②文… ③孙… III. ①分形理论—应用—
图像处理—数据压缩 ②小波分析—应用—图像处理—数据压缩
IV. TN919.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 052194 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 东北大学印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 140mm×203mm

印 张: 6.5

字 数: 169 千字

出版时间: 2002 年 10 月第 1 版

印刷时间: 2002 年 10 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

责任编辑: 冯淑琴 孟 颖

责任校对: 孟 颖

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定 价: 15.00 元

前 言

图像信息给人们以直观、生动的形象，正成为人们获取外部信息的重要途径。然而，数字化图像具有极大的数据量，这对图像存储和传输非常不利，阻碍了人们对图像的有效获取和使用。如何用尽量少的数据量来表示图像信息，即对图像进行压缩，是本书讨论的主题。

典型的图像压缩方法有行程编码（RLE）、字典编码、哈夫曼编码、算术编码、变换编码、预测编码以及量化编码等。20 世纪末期，分形和小波技术的迅速发展，为图像编码注入了新的活力。分形图像编码的思想主要来源于分形图像可以用迭代函数系通过迭代而得到。现实生活中的图像都存在某种自相似性，因此只要找到图像的一组迭代函数系，则通过迭代就可以得到近似图像。这样，存储图像时只需存储迭代函数的参数，从而达到压缩图像的目的。小波编码的主要思想则来自于小波变换。小波变换具有多分辨率分析的特性，而且在时频上具有表征信号局部特性的能力，小波分解后的各系数分布相对平稳，因此其压缩率高。

本书主要介绍图像编码的基本方法和理论，以及分形和小波在图像编码应用中的方法和理论。本书首先介绍小波分析、分形理论，对无损编码和有损编码进行了汇总，然后引入了分形编码和小波变换编码，最后将分形应用于数字图像水印。

本书着重于基本概念和图像压缩的实现方法，可作为分形几何、小波分析、数字图像处理等课程的参考书，也可作为大学高年级本科生以及从事图像压缩技术的工程技术人员的参考书。

由于我们学识有限，疏漏之处在所难免，希望读者批评指正。

目 录

第 1 章 小波分析理论	1
1.1 傅立叶分析与短时傅立叶分析	1
1.1.1 傅立叶变换	1
1.1.2 短时傅立叶变换	2
1.2 连续小波分析	4
1.2.1 小波变换的定义	4
1.2.2 小波变换与窗口	5
1.2.3 小波变换与滤波	7
1.2.4 小波变换的性质	7
1.3 离散小波变换	8
1.3.1 二进小波	8
1.3.2 对偶小波	9
1.4 多分辨分析	10
1.4.1 近似和细节	10
1.4.2 多分辨分析的滤波器的描述	11
1.4.3 多分辨分析	12
1.5 要点总结	14
第 2 章 分形简介	15
2.1 度量空间	15
2.1.1 基本概念	15
2.1.2 紧集和豪斯道夫(Hausdorff)空间	16

2.2	分形维数	18
2.2.1	豪斯道夫维数	19
2.2.2	盒维数	20
2.3	压缩映射理论	22
2.3.1	压缩映射定理	23
2.3.2	仿射变换	24
2.4	要点总结	26
第3章	图像压缩的基本概念	27
3.1	图像压缩类型	28
3.1.1	无损编码技术	28
3.1.2	有损编码技术	29
3.2	图 像	31
3.2.1	图像格式	31
3.2.2	灰度图像模型	31
3.2.3	彩色图像	33
3.3	熵与信息	34
3.3.1	信息量	34
3.3.2	香农(Shannon)理论	35
3.3.3	变长最佳编码定理	36
3.4	图像质量的判别标准	36
3.5	要点总结	37
第4章	无失真压缩方法	38
4.1	行程编码	38
4.2	香农-范诺(Shannon-Fano)编码与哈夫曼(Huffman)编码	43

4.2.1 香农-范诺编码	43
4.2.2 哈夫曼编码	45
4.3 算术编码	47
4.3.1 编码过程	47
4.3.2 解码过程	50
4.3.3 自适应算术编码	52
4.4 字典编码	54
4.4.1 LZ77 编码	55
4.4.2 LZW 编码	56
4.5 要点总结	60
第 5 章 有损编码	61
5.1 量化编码	61
5.1.1 量化	61
5.1.2 矢量量化	63
5.2 预测编码	66
5.3 离散傅立叶变换	68
5.3.1 一维离散傅立叶变换	68
5.3.2 快速傅立叶变换 FFT	69
5.3.3 二维离散傅立叶变换	70
5.4 离散沃尔什-哈达玛(Walsh-Hadamard)变换	71
5.4.1 离散沃尔什(Walsh)变换	71
5.4.2 离散哈达玛(Hadamard)变换	74
5.4.3 快速沃尔什-哈达玛变换	76
5.5 离散卡胡南-洛夫(Karhunen-Lovev)变换与奇异值 分解(SVD)变换	77
5.5.1 K-L 变换	77
5.5.2 奇异值分解变换	81

5.6 离散余弦变换(DCT).....	83
5.6.1 一维离散余弦变换.....	83
5.6.2 二维离散余弦变换.....	83
5.7 要点总结.....	84
第6章 迭代函数系	85
6.1 引言.....	85
6.2 迭代函数系.....	86
6.2.1 图像压缩映射定理.....	86
6.2.2 拼贴定理.....	88
6.2.3 IFS 的实现	89
6.3 绘制 IFS 吸引子的两种算法	90
6.3.1 确定性算法.....	91
6.3.2 随机迭代算法.....	95
6.4 要点总结.....	96
第7章 灰度图像的分形编码	97
7.1 分块迭代函数系.....	97
7.1.1 灰度图像的仿射变换.....	98
7.1.2 灰度图像的压缩映射	100
7.1.3 灰度图像的拼贴定理	101
7.2 分形图像压缩	102
7.2.1 定义域块与值域块	103
7.2.2 压缩映射的确定	103
7.2.3 分形编码过程	105
7.2.4 解码过程	105
7.3 分形编码符号描述	106

7.3.1	分形编码	106
7.3.2	分形解码	108
7.3.3	误差分析	109
7.4	要点总结	111
第 8 章	小波图像压缩	112
8.1	子带编码	112
8.2	一维信号的小波分解与重构	114
8.2.1	小波的分解	115
8.2.2	小波的重构	119
8.3	二维图像小波变换	121
8.4	小波图像压缩	124
8.5	要点总结	127
第 9 章	分形图像压缩与数字水印	128
9.1	基于 IFS 的抗几何形变的数字水印算法	128
9.1.1	水印信息转化	129
9.1.2	自相似水印分形图的嵌入	131
9.1.3	自相似水印分形图的提取	134
9.1.4	彩色图像中的水印算法	136
9.1.5	实验结果与分析	139
9.2	基于分形图像编码原理的私有数字水印算法	148
9.2.1	水印嵌入原理	148
9.2.2	自相似块的选择	149
9.2.3	水印嵌入	151
9.2.4	水印检测	152
9.2.5	实验结果与分析	153

9.3 基于分形图像编码原理的公有数字水印算法	154
9.3.1 水印嵌入	154
9.3.2 水印检测	155
9.3.3 实验结果与分析	156
附 录.....	160
参考文献.....	192

第 1 章 小波分析理论

小波分析和小波变换(Wavelet Transform)是近二十年来迅速发展起来的新兴科学,它同时具有理论和应用的意义。小波分析类似傅立叶(Fourier)分析,傅立叶分析将信号分解成不同频率的正弦波,而小波分析则将信号分解成为原函数不同的位移和尺度的小波,小波分析的主要优点是提供局部信息的分析和细化的能力。

1.1 傅立叶分析与短时傅立叶分析

1.1.1 傅立叶变换

设 $L(D)$ 是定义在 D 上一切连续函数的全体,函数 $f(t)$, $g(t) \in L(D)$ 的内积定义为

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_D f(t) \overline{g(t)} dt$$

其中 $\overline{g(t)}$ 表示函数 $g(t)$ 的共轭函数。称函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是正交的如果它们满足下式

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0$$

傅立叶分析是一种将基于时间的信号变换为基于频率的信号的数学方法,设 $f(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的函数,用 $L^2(0, 2\pi)$ 表示为 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期并且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积函数的全体。 $f(t)$ 的一维傅立叶变换由下式定义

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dt \quad (1.1)$$

其中 $i^2 = -1$ 。当 $f(x)$ 是模拟信号时,它的定义域在实直线上,

称之为时域, 其傅立叶变换 $F(s)$ 的定义域也是实数域, 称之为频域。傅立叶变换是一个线性积分变换, $F(s)$ 的傅立叶逆变换定义为

$$\mathcal{F}^{-1}(F(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi st} ds \quad (1.2)$$

根据傅立叶积分定理可知, 这两个变换是互逆的, 也就是说

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dt \right] e^{i2\pi st} ds$$

傅立叶分析能够较好地刻画信号的频率特性, 但是不能提供信号在时频上的任何局部信息。利用傅立叶变换研究模拟信号的频域特性时, 必须获得该信号在时域中的全部信息。给定一个信号 $f(t)$, 在很多情况下令人最感兴趣的是信号局部范围内的特性, 然而通过傅立叶变换, 信号的时域信息丢失了, 这样很难知道事件发生的确切时间。因此, 传统的傅立叶变换面临时域和频域局部化的基本矛盾。为了解决这一矛盾, D.Gabor 引入了窗口函数, 提出了短时傅立叶变换(STFT)的概念。

1.1.2 短时傅立叶变换

为了提取信号的傅立叶变换的局部信息, 在变换中增加了一个用于时间局部化的窗口函数。如果函数 $w(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 并且 $tw(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 则称函数 $w(t)$ 为一个窗口函数。窗口函数 $w(t)$ 的中心 t^* 和半径 Δ_w 分别定义为

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{1}{\|w(t)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |w(t)|^2 dt \\ \Delta_w &= \frac{1}{\|w(t)\|} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t^*)^2 |w(t)|^2 dt \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

此处 $\|\cdot\|$ 表示 L^2 -范数。短时傅立叶变换又称为窗口傅立叶变换, 信号 $f(t)$ 的短时傅立叶变换定义为

$$\mathcal{W}_f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) \overline{w(t-b)} dt \quad (1.4)$$

其中 $w(t)$ 是窗口函数, 参数 b 用于平移窗口以便覆盖整个时域。式(1.4)有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \mathcal{W}_f(\omega, b) w(t-b) d\omega db \quad (1.5)$$

如果 $w(t)$ 为高斯(Gauss)型函数, 式(1.4)又称为 Gabor 变换。

如果设 $W_{\omega, b}(t) = e^{i\omega t} w(t-b)$, 则有

$$\mathcal{W}_f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{W_{\omega, b}(t)} dt \quad (1.6)$$

所以 $\mathcal{W}_f(\omega, b)$ 给出了 $f(t)$ 在时间窗口 $[t^* + b - \Delta_w, t^* + b + \Delta_w]$ 的局部信息。

假设是 $\hat{w}(\omega)$ 是 $w(t)$ 的傅立叶变换(下文中如果函数名上符号“ $\wedge$ ”, 则表示该函数的傅立叶变换), 并且满足 $\omega \hat{w}(\omega) \in L^2(\mathbf{R})$, 根据式(1.3)确定窗口函数 $\hat{w}(\omega)$ 的中心 ω^* 和半径 $\Delta_w^\wedge$, 定义函数 $V_{\omega, b}$ 为

$$V_{\omega, b}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{W}_{\omega, b}(\omega)$$

函数 $V_{\omega, b}(\omega)$ 是一个中心为 $\omega^* + \omega$ 和半径为 $\Delta_w^\wedge$ 的窗口函数。利用 Parseval 恒等式, 有

$$\mathcal{W}_f(\omega, b) = \langle f(t), W_{\omega, b}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), V_{\omega, b}(\omega) \rangle \quad (1.7)$$

因此 $V_{\omega, b}(\omega)$ 还给出了 $\hat{f}(\omega)$ 在频率窗口 $[\omega^* + \omega - \Delta_w^\wedge, \omega^* + \omega + \Delta_w^\wedge]$ 中的局部信息。所以式(1.4)有一个时间-频率窗

$$[t^* + b - \Delta_w, t^* + b + \Delta_w] \times [\omega^* + \omega - \Delta_w^\wedge, \omega^* + \omega + \Delta_w^\wedge] \quad (1.8)$$

它具有宽度 $2\Delta_w$ 和不变的窗口面积 $4\Delta_w \Delta_w^\wedge$ 。另外, 时间-频率窗的宽度对于高频和低频局部化信号保持不变。为了精确的时间-频率局部化, 选择的窗口函数 $w(t)$ 应该使得时间-频率窗具有充分小的面积 $4\Delta_w \Delta_w^\wedge$ 。然而, 由测不准原理可知, 窗口面积不可能任

意小。

测不准原理:如果 $w(t)$ 是一个窗口函数, 则有

$$\Delta_w \Delta_w \geq \frac{1}{2}$$

而且, 等号成立当且仅当

$$w(t) = ce^{iat} g_a(t-b)$$

其中 $c \neq 0$, $a > 0$ 和 $a, b \in \mathbb{R}$, $g_a(\cdot)$ 是高斯型函数。

短时傅立叶变换能够提供信号的一些局部化信息, 但是所获取的信息的精度有限, 精度由窗口的大小确定。一旦选定了特定大小的时间窗口, 对于所有频率来说窗口的大小是一样的, 因此短时傅立叶变换是一种恒分辨率分析。

1.2 连续小波分析

短时傅立叶变换时频窗与信号频率无关, 而对许多信号进行分析时, 要求窗口的大小可以根据时间或者频率精确地确定。小波分析是一个窗口大小可变的分析工具, 在高频时, 选一个窄时间窗提高时间分辨率, 而在低频时选取一个宽的时间窗来更充分地分析信号的低频特性。

1.2.1 小波变换的定义

令 $L^2(\mathbb{R})$ 表示实数轴上可测函数组成的平方可积空间, 函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的傅立叶变换为

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$$

当 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足完全重构条件(或者恒分辨率条件)

$$C_{\hat{\psi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1.9)$$

时, 称函数 $\psi(t)$ 为一个基本小波或母小波。由于 ω 在积分的分母

上, 因此必须有

$$\hat{\psi}(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

将母小波 $\psi(t)$ 经过伸缩和平移后得

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a > 0, b \in \mathbf{R}) \quad (1.10)$$

称其为一个 $\psi_{a,b}(t)$ 小波序列, 每个 $\psi_{a,b}(t)$ 称为一个小波基函数。其中变量 a 反映了一个特定基函数的尺度(伸缩情况), 变量 b 指明了它沿 x 轴的平移位置。

对于任意的函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的连续小波变换定义为

$$W_f(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (1.11)$$

其重构公式(逆变换)为

$$f(t) = \frac{1}{C_{\hat{\psi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (1.12)$$

等式(1.11)右边前面的尺度因子 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 保证了小波基函数的范数全都相等, 因为

$$\left\| f\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\| = \sqrt{a} \|f(x)\|$$

1.2.2 小波变换与窗口

基本小波 $\psi(t)$ 生成的小波 $\psi_{a,b}(t)$ 在小波变换中对被分析的信号起着观测窗的作用。假设窗口函数 $\psi(t)$ 的中心为 t^* , 半径为 Δ_{ψ} , 则 $\psi_{a,b}(t)$ 也是一个窗口函数, 其中心等于 $b + at^*$, 半径等于 $a\Delta_{\psi}$ 。因此等式(1.11)所表示的连续小波变换给出了信号 $f(t)$ 在时间窗口 $[b + at^* - a\Delta_{\psi}, b + at^* + a\Delta_{\psi}]$ 的局部信息。另一方面, 利用 Parseval 恒等式, 有

$$W_f(a, b) = \langle f(t), \psi_{a, b}(t) \rangle = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ib\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega \quad (1.13)$$

所以, 假设 $\hat{\psi}(\omega)$ 的中心为 ω^* 以及半径为 $\Delta\omega$, 则 $W_f(a, b)$ 给出了信号 $f(t)$ 在频率窗 $\left[\frac{1}{a}(\omega^* - \Delta\omega), \frac{1}{a}(\omega^* + \Delta\omega)\right]$ 的局部信息。因此连续小波变换的时频窗口为

$$[b + at^* - a\Delta\psi, b + at^* + a\Delta\psi] \times \left[\frac{1}{a}(\omega^* - \Delta\omega), \frac{1}{a}(\omega^* + \Delta\omega)\right] \quad (1.14)$$

从式(1.14)可知, 当 a 较小时, 时间窗宽度较小, 而在频率上相当于用较高频率作细节分析; 当 a 较大时, 时间窗宽度较大, 时间轴上考察范围大, 而在频率上相当于用低频作轮廓分析。小波变换与时域分析、频域分析、短时傅立叶变换的区别见图 1.1。

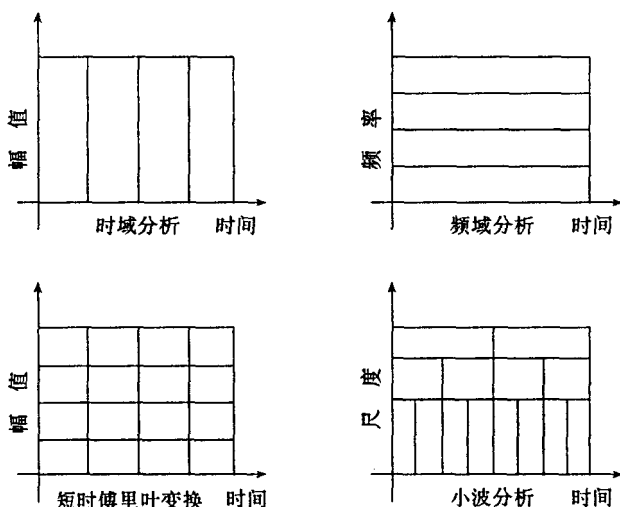


图 1.1 几种分析方法的对照