科學圖書大庫

工 程 力 學

(靜力學與動力學)

譯者 楊 廉

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

工　程　力　學

（靜力學與動力學）

譯者　楊　廉

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鏗　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十五年二月二十八日再版

工　程　力　學

（靜力學與動力學）

基本定價　4.40

譯者　楊　廉　台北市立工業專科學校教授

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 781368 781525 號

發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者　大原彩色印製企業有限公司地址：台北市興寧街24號　電話：3611986. 3813998

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與硏究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

原　序

本書純爲輔助標準教科書而編著，其目的在協助從事工程科學研究者對力學之分析及應用得一完整而透徹之知識與能力。本人深信欲對一些基本之理論能予以瞭解且能牢記於心，其法不外乎多演算問題。雖然本書不能對諸教本之精華均羅集之，但本人認爲本書用之於輔助教本甚具價値。

本書前版甚得讀者之喜愛。今，第二版諸章中有許多均經修訂以與目前最新之觀念、方法及技術配合。作者本人爲適合於大二學生程度而採用最新之數學以用之於力學之分析。是以，於所修訂之諸章中增補以「向量之分析法」以使理論及問題簡化。此外，吾人仍保留「無向量之分析法」，此乃因其對大部份問題之分析仍甚實用；第一章將對本書所需應用之向量之定義及演算作簡單之介紹；至於如何應用則於本書各章中分別介紹之。

各章所列之題目可謂包羅力學課程之材料。各章一開始均對其定義、原則及理論作一適切之敍述。接着則係一些由淺而深之例題及習題。例題中諸題係提供一些實際之問題，依理論所述者舉例說明其分析之方法，以期學者能對基本之理論得一確切之認識與瞭解。理論所述之證明及公式之演導均含於例題中。習題則係對各章所述者做一完整之複習。

本書第一版承 Paul B. Eaton 教授及 J. Warren Gillon 先生之協助與鼓勵，第二版更蒙 Charles L. Best 教授及 John W. McNabb 先生之建議及指教，在此深致謝意。在此尤感謝 Schaum 出版公司全體職員 Henry Hayden 及 Nicola Miracapillo 賜予本人具體而寶貴之建議及給予本人充分之合作。於此亦對 Patricia Henthorn 先生之協助整理草稿致謝。

W.G. McLean

E.W. Nelson

目　錄

第一章　向　量

定義

無向量僅具大小，如時間、質量、能量、密度、功等。無向量可以一般之代數加法運算之，如2秒＋7秒＝9秒。

向量需具大小及方向，如力、位移、速度、衝量等。一向量一般以一箭頭表之，箭頭所指者表方向，其長度表大小。向量之符號以其上加一箭頭表之，如$\vec{\mathbf{P}}$，其大小則以$|\vec{\mathbf{P}}|$或P表之。

一自由向量可在空間上移至任一位置，如其大小及方向不變，則爲同一向量。

一滑動向量可在其作用線上移動至任一位置。由力之可移性定律，滑動向量之外效應不變。

一限定或固定向量必需固定於作用點。

一單位向量係指一單位長度之向量。

一向量$\vec{\mathbf{P}}$之負値爲$(-\vec{\mathbf{P}})$向量，其大小與$\vec{\mathbf{P}}$相同但方向則相反。

一向量系之合向量係指代替已知向量系之最少數量之向量。

兩向量相加

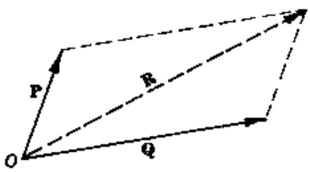
(*a*)平行四邊形定律：$\vec{\mathbf{P}}$和$\vec{\mathbf{Q}}$之向量和$\vec{\mathbf{R}}$爲平行四邊形之對角線，$\vec{\mathbf{P}}$與$\vec{\mathbf{Q}}$爲此平行四邊形之鄰邊，此$\vec{\mathbf{P}}$、$\vec{\mathbf{Q}}$、$\vec{\mathbf{R}}$三向量如第**1-1**圖所示。

(*b*)三角形定律：將一向量之尾端置於另一向量之矢端，頭尾相接，從一向量之尾端至另一向量之矢端劃一連線，此即兩向量之合向量，三角形定律係由平行四邊形定律而來此乃因平行四邊形之相對邊是自由向量，如第**1-2**圖所示。

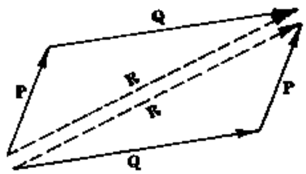
(*c*)向量加法可自由互換，如$\vec{\mathbf{P}}+\vec{\mathbf{Q}}=\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{P}}$

向量減法係加一負向量，如

$$\vec{P}-\vec{Q}=\vec{P}+(-\vec{Q})$$
$$-(\vec{P}+\vec{Q})=-\vec{P}-\vec{Q}$$



第 1-1 圖



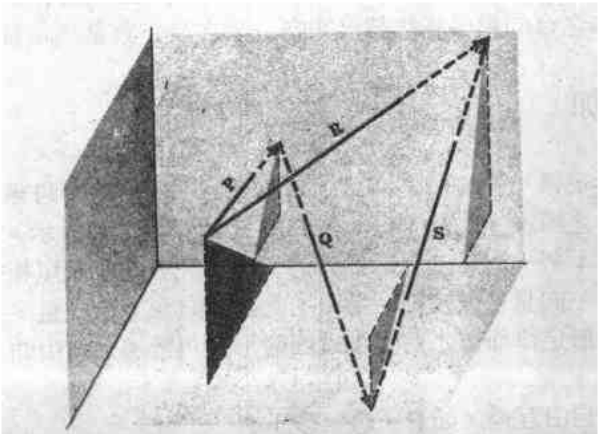
第 1-2 圖

零向量

當一向量減去其本身則得零向量，如$\vec{P}-\vec{P}=0$，此亦稱爲空向量。

向量之合成

向量之合成係求一向量系之合向量之過程，作向量多邊形係將各向量之尾端置於前一向量之矢端，從第一向量之尾端至最後一向量之矢端畫一連線卽爲所求之合向量，如第 1-3 圖所示。求合向量時，各向量之先後可不依次序，其所求之合向量不變。今以$\vec{P}$，$\vec{Q}$，$\vec{S}$三向量爲例。



第 1-3 圖

$$\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{S}=(\vec{P}+\vec{Q})+\vec{S}$$
$$=\vec{P}+(\vec{Q}+\vec{S})=(\vec{P}+\vec{S})+\vec{Q}$$

上列方程式可引用至任何數目之向量。

向量與無向量之乘積

(a)．向量$\vec{P}$與無向量m之乘積為向量$m\vec{P}$，其大小為向量$\vec{P}$之$|m|$倍，其與$\vec{P}$同方向或反方向則視m值之正負而定。

(b)．其他與無向量m及n之運算為

$$(m+n)\vec{P}=m\vec{P}+n\vec{P}$$
$$m(\vec{P}+\vec{Q})=m\vec{P}+m\vec{Q}$$
$$m(n\vec{P})=n(m\vec{P})=(mn\vec{P})$$

三互相垂直之單位向量坐標

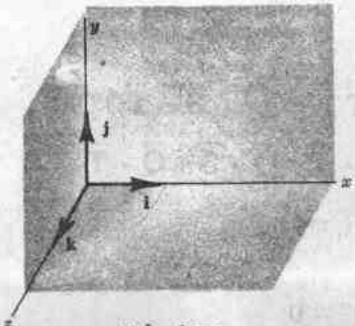
$\vec{i}$、$\vec{j}$及$\vec{k}$係沿x，y及z軸之三互相垂直之單位向量，以右手坐標系表之如第1-4圖所示。

向量$\vec{P}$可寫之為

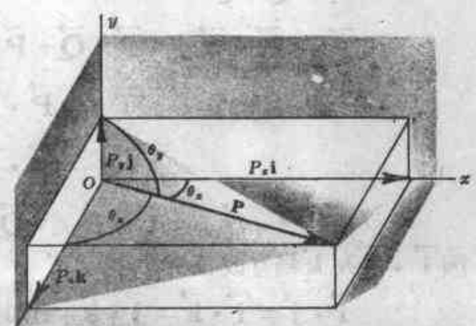
$$\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}$$

式中；$P_x\vec{i}$、$P_y\vec{j}$及$P_z\vec{k}$係$\vec{P}$向量沿x，y及z軸之分向量，如第1-5圖所示。

$$P_x=P\cos\theta_x \qquad P_y=P\cos\theta_y \qquad P_z=P\cos\theta_z$$



第1-4圖

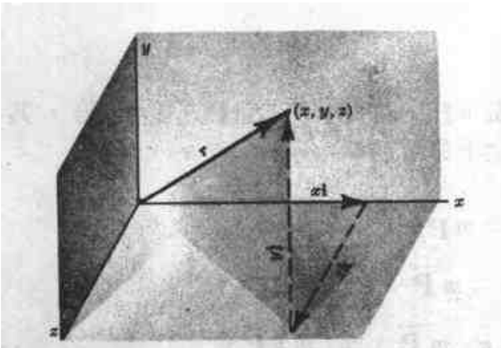


第1-5圖

位置向量在空間一點（x,y,z）之位置向量$\vec{\mathbf{r}}$可寫之爲

$$\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$$

式中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；如第1-6圖所示。



第1-6圖

第1-7圖

常量積

$\vec{\mathbf{P}}$、$\vec{\mathbf{Q}}$兩向量之常量積可寫之爲$\vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}$，此積係一無向量，其值爲兩向量之大小及此兩向量之夾角θ之餘弦函數之乘積。（第1-7圖），即

$$\vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{Q}} = PQ\cos\theta$$

下列爲常量積之運算法則，式中m爲無向量。

$$\vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{P}}$$

$$\vec{\mathbf{P}}\cdot(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{S}}) = \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$$

$$\begin{aligned}(\vec{\mathbf{P}}+\vec{\mathbf{Q}})(\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{T}}) &= \vec{\mathbf{P}}\cdot(\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{T}})+\vec{\mathbf{Q}}\cdot(\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{T}})\\ &= \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{T}}+\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{T}}\end{aligned}$$

$$m(\vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}) = (m\vec{\mathbf{P}})\cdot\vec{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{P}}\cdot(m\vec{\mathbf{Q}})$$

因$\vec{\mathbf{i}}$・$\vec{\mathbf{j}}$及$\vec{\mathbf{k}}$爲互成正交，故

$$\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{j}}\cdot\vec{\mathbf{k}} = (1)(1)\cos 90° = 0$$

$$\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}\cdot\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{k}} = (1)(1)\cos 0° = 1$$

又，如$\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}$

$$\vec{Q}=Q_x\vec{i}+Q_y\vec{j}+Q_z\vec{k} \qquad \text{則}$$

$$\vec{P}\cdot\vec{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$$

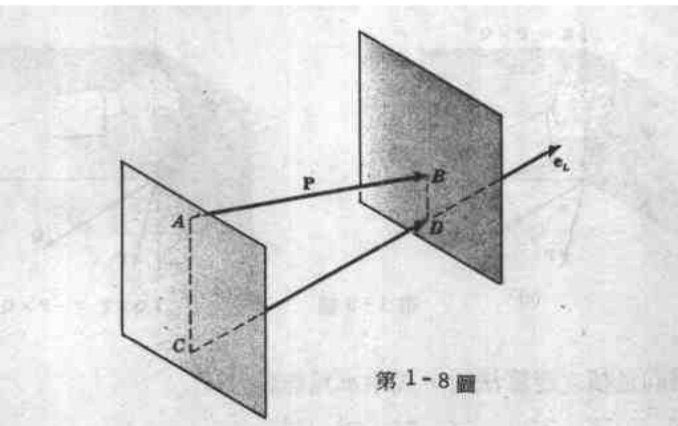
$$\vec{P}\cdot\vec{P}=P^2=P_x^2=P_x^2+P_y^2+P_z^2$$

向量$\vec{P}$沿垂直坐標軸之分向量可寫之爲

$$P_x=\vec{P}\cdot i\,,\qquad P_y=\vec{P}\cdot\vec{j}\,,\qquad P_z=\vec{P}\cdot\vec{k}$$

例如：$\vec{P}\cdot\vec{i}=(P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k})\cdot i$
$=P_x+0+0=P_x$

同理，$\vec{P}$沿任意線L之向量分向量可寫之爲$\vec{P}\cdot\vec{e_L}$，其中，$\vec{e_L}$爲沿L線之單位向量（有些作者用$\vec{u}$表單位向量）。如第1-8圖所示，一平面經過向量$\vec{P}$之尾端A，另一平面經過向量$\vec{P}$之矢端B，兩平面均垂直於L，兩平面與L交C及D點，向量$\overrightarrow{CD}$向量$\vec{P}$沿L線之分向量，其大小爲$\vec{P}\cdot\vec{e_L}$。



第1-8圖

例題：求一線L從原點（2，3，0）經過點（−2，4，6）之單位向量$\vec{e_L}$，繼求$\vec{P}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$在$L$線上之投影。

L線在x坐標由＋2變爲−2，改變量爲−4，在y坐標之變化爲4−3＝＋1，在z坐標之變化爲6−0＝＋6，單位向量爲

$$\vec{e_L}=\frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(+6)^2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{53}}\vec{j}+\frac{6}{\sqrt{53}}\vec{k}$$

$$= -0.549\vec{\mathbf{i}} + 0.137\vec{\mathbf{j}} + 0.823\vec{\mathbf{k}}$$

$\vec{\mathbf{P}}$在L線上之投影爲

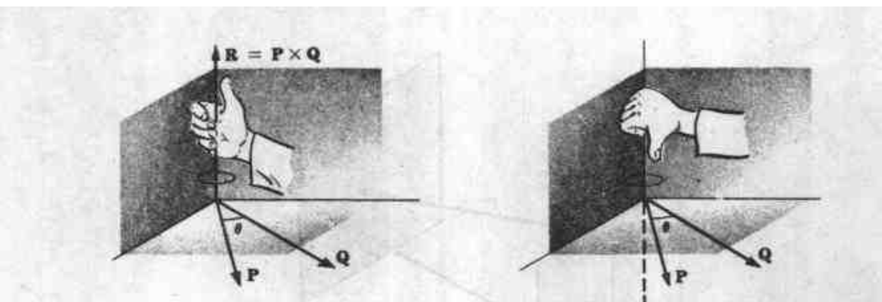
$$\vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_L = 2(-0.549)+3(0.137)-1(0.823)$$
$$= -1.41$$

向量積

$\vec{\mathbf{P}}$、$\vec{\mathbf{Q}}$兩向量之向量積寫之爲$\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}$，其積係一向量，以$\vec{\mathbf{R}}$表之，其大小爲$\vec{\mathbf{P}}$、$\vec{\mathbf{Q}}$兩向量之大小兩向量夾角之正弦函數之乘積，向量$\vec{\mathbf{R}}=\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}$係與$\vec{\mathbf{P}}$和$\vec{\mathbf{Q}}$之平面垂直，用右手定則，所指之方向因從$\vec{\mathbf{P}}$向$\vec{\mathbf{Q}}$轉，以右手螺旋前進，經$\vec{\mathbf{P}}$與$\vec{\mathbf{Q}}$之較小夾角$\theta$，因此，如$\vec{\mathbf{e}}$爲單位向量，賦予$\vec{\mathbf{R}}=\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}$之方向，則向量積可寫之爲

$$\vec{\mathbf{R}}=\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}=(PQ\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}, \qquad 0\leq\theta\leq180^\circ$$

由第1-9圖可知，$\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}=-\vec{\mathbf{Q}}\times\vec{\mathbf{P}}$（即不能互換）



第1-9圖

下列爲向量積之運算法則，式中m爲無向量。

$$\vec{\mathbf{P}}\times(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{S}})=\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{S}}$$

$$(\vec{\mathbf{P}}+\vec{\mathbf{Q}})\times(\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{T}})=\vec{\mathbf{P}}\times(\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{T}})+\vec{\mathbf{Q}}\times(\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{T}})$$
$$=\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{T}}+\vec{\mathbf{Q}}\times\vec{\mathbf{S}}+\vec{\mathbf{Q}}\times\vec{\mathbf{T}}$$

$$m(\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}})=(m\vec{\mathbf{P}})\times\vec{\mathbf{Q}}=\vec{\mathbf{P}}\times(m\vec{\mathbf{Q}})$$

因，$\vec{\mathbf{i}}$、$\vec{\mathbf{j}}$及$\vec{\mathbf{k}}$爲互相垂直，故

$$\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{k}}=0$$

$$\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}},\qquad \vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{i}},\qquad \vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{j}}$$

又，如 $\vec{\mathbf{P}}=\mathbf{P}_x\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{P}_y\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{P}_z\vec{\mathbf{k}}$

$$\vec{\mathbf{Q}}=\mathbf{Q}_x\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{Q}_y\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{Q}_z\vec{\mathbf{k}}$$

則 $\vec{\mathbf{P}}\times\vec{\mathbf{Q}}=(\mathbf{P}_y\cdot\mathbf{Q}_z-\mathbf{P}_z\mathbf{Q}_y)\vec{\mathbf{i}}+(\mathbf{P}_z\mathbf{Q}_x-\mathbf{P}_x\mathbf{Q}_z)\vec{\mathbf{j}}$

$$+(\mathbf{P}_x\mathbf{Q}_y-\mathbf{P}_y\mathbf{Q}_x)\vec{\mathbf{k}}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \mathbf{P}_x & \mathbf{P}_y & \mathbf{P}_z\\ \mathbf{Q}_x & \mathbf{Q}_y & \mathbf{Q}_z\end{vmatrix}$$

證明見第 12 題。

向量微積分

(a). 向量 $\vec{\mathbf{P}}$ 之微分係爲無向量，隨時間 t 之變化而變。如令 $\vec{\mathbf{P}}=\vec{\mathbf{P}}(t)$，即 $\vec{\mathbf{P}}$ 是時間 t 之函數，時間從 t 變到 $(t+\Delta t)$，向量 $\vec{\mathbf{P}}$ 之改變量爲 $\Delta\vec{\mathbf{P}}$，則

$$\Delta\vec{\mathbf{P}}=\vec{\mathbf{P}}(t+\Delta t)-\vec{\mathbf{P}}(t)$$

則
$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\cdot\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}(t+\Delta t)-\mathbf{P}(t)}{\Delta t}$$

如，$\vec{\mathbf{P}}(t)=\mathbf{P}_x\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{P}_y\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{P}_z\vec{\mathbf{k}}$，式中，$\mathbf{P}_x$，$\mathbf{P}_y$ 及 $\mathbf{P}_z$ 爲時間 t 之函數，則

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathbf{P}_x+\Delta\mathbf{P}_x)\vec{\mathbf{i}}+(\mathbf{P}_y+\Delta\mathbf{P}_y)\vec{\mathbf{j}}+(\mathbf{P}_z+\Delta\mathbf{P}_z)\vec{\mathbf{k}}-\mathbf{P}_x\vec{\mathbf{i}}-\mathbf{P}_y\vec{\mathbf{j}}-\mathbf{P}_z\vec{\mathbf{k}}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{P}_x\vec{\mathbf{i}}+\Delta\mathbf{P}_y\vec{\mathbf{j}}+\Delta\mathbf{P}_z\vec{\mathbf{k}}}{\Delta t}$$

$$=\frac{d\mathbf{P}_x}{dt}\vec{\mathbf{i}}+\frac{d\mathbf{P}_y}{dt}\vec{\mathbf{j}}+\frac{d\mathbf{P}_z}{dt}\vec{\mathbf{k}}$$

下列之運算亦屬正確