汪志文　黄守德　雷德秀　编著
胡迪鹤审

概率论与数理统计

——复习与题解分析

湖北科学技术出版社

概率论与数理统计

——复习与解题分析

汪志文　黄守德　雷德秀　编著

胡迪鹤　审

湖北科学技术出版社

概率论与数理统计

——复习解题与分析

汪志文 黄守德 雷德秀 编著

胡迪鹤 审

湖北科学技术出版社出版 新华书店湖北发行所发行

武汉工学院印刷厂印刷

787×192毫米32开本 18.5印张 365,000字

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

印数：1—7400

统一书号：7304.10 定价：3.45元

前　言

概率论与数理统计是随着科学技术发展和生产实际需要而发展起来的一门重要学科，在各个数学分支及各生产部门中有着广泛的应用。学习概率论与数理统计是当代大学生及工程、科技人员迫切而重要的任务。由于概率论与数理统计中概念的抽象性，方法的特殊性，计算的复杂性，使初学者甚感“概念难于理解，解题没有把握”。即使学完一遍，仍感迷迷糊糊，缺乏对整体内容全面系统的了解。为了帮助初学者克服上述困难，根据我们在教学实践中碰到的问题，考虑学生的可接受性，我们以浙江大学编的《概率论与数理统计》为蓝本，并在内容上作了适当的调整、补充、加深而编写成本书。

全书共十一章，对各章的重点、难点和应掌握的内容作了全面系统的阐述，并以发人思考的实际例题为背景，深入浅出的论述方式，阐明其概念、定理、公式以及它们的应用。对浙江大学编的《概率论与数理统计》中各章的习题及本书精选的补充习题，都作了详尽的解答。

鉴于前三章内容较多而又是基本，我们是按节阐述其内容和给出例题示解，其余均是按章照此编写的。原书中各章习题及解答，在本书相应的各章中都可以找到。

我们力图给予读者掌握概率论与数理统计的基本理论，训练解题技巧，提高解题能力等方面以一定的帮助。但愿能如愿以偿。

本书初稿完成后，武汉大学胡迪鹤教授审阅了全书，并作了精心修改。在此我们表示衷心的感谢。同时希望读者对书中缺点错误和不足之处给予批评指正。

编者1985年7月

目　录

预备知识

一、排列、组合的定义与公式

内容概述

1．排列

（1）排列的定义：

从m个元素里，每次取出n个元素按照一定的顺序摆成一排，叫做从m个元素里每次取出n个元素的排列。

（2）排列的计算公式：

$$P_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

$$\left(\text{注：}P_m^n=A_m^n\right)$$

若$m=n$，P_m^n记作P_m：

$$P_m=m(m-1)(m-2)\cdots3\cdot2\cdot1=m!$$

这时，排列叫全排列。

2．加法原理：

完成某项工作，有两类不同的方法，甲法与乙法．而甲法有m种方式，乙法有n种方式都可以完成这项工作，则完成该项工作共有$m+n$种方法。

乘法原理：

完成一件事，必须通过两个步骤，第一个步骤有m种方式，第二个步骤有n种方式，则完成该项工作有$m\cdot n$种方式

3．有重复的排列：

在排列中允许元素重复出现的排列叫有重复的排列。

从 m 个元素里，每次取出 n 个元素组成有重复的排列，其计算公式：$U_m^n = m^n$，若 $m = n$，则 $U_m^m = m^m$。

4．不尽相异元素的全排列：

一般地说，如果 n 个元素里有 p 个元素相同，又有 q 个元素相同，还有 r 个元素相同（$p + q + r \leqslant n$），那么它们的排列种数 x 是：$x = \dfrac{n!}{p!q!r!}$。

5．环状的排列：

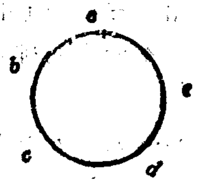


图0—1

m 个元素按一定的次序围成一圈，这种排列叫环状排列。如图0—1，这种排列的计算公式是 $\dfrac{P_m}{m}$。

从 m 个不同的元素里，每次取出 n 个不同的元素的环状排列的种数是：

$$\frac{A_m^n}{n} \text{或} C_m^n \cdot (n-1)!$$

6．组合：

（1）组合的定义：

从 m 个元素里每次取出 n 个元素，不管按怎样的顺序并成一组都叫做从 m 个元素里每次取出 n 个的组合。记为 C_m^n，或 $\binom{m}{n}$。

（2）组合的计算公式：

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{n!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

7．有重复的组合：

从m个元素里每次取出n个元素，元素可以重复选取，不管按怎样的顺序并成一组，都叫做从m个元素里每次取出n个元素的有重复的组合。

计算公式：　$H_m^n=C_{m+n-1}^n$

例题示解

例1　现有五个字母a、b、c、d、e，若

（1）a、b、c、d、e排列一排，

（2）a、a、a、b、b排列一排，

（3）a、a、b、b、c排列一排。

问各有多少种排法？

解　（1）$P_5=120$

（2）$\frac{P_5}{P_3\cdot P_2}=10$

（3）$\frac{P_5}{P_2P_2P_1}=30$

例2　从0、1、2、3、4、5、6、7、8、9共10个数字中取出6个数字组成电话号码，问：

（1）6个数字均不相同的电话号码有多少？

（2）6个数字均可重复的电话号码有多少？

（3）若组成6个数字均不相同的6位数又有多少个？

解 （1）$A_{10}^{6}=151200$

（2）$U_{10}^{6}=10^{6}$

（3）$A_{10}^{6}-A_{9}^{5}=136080$

例3 做实验时，把6种不同溶液注满四个烧杯，不使它们混合，一共有多少种方法？

解 $H_{6}^{4}=C_{6+4-1}^{4}=C_{9}^{4}=126$

例4 有数学、化学、物理三个培训班，6个同学报名，每人限报一个班，一共有多少种报名方法？

解 第一个同学报名的选择方法有3种，同样第二个同学的报名方法也有3种……第六个同学的报名方法也有3种，因而总共报名方法有$U_{3}^{6}=3^{6}$种。

例5 五种不同的半导体收音机和四种不同的电视机排成一排，如果任何两台电视机不靠在一起，有多少种排列方法？

解 五种不同的半导体收音机有$P_{5}=5!$种排法，再把电视机按要求放在收音机两端，或每两个收音机之间，即在6个位置中选取4个位置的选排列，共有A_{6}^{4}种。
由乘法原理共有$P_{5}\cdot A_{6}^{4}=43200$种。

例6 口袋里有两个伍分的钱币，三个贰分的钱币和五个壹分的钱币，从中任取五个，求钱额总数超过一角的取法有多少种？

解 （1）两个伍分都取，再在其余的八个中任取三个，有$C_{2}^{2}\cdot C_{8}^{3}=56$

（2）取一个伍分，三个贰分，一个壹分，

$C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1 = 10$

（3）取一个伍分，两个贰分，两个壹分，

$C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2 = 60$

∴ 总共的取法为$56+10+60=126$（种）。

例7 某城有6条南北向的街，4条东西向的街，如果有人从城的西南走到东北，最短的走法有几种？

解 有x种 $x=\dfrac{10!}{6!4!}=210$（种）。

例8 有5颗不同颜色的珠子，（1）把这5个珠子排成一排，有多少种方法？（2）把这5个珠子圈成一圈，有多少种方法？

解 （1）$5!=120$（种）。

（2）$(5-1)!=4!=24$（种）。

例9 证明$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$

证 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$

两边对x求导

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$

令$x=1$，则

$n2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots\cdots+nC_n^n$。

二、集　合

内容概述

1．集合的概念

（1）具有某种共同性质的一些对象所组成的全体，叫做集合。此种对象称为集合的元素。一般用大写字母 A、B、C…等表示集合，用小写字母 a、b、c…等表示元素。

（2）如果 a 是集合 A 的元素，就说“a 属于 A”，记作 $a \in A$。如果 a 不是集合 A 的元素，就说“a 不属于 A”，记作 $a \overline{\in} A$。

（3）仅含有有限多个元素的集合叫有限集。含有无限多个元素的集合叫无限集。在无限集中，能与自然数建立一一对应关系的集合叫可列集。否则，叫做不可列集。仅含一个元素 a 的集合叫单元素集，记作 $\{a\}$。不含元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$。

（4）一个集合可以通过逐一地列举它的元素来表示，叫表示集合的列举法．如果一个集合的元素不能一一列举，则可以通过描述，由集合 A 中的元素都具有，而集合 A 外的元素都不具有的某个性质来确定。这种方法叫描述法。

2．子集、全集（或空间）

（1）如果集合 A 的每个元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集（或集合 B 包含集合 A），记作 $A \subset B$，或 $B \supset A$。任何一个集合的本身是它自己的子集。

（2）如果集合 $A \supset B$，且 $B \supset A$，则称集合 A 和 B 相等，记作 $A = B$。

（3）如果研究某个问题时，所涉及的有关集合都是某个集合的子集，则称该集合为全集或空间，记作 Ω，U 或 S

（4）如果集合A是空间Ω的子集，把Ω中所有不属于A的元素所组成的集合，叫做A的余集，记作$\overline{A}$。

3．集合的运算

（1）把至少属于集合A与B中一个集合的元素全部集中起来所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A\cup B$。即$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$或$\omega\in B\}$。

由有限个及可列个集合而组成的并集分别记作

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i \text{及} \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i。$$

（2）把既属于A又属于B的元素全部集中起来组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A\cap B$或AB。即

$$AB=\{\omega\mid\omega\in A\text{且}\omega\in B\}。$$

（3）由属于A但不属于B的所有元素组成的集合，叫做A与B的差集，记作$A-B$。即

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A\text{但}\omega\notin B\}。$$

（4）余集$\overline{A}$是全集Ω与集合A的差集。即

$\overline{A}=\Omega-A$，或$\overline{A}\cup A=\Omega$。

（5）对于任何集合A、B、C有

$$A\cap A=A \quad A\cap\varnothing=\varnothing \quad A\cap B=B\cap A$$

$$A\cup A=A \quad A\cup\varnothing=A \quad A\cup B=B\cup A$$

$$A\cup\overline{A}=\Omega \quad A\cap\overline{A}=\varnothing \quad \overline{\overline{A}}=A$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

（6）（*de Morgan*）定理

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}; \quad \overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2};$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}; \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k};$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}; \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}.$$

例题示解

例1　设 $I=\{$绝对值不大于5的整数$\}$，$A=\{0\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{$小于3的非负整数$\}$。求 $A\cap C$，$B\cup C$，$\overline{A\cup B}\cap C$。

解　因为在此问题中所涉及的集合均含于 I，故不妨把 I 考虑为全集（空间）。$\because$　$C=\{0,1,2\}$

$\therefore$　$A\cap C=\{0\}$

$B\cup C=\{0,1,2,3,4,5\}$

$A\cup B=\{0,2,3,4,5\}$

$\because$ $I=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

$\therefore$　$\overline{A\cup B}=\{-5,-4,-3,-2,-1,1\}$

$\overline{A\cup B}\cap C=\{1\}$

例2　设 M 是由8个元素 $\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$ 组成的集合，求集合 M 所有子集的总数。

解　由集合 M 中每次取出 k（$k=0,1,2,\cdots,8$）个元素组成集合 M 的子集，而这样的子集个数为 C_8^k（$k=0,1,2,\cdots,8$），因此集合 M 的子集总数为

$$C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3+\cdots+C_8^8=(1+1)^8$$
$$=256(\text{个})$$

说明：空集$\varnothing$是任何集合的子集，任何一个集合是它本身的子集。在本题中是由C_8^0与C_8^8表示的。

例3 设 $A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$，$B=\{x\mid 4<x\leqslant 8\}$，$C=\{x\mid x\leqslant 0\}$都是全集$R=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$中的集合，试求下列集合：

（1）$A\cup B$ （2） $B\cap\overline{C}$ （3）$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

解 （1）$A\cup B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}\cup\{x\mid 4<x\leqslant 8\}$

$$=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 8\};$$

（2）$B\cap C=\{x\mid 4<x\leqslant 8\}\cap\overline{\{x\mid x\leqslant 0\}}$

$$=\{x\mid 4<x\leqslant 8\}\cap\{x\mid x>0\}$$

$$=\{x\mid 4<x\leqslant 8\};$$

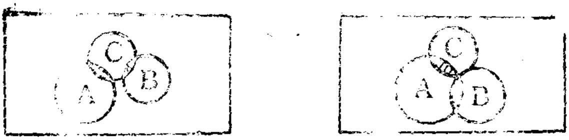
（3） $A\cap B\cap\overline{C}=\overline{\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}}\cap\overline{\{x\mid 4<x\leqslant 8\}}$

$$\cap\overline{\{x\mid x\leqslant 0\}}$$

$$=\{x\mid 0<x<2\}\cup\{x\mid x>8\}.$$

例4 设A、B、C为任意三个集合，从$A\cap C$和$B\cap C$不相交，能否推出A、B一定不相交的结论？作图表示你的答案。

解 如图0—2所示，$A\cap C$和$B\cap C$在图0—2（1°）、（2°）中都不相交。图0—2（1°）中A和B是不相交的，而图0—2（2°）中A和B是相交的，所以不能得出A、B一定不相交的结论。



（1°）　　　　　　　　（2°）

图 0－2

例 5　证明：（1）$\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$，

（2）$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

证（1）设 $x\in\overline{A_1\cap A_2}$，即 $x\overline{\in}A_1\cap A_2$，则必有 $x\overline{\in}A_1$ 或 $x\overline{\in}A_2$，故 $x\in\overline{A_1}$ 或 $x\in\overline{A_2}$，即 $x\in\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$，所以 $\overline{A_1\cap A_2}\subset\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$. 反之，设 $x\in\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$，即 $x\in\overline{A_1}$ 或 $x\in\overline{A_2}$，则必有 $x\overline{\in}A_1$ 或 $x\overline{\in}A_2$，故 $x\overline{\in}A_1\cap A_2$ 则 $x\in\overline{A_1\cap A_2}$ 所以 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\subset\overline{A_1\cap A_2}$.

故 $\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$

（2）设 $x\in\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$，即 $x\overline{\in}A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，这表明 x 不属于 A_1、A_2、…A_n 中的任何一个，也就是 x 不属于 A_1，不属于 A_2，…，也不属于 A_n，即 $x\overline{\in}A_1$，$x\overline{\in}A_2$，…，$x\overline{\in}A_n$，亦即 $x\in\overline{A_1}$，$x\in\overline{A_2}$，… $x\in\overline{A_n}$ 同时成立.

∴　$x\in\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，于是 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ 成立.

反之，设 $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，即同时有 $x \in \overline{A_1}$，$x \in \overline{A_2}$，…，$x \in \overline{A_n}$，从而同时有 $x \overline{\in} A_1$，$x \overline{\in} A_2$，…，$x \overline{\in} A_n$。这意味着 x 不属于 A_1，A_2，…，A_n 中的任何一个，即 $x \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，也就是 $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$；$\therefore \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

因而有 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，原式得证.