

高等學校教學用書

數學分析教程

第二卷 第一分冊

М. К. ГРЕБЕНЧА, С. И. НОВОСЕЛОВ 著
楊從仁 郝壽 李文琦 譯

高等教育出版社

高等学校教学用书

数学分析教程

第二卷 第二分册

M. E. 格列本卡 著
C. II. 諾渥舍諾夫

高等教育出版社

統一書号 13010·350

定价 ¥ 0.90

高等學校教學用書



數學分析教程

第二卷 第一分冊

M. K. 格列本卡 C. II. 羅渥舍諾夫著
楊從仁 郝 壽 李文琦譯

高等教育出版社

高等学校教学用书



数学分析教程

第二卷 第二分册

M. K. 格列本卡 C. H. 諾渥舍諾夫著
楊从仁 郝 寿 李文琦譯

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的格列本卡(М. К. Гребенча)、羅渥舍諾夫(С. И. Новоселов)合著“數學分析教程”卷二(Курс математического анализа Том 2)1953年第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為師範學院數理系教學參考書，本書專供師範學院數理系一年級及二年級兩年一貫制數學分析教材或作高等數學課程的參考。

本書卷二中譯本分二個分冊出版。第一分冊內容為歐幾里得空間的點集合、多變數函數、多變數函數的微分法、隱函數寫像、常數項級數、函數級數等六章。

本冊係由天津師範學院數學系楊從仁、郝壽、李文琦三人合譯。

本書第一卷第一、第二分冊由商務印書館出版，自第二卷第一分冊起由本社出版。

數 學 分 析 教 程

第二卷 第一分冊 書號371(課344)

格列本卡，羅渥舍諾夫著

楊從仁 郝壽 李文琦譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新華書店總經售

京華印書局印刷

北京南新華街甲三七號

開本 850×1168^{1/32} 印張 11^{5/16} 字數 297,000

一九五五年八月北京第一版 印數 1—3,500

一九五五年八月北京第一次印刷 定價 (7) 1.40

本書系根据苏俄教育出版社 (Учпедгиз) 出版的格列本卡 (М. К. Гребенча)、諾渥舍諾夫 (С. И. Новоселов) 合著“数学分析教程”卷二 (Курсматематического анализа том.2) 1953 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为师范学院数理系教学参考書, 本書專供师范学院数理系一年級及二年級兩年数学分析教材或作高等数学課程的参考。

本書共分兩卷, 中譯本各卷分二个分册, 本卷第二分册內容包括有正交函数系, 福里哀級数、数值及圖解法、重积分、曲綫积分、曲面积分、含参数的积分及瑕积分五章和一个关于拓扑空間的附录。

本册系由天津师范学院数学系楊从仁、郝寿、李文琦合譯。

数 学 分 析 教 程

第二卷 第二分册

M. K. 格列本卡 С. И. 諾渥舍諾夫著

楊从仁 郝 寿 李文琦譯

高等教育出版社出版北京琉璃厂 170 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 号)

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·350 開本 850×1168¹/₃₂ 印張 7¹⁴/₁₆ 字數 214,000 印數 0001—4,800
1957 年 10 月第 1 版 1957 年 10 月北京第 1 次印刷 定價 (8) 羊 0,90

序 言

常編寫“數學分析教程”第二卷時，著者們以師範學院的教學大綱為根據並考慮到未來的數學教師的需要。爲了上述原因，我們力求將教程中基本的，原則上甚重要的問題敘述得清楚明晰，但不擬用完備的近代分析教程中的細節使敘述變得繁瑣。本書中一些定理和證明不是以最一般的形式給出的，但著者們總是盡力精確地預先說明在證明過程中所用到的條件。同時著者們也盡力選擇這樣的證明方法，通過這些證明方法，可使一切可能的推廣變得非常明顯，而在最重要的情形，盡量指出來這些推廣的途徑。

在本書中，著者們保持了在本教程第一卷第二版中所採用的敘述風格。著者們深信現今俄文教科書所特有的在敘述上有嚴格的系統性和盡可能簡潔是恰當的。爲了這種原因，著者們力求避免那種以“預備知識的插筆”及“與讀者談話”爲特徵的小說形式的敘述，這種形式的敘述（著者們相信）對於供教學用的教本是完全不適當的。

在本書藍本剛剛結束時，著者之一，米哈依爾·庫茲米奇·格列本卡教授的早亡（1948年6月21日），中斷了我們多年來共同的工作。

藉這個機會我特向以下諸學者致深厚的謝意：恩·阿·列得涅夫，阿·斯·庫班科，蒲·伊·羅曼諾夫斯基，蒲·斯·莫傑諾夫，布·吾·庫圖佐夫，他們對本書曾提出許多寶貴的意見和指示。我懷着深切的感激的心情提起已故的蘇聯科學院通訊院士維·維·斯捷潘諾夫教授，他曾對本書的編著給著者們巨大的協助。我深深感謝恩·阿·梅得亮諾夫斯基，他爲了本書進行了復

雜的製圖工作，以及科·斯·塞礎果娃，她曾對本書的抄稿工作和校對工作給與幫助。

莫斯科，1952年12月25日

斯·羅渥舍諾夫

目 錄

序 言

第一章 歐幾里得空間的點集合	1
§ 1. 緒論	1
§ 2. 歐幾里得平面和歐幾里得空間	2
§ 3. n 維歐幾里得空間	4
§ 4. 最簡單的 n 維空間 E_n 的點集合	7
§ 5. 有界集合和無界集合	10
§ 6. 近傍, 聚點	11
§ 7. 開集合和閉集合, 域	15
§ 8. 閉立方體套縮原理	26
§ 9. 聚點原理	28
第二章 多變數函數	30
§ 10. 點的函數	30
§ 11. 兩變數函數的圖形	38
§ 12. 函數在某一點的極限	44
§ 13. 連續函數	51
§ 14. 在閉域內連續的函數	56
§ 15. 曲面的概念	62
§ 16. 極限函數	68
§ 17. 累次極限	76
§ 18. 一致收斂性	81
§ 19. 一致收斂性的幾何解釋	88
§ 20. 勾摩判別法	96
§ 21. 在積分符號下取極限	98
§ 22. 在導數符號下取極限	103

第三章 多變數函數的微分學	107
§ 23. 偏導數	107
§ 24. 拉格朗日定理	110
§ 25. 可微分函數	114
§ 26. 曲面的切平面	120
§ 27. 複合函數的微分法	124
§ 28. 函數的方向導數	129
§ 29. 關於齊次函數的尤拉定理	131
§ 30. 高次偏導數	133
§ 31. 複合函數的高次導數	138
§ 32. 泰勒公式	141
§ 33. 多變數函數的極值	147
第四章 隱函數·寫像	164
§ 34. 正則寫像	164
§ 35. 隱函數	172
§ 36. 隱函數的可微分性	182
§ 37. 關於隱函數的研究	193
§ 38. 正則寫像的基本性質	196
§ 39. 函數相依性	203
§ 40. 幾何應用	210
§ 41. 曲線坐標	216
§ 42. 多維曲面的概念	225
§ 43. 條件極值	226
第五章 常數項級數	241
§ 44. 級數的概念·收斂的和發散的級數	241
§ 45. 勾摩判別法	248
§ 46. 關於級數的基本定理	250
§ 47. 定號級數	252
§ 48. 定號級數收斂性和發散性的判別法	257
§ 49. 絕對收斂級數和條件收斂級數	266

§ 50. 利用級數計算時所生誤差的估計	273
§ 51. 關於級數的項重新排列的定理	275
§ 52. 施於級數的運算	280
§ 53. 關於絕對收斂級數集項的定理 二重級數	284
第六章 函數級數	290
§ 54. 函數級數的概念	290
§ 55. 一致收斂級數及其性質	292
§ 56. 函數級數的逐項微分與逐項積分	300
§ 57. 冪級數	304
§ 58. 冪級數的一致收斂性	310
§ 59. 施於冪級數的運算	312
§ 60. 冪級數的逐項微分與逐項積分	313
§ 61. 泰勒級數	317
§ 62. 唯一性定理 函數展成冪級數的方法	322
§ 63. 解析函數的概念	329
§ 64. 複變數解析函數的概念	332
§ 65. 指數函數和三角函數的解析定義	334
§ 66. 函數的級數表示法 函數值的近似計算	340

目 录

第七章 正交系 福里哀級数	347
§ 67. 正交函数系	347
§ 68. 福里哀級数	351
§ 69. 平均收敛, 封閉的就范正交系	355
§ 70. 三角函数系	360
§ 71. 福里哀級数部分和的积分表示	364
§ 72. 福里哀級数的收敛性	366
§ 73. 函数的三角級数展开	370
§ 74. 福里哀級数的一致收敛性	379
§ 75. 三角函数系的封閉性	381
§ 76. 福里哀級数的应用	388
第八章 解析学的数值計算法和圖解法	393
§ 77. 点的內插法·拉格朗日公式	393
§ 78. 各阶差分及阶乘多項式	397
§ 79. 牛頓插值公式	402
§ 80. 內插法的剩余项	405
§ 81. 圖解法	409
第九章 重积分	416
§ 82. 可求面积的圖形	416
§ 83. 可求面积的圖形的一些性質	421
§ 84. 正则分割	425
§ 85. 可求体积的圖形的概念	428
§ 86. 最簡單的可求面积的圖形	429
§ 87. 积分和	431
§ 88. 重积分	433
§ 89. 二重积分的几何解釋	436
§ 90. 关于可积分函数的一些定理	439
§ 91. 展布在矩形上的累次积分	442
§ 92. 利用累次积分来計算重积分	450
§ 93. 置換积分法	462
§ 94. 积分变換为極坐标、柱坐标及球坐标的公式。例。	475
§ 95. 曲面的面积	485

§ 96. 曲面的面积的一些基本性质	492
§ 97. 重积分在力学上的应用	496
第十章 綫积分 面积分	499
§ 98. 有向曲线	499
§ 99. 綫积分	501
§ 100. 用沿折綫的积分作逼近	509
§ 101. 格林公式	511
§ 102. 綫积分与积分路綫無关的条件	519
§ 103. 可积分条件, 依函数的微分求原函数	524
§ 104. 綫积分的力学解釋	531
§ 105. 有向域上的二重积分	532
§ 106. 有向曲面	534
§ 107. 曲面积分	538
§ 108. 奧斯提諾格那得斯基公式	542
§ 109. 斯托克公式	543
§ 110. 曲面积分的应用的概念	545
第十一章 含参数的积分·瑕积分	547
§ 111. 定积分看做参数的函数	547
§ 112. 关于瑕积分的基本定理	556
§ 113. 含参数的瑕积分	567
§ 114. 瑕积分的計算例	575
§ 115. 瑕重积分的概念	579
附录	588
§ 116. 拓扑空間的概念	588
§ 117. 距离空間的概念	591

第一章 歐幾里得空間的點集合

§ 1. 緒論

在一系列理論性的以及實用性的問題裏常常碰到一些量，這些量的數值，在給出了其他幾個量的數值後，就可決定。例如：

- 1) 作等速運動的物體所通過的路程

$$s = v \cdot t$$

是由物體運動的速度 v 和所經過的時間 t 來確定的。

- 2) 動能

$$w = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

是由運動的物體的質量和速度來確定的。

- 3) 長方體的體積

$$V = a \cdot b \cdot c$$

是由它的各邊長度 a , b 和 c 來確定的。

從物理學、工程技術學、力學和數學裏可以隨意地找到許多相類似的例子。所有這些例子可以用一個共同的原理來概括：確定某些量的一組實數，對應於一個實數，此實數確定所考查的量的數值。這就表明，有必要把函數的概念擴充到確定函數值的變數是一組實數的情形。

§ 2. 歐幾里得平面和歐幾里得空間

試討論按一定次序給出的實數對 (a, b) 。如我們知道,任意一個實數對可以使之對應於坐標平面上以 a 為橫坐標,以 b 為縱坐標的一點;反之,對於平面上的每一點,都有一對實數,即此點的橫坐標和縱坐標,與之對應。這就給了我們應用幾何學術語的可能性,也就是說:對於有序的數對 (a, b) 和表示它的點可採用公共的術語——“平面的點”。

對於平面上的每兩個點(即,兩個數對) $A_1(a_1, b_1)$ 和 $A_2(a_2, b_2)$ 可以令實數

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} \quad (\rho)$$

與之對應,這個實數叫做兩點間的距離。若代表已知數對的平面點,是某線段的兩端點,則其長度就用上述實數來計量。設有點(即數對) (x, y) 的集合,其中兩點間的距離按照公式 (ρ) 來確定,則所有這些點的集合就叫做二維歐幾里得(算術)空間。用幾何的解釋,對於二維算術空間有坐標平面上所有點的集合與之對應。

每一個以實數對作元素的集合可以藉坐標平面上對應點的集合來作幾何的表示;反之,對於坐標平面上的點集合有實數對的集合與之對應。因此,對於兩個對應的集合經常採用同一個公共的幾何術語。例如,對於滿足方程式

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

的數對 $X(x, y)$ 的集合和對於對應的幾何的像可以採用公共的術語“圓周”來代表。同樣,滿足不等式

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

的數對 (x, y) 的集合叫做圓面。滿足不等式

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

的數對的集合叫做矩形。

此外，所謂點 $A(a, b)$ 的 r -近傍是指滿足不等式

$$\rho(X, A) < r \text{ 或 } (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

的所有的點 $X(x, y)$ 的集合。

在幾何學上， r -近傍可用位於以 A 為中心， r 為半徑的圓內的點的集合來代表。從圓的幾何性質，就可以得出下述的事實：平面上的近傍也具有近傍的三個基本性質（卷 I § 15）。近傍的基本性質的正確性可以不用幾何的解釋而僅由算術方法來確定（參考 § 3）。

如我們知道，實數組 (a, b, c) 和坐標空間中的點之間能建立一一對應的關係，由這樣的對應關係，對於有確定次序的實數組 (a, b, c) ，有空間中以 a 為橫坐標，以 b 為縱坐標，以 c 為直坐標的一點與之對應。設有某實數組 (a, b, c) 的集合，其中兩點 $A_1(a_1, b_1, c_1)$ 和 $A_2(a_2, b_2, c_2)$ 間的距離由公式

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

來確定，則這集合就叫做三維歐幾里得（算術）空間。

歐幾里得算術空間的點集合和幾何空間的對應點的集合常用同一個幾何術語來代表。例如，滿足方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

的實數組 $X(x, y, z)$ 的集合依次叫做球面，平面，直線。

在算術空間中，點 $A(a, b, c)$ 的 r -近傍是由滿足不等式

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r$$

的所有點 $X(x, y, z)$ 的集合來確定的。

用幾何來解釋，這就是以已知點作中心，以 r 作半徑的球的內部。