高等學校教學用書

數學分析教程

第二卷 第一分册

М. К. ГРЕБЕНЧА, С. И. НОВОСЕЛОВ 著
楊從仁 郝壽 李文琦譯

高等教育出版社

高等学校教学用書

数学分析教程

第二卷 第二分册

M. K. 格列本卡
C. И. 諾渥舍諾夫 著

高等教育出版社

統一書号 13010·350
定价 ¥0.90

高等學校教學用書

數學分析教程

第二卷 第一分册

M. K. 格列本卡 C. II. 羅渥舍諾夫著
楊從仁 郝 壽 李文琦譯

高等教育出版社

高等学校教学用書

数学分析教程

第二卷 第二分册

M. K. 格列本卡 C. И. 諾渥舍諾夫著
楊从仁 郝 寿 李文琦譯

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的格列本卡(М. К. Гребенча)、羅遲舍諾夫(С. И. Новоселов)合著"數學分析教程"卷二(Курс математического анализа Том 2)1953年第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院數理系教學參考書,本書專供師範學院數理系一年級及二年級兩年一貫制數學分析教材或作高等數學課程的參考。

本書卷二中譯本分二個分册出版。第一分册內容爲歐幾里得空間的點集合、多變數函數、多變數函數的微分法、隱函數寫像、常數項級數、函數級數等六章。

本册係由天津師範學院數學系楊從仁、郝壽、李文琦三人合譯。

本書第一卷第一、第二分册由商務印書館出版,自第二卷第一分册起由本社出版。

數學分析教程

第二卷 第一分册　書號371(課344)

格列本卡,羅遲舍諾夫著

楊從仁 郝壽 李文琦譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新華書店總經售

京華印書局印刷

北京南新華街甲三七號

開本 850×1168 1/32　印張 11 8/16　字數297,000

一九五五年八月北京第一版　印數 1—3,500

一九五五年八月北京第一次印刷　定價(7)¥1.40

本書系根据苏俄教育出版社（Учпедгиз）出版的格列本卡（М. К. Гребенча）、諾遲舍諾夫（С. И. Новоселов）合著"数学分析教程"卷二（Курсматематического анализ том.2）1953年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为师范学院数理系教学参考書，本書專供师范学院数理系一年級及二年級兩年数学分析教材或作高等数学課程的参考。

本書共分兩卷，中譯本各卷分二个分册，本卷第二分册内容包括有正交函数系，福里哀級数、数值及圖解法、重积分、曲綫积分、曲面积分、含参数的积分及瑕积分五章和一个关于拓扑空間的附录。

本册系由天津师范学院数学系楊从仁、郝寿、李文琦合譯。

数 学 分 析 教 程

第二卷 第二分册

М. К. 格列本卡 С. И. 諾遲舍諾夫著

楊从仁 郝寿 李文琦譯

高等教育出版社出版 北京琉璃璃170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·350 開本 850×1168 1/32 印張 7 14/16 字數 214,000 印數 0001—4,800

1957年10月第1版 1957年10月北京第1次印刷 定價（8）¥0.90

序　言

當編寫"數學分析教程"第二卷時，著者們以師範學院的教學大綱爲根據並考慮到未來的數學教師的需要。爲了上述原因，我們力求將教程中基本的，原則上甚重要的問題敘述得清楚明晰，但不擬用完備的近代分析教程中的細節使敘述變得繁瑣。本書中一些定理和證明不是以最一般的形式給出的，但著者們總是盡力精確地預先說明在證明過程中所用到的條件。同時著者們也盡力選擇這樣的證明方法，通過這些證明方法，可使一切可能的推廣變得非常明顯，而在最重要的情形，盡量指出來這些推廣的途徑。

在本書中，著者們保持了在本教程第一卷第二版中所採用的敘述風格。著者們深信現今俄文教科書所特具的在敘述上有嚴格的系統性和盡可能簡潔是恰當的。爲了這種原因，著者們力求避免那種以"預備知識的插筆"及"與讀者談話"爲特徵的小說形式的敘述，這種形式的敘述（著者們相信）對於供教學用的教本是完全不適當的。

在本書藍本剛剛結束時，著者之一，米哈依爾·庫茲米奇·格列本卡教授的早亡（1948年6月21日），中斷了我們多年來共同的工作。

藉這個機會我特向以下諸學者致深厚的謝意：恩·阿·列得涅夫，阿·斯·庫班科，蒲·伊·羅曼諾夫斯基，蒲·斯·莫傑諾夫，布·吾·庫圖佐夫，他們對本書曾提出許多寶貴的意見和指示。我懷着深切的感激的心情提起已故的蘇聯科學院通訊院士維·維·斯捷潘諾夫教授，他曾對本書的編著給著者們巨大的協助。我深深感謝恩·阿·梅得亮諾夫斯基，他爲了本書進行了複

維的製圖工作，以及科·斯·塞礎果娃，她曾對本書的抄稿工作和校對工作給與幫助。

莫斯科，1952年12月25日

斯·羅渥舍諾夫

目　　錄

目　录

第一章　歐幾里得空間的點集合

§ 1. 緒論

在一系列理論性的以及實用性的問題裏常常碰到一些量，這些量的數值，在給出了其他幾個量的數值後，就可決定。例如：

1）作等速運動的物體所通過的路程

$$s=v\cdot t$$

是由物體運動的速度 v 和所經過的時間 t 來確定。

2）動能

$$w=\frac{m\cdot v^2}{2}$$

是由運動的物體的質量和速度來確定的。

3）長方體的體積

$$V=a\cdot b\cdot c$$

是由它的各邊長度 a,b 和 c 來確定的。

從物理學、工程技術學、力學和數學裏可以隨意地找到許多相類似的例子。所有這些例子可以用一個共同的原理來概括：確定某些量的一組實數，對應於一個實數，此實數確定所考查的量的數值。這就表明，有必要把函數的概念擴充到確定函數值的變數是一組實數的情形。

§ 2. 歐幾里得平面和歐幾里得空間

試討論按一定次序給出的實數對(a, b)。如我們知道，任意一個實數對可以使之對應於坐標平面上以a爲橫坐標，以b爲縱坐標的一點；反之，對於平面上的每一點，都有一對實數，即此點的橫坐標和縱坐標，與之對應。這就給了我們應用幾何學術語的可能性，也就是說：對於有序的數對(a, b)和表示它的點可採用公共的術語——“平面的點”。

對於平面上的每兩個點（即，兩個數對）$A_1(a_1, b_1)$和$A_2(a_2, b_2)$可以令實數

$$\rho(A_1, A_2)=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2} \qquad (\rho)$$

與之對應，這個實數叫做兩點間的距離。若代表已知數對的平面點，是某線段的兩端點，則其長度就用上述實數來計量。設有點（即數對）(x, y)的集合，其中兩點間的距離按照公式(ρ)來確定，則所有這些點的集合就叫做二維歐幾里得（算術）空間。用幾何的解釋，對於二維算術空間有坐標平面上所有點的集合與之對應。

每一個以實數對作元素的集合可以藉坐標平面上對應點的集合來作幾何的表示；反之，對於坐標平面上的點集合有實數對的集合與之對應。因此，對於兩個對應的集合經常採用同一個公共的幾何術語。例如，對於滿足方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

的數對$X(x, y)$的集合和對於對應的幾何的像可以採用公共的術語“圓周”來代表。同樣，滿足不等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$$

的數對(x, y)的集合叫做圓面。滿足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad c\leqslant y\leqslant d$$

的數對的集合叫做矩形。

此外，所謂點 $A(a,b)$ 的 r-近傍是指滿足不等式

$$\rho(X,A)<r \text{ 或 } (x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

的所有的點 $X(x,y)$ 的集合。

在幾何學上，r-近傍可用位於以 A 爲中心，r 爲半徑的圓內的點的集合來代表。從圓的幾何性質，就可以得出下述的事實：平面上的近傍也具有近傍的三個基本性質（卷 I § 15）。近傍的基本性質的正確性可以不用幾何的解釋而僅由算術方法來確定（參考 § 3）。

如我們知道，實數組 (a, b, c) 和坐標空間中的點之間能建立一一對應的關係，由這樣的對應關係，對於有確定次序的實數組 (a,b,c)，有空間中以 a 爲橫坐標，以 b 爲縱坐標，以 c 爲直坐標的一點與之對應。設有某實數組 (a,b,c) 的集合，其中兩點 $A_1(a_1,b_1,c_1)$ 和 $A_2(a_2,b_2,c_2)$ 間的距離由公式

$$\rho(A_1,A_2)=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

來確定，則這集合就叫做三維歐幾里得（算術）空間。

歐幾里得算術空間的點集合和幾何空間的對應點的集合常用同一個幾何術語來代表。例如，滿足方程式

$$x^2+y^2+z^2=r^2; \qquad Ax+By+Cz+D=0;$$

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

的實數組 $X(x,y,z)$ 的集合依次叫做球面，平面，直線。

在算術空間中，點 $A(a,b,c)$ 的 r-近傍是由滿足不等式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<r$$

的所有點 $X(x,y,z)$ 的集合來確定的。

用幾何來解釋，這就是以已知點作中心，以 r 作半徑的球的內部。