高等學校教學用書

黎曼幾何與張量解析

上册

П. К. РАШЕВСКИЙ 著
俞　玉　森　譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

黎曼幾何與張量解析

上册

П. К. 洛薛夫斯基著
俞 玉 森 譯
熊 一 奇 校

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的洛薛夫斯基(П. К. Рашевский)著“黎曼幾何與張量解析”(Риманова геометрия и тензорный анализ）1953年第一版譯出。本書可供綜合大學數理系二年級以上的學生參考。

本書中譯本分上下兩册出版。上册內容爲三度歐氏空間中的張量、n度仿射空間、n度歐氏空間及特殊相對論的數學基礎。其中第一章可供一般讀者（特別是工學院的學生）閱讀，內容包括張量及其應用的最簡單的概念。

黎曼幾何與張量解析

上　册

書號329(課306)

洛薛夫斯基著

俞玉森譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
〔北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號〕

新華書店總經售

大業印刷公司印刷

開本850×1168 1/32　印張11　字數 275,000

一九五五年六月上海第一版　印數 1—3,000

一九五五年六月上海第一次印刷　定價(7) ¥1.38

序

本書按其性質來說，當作教科書用比當作給專家看的專論更適宜。這首先就表現在材料的選擇方面：著者盡力在所研究的範圍內，提出眞正基本的並且是最重要的知識；但同時關於這種知識的敍述却是詳盡的，而且對各種概念的闡釋是全面的。

根據敍述的性質，這本書應該是大學三年級的學生所能完全了解的。

本書的另一特點是：從張量解析與黎曼幾何的領域轉到力學與物理學上；只要有可能出現這種情形的地方，著者就盡量指出。大家都知道，張量解析與黎曼幾何在相對論的領域內應用得最成功；本書的第四章及第十章正是專門討論相對論的。

第一章具有特殊的作用：它帶有類似初步的性質，並且使張量的方法及其在力學與物理學上的應用能在普通空間（取笛卡兒直角坐標時）的最簡單情形下得以發揮。按敍述的程度來說，這一章應該是工程師及工學院的學生所能了解的，假如他們希望認識一下初等張量解析在技術應用方面所必需的最起碼的張量解析的知識時，就可讀完這一章。

凡讀過著者以前所寫的"黎曼幾何與張量解析初步"一書的讀者，我要指出這本書所談到的材料比那本書已增加了許多。如今我們已不得不過問僞歐氏空間、僞黎曼空間（它們是相對論所必需的）及仿射聯絡空間了，而這些問題在本書中都已提到。又用許多例子提出了幾何對象論的基本觀念，其中有四度空間的自旋量論。同時在敍述中，也補充了許多個別的、而又具有基本意義的問題（例如：黎曼空間中超曲面與曲線的理論以及其他）。

著者考慮到本書的內容很多，所以用星號標出許多節，這些節可以刪去而不影響到以後的理解。在正文中也作了關於這方面的指示。整

個這本書中不包含可要可不要的材料，因而本書中無論在那一方面所敘述到的東西，在我們所研究的範圍內幾乎都是具有重要意義的。

最後，我要向本書的校閱人 A. Ф. 拉卜科表示謝意，因為他對原文很小心地校閱，並提出了一些寶貴的意見。

П. К. 洛辭夫斯基

上 册 目 錄

第一章　三度歐氏空間中的張量

這一章我們所講到的是在最簡單最基本的情形下的張量，即在笛氏直角坐標及普通空間中我們來研究張量。我們將指出張量概念在水力學及彈性力學中的重要應用。所以，對全書來說，這一章帶有序論的性質；但是在一定的意義之下，它同時又是很完整的。讀者如果只希望獲得關於張量及其應用的最簡單的概念時，只要讀完這一章就行了。相反地，在數學上頗有修養的讀者，如果希望認眞地研究這本書時，可以將這一章瀏覽一下就夠了，因爲以後的敍述並不依賴於這一章的結果，而僅把它當作例證來用。

§1. 一階張量

在整個第一章內我們將僅研究（在普通空間中的）笛氏直角坐標（以後不再在每次來說明這一件事）。

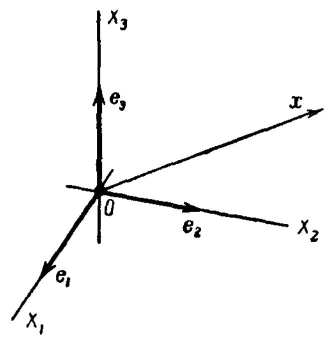

圖 1

設 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是位於坐標軸上的基本向量㊀（圖 1），從原點 O 出發的一組基本向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 叫做正交標架。作基本向量的數量積：

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0\ (i\neq j),\\ 1\ (i=j)。\end{cases}\qquad(1.1)$$

今研究任一向量 $\boldsymbol{x}$，爲簡單計設這一向量是從原點 O 出發的。我們知道，向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標（記作 x_1, x_2, x_3）可定義爲下列展開式的係數

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3,$$

也可作爲向量 $\boldsymbol{x}$ 在坐標軸上的投影：

㊀ 或譯作單位向量。

$$x_1=\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_1,\quad x_2=\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_2,\quad x_3=\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_3\text{。}\tag{1.2}$$

這裏的投影被寫成向量 $\boldsymbol{x}$ 與對應的基本向量的數量積。

向量 $\boldsymbol{x}$ 可表示某種幾何的或物理的對象，例如，剛體的平行移動（已知大小及方向），力，速度，在某一點的電場強度等等。這種對象是客觀存在的，根本不管我們在什麼坐標下來研究它，也不管我們研究與否。可是向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標 x_1, x_2, x_3 則不僅與向量 $\boldsymbol{x}$ 本身有關，而且與所選擇的坐標也有關。

但是，坐標軸可以任意選擇：可使坐標軸受到任意的平行移動，或繞原點 O 的轉動。

這樣一來，用坐標 x_1, x_2, x_3 來定出向量 $\boldsymbol{x}$ 的方法附帶也反映出選擇坐標軸的任意性。這種情況是有害的，因爲在我們所研究的向量圖上（及以後更複雜的對象的圖上），一般說來，需加上偶然選擇的坐標軸。由此我們所研究的圖形就會因過於詳細而顯得更複雜。其次我們將看到張量計算的基本任務是要在既成的複雜情況下分清主從，學會標出屬於被研究對象的本質的東西，以及棄去由坐標軸的任意選擇而帶來的偶然的東西。

爲了這個目的首先必須了解：當坐標軸改變時一固定向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標如何變化。

這裏以及此後我們將僅研究坐標軸繞不動原點 O 而轉動的情形（包括鏡反射在內）。因而平行移動的情形我們將不去研究。這是由於在幾何的與物理的大多數應用中原點 O 的位置或者沒有起什麼作用（例如，在計算向量的坐標時），或者是當然決定了的（大部分是這樣的一個點：要在它的無限小的鄰域上來研究幾何的或物理的圖形）。

在這兩種情形之下，都不需要研究平行移動，於是原點 O 可以看作不動點。

因而，在原點 O 不動時，假定我們從舊的正交標架 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 變到了新的正交標架 $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$。則把新的基本向量表示作舊的基本向量

的展開式後，就可給出這個變換：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1=A_{11}\boldsymbol{e}_1+A_{12}\boldsymbol{e}_2+A_{13}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}'_2=A_{21}\boldsymbol{e}_1+A_{22}\boldsymbol{e}_2+A_{23}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}'_3=A_{31}\boldsymbol{e}_1+A_{32}\boldsymbol{e}_2+A_{33}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

從這些關係立刻可得：數量積 $\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}_2$ 等於 A_{12}，及一般有

$$A_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}_j\ \ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)。\tag{1.4}$$

換句話說，A_{ij} 是第 i 個新基本向量與第 j 個舊基本向量的數量積，亦即 A_{ij} 是這兩個基本向量間交角的餘弦。

現在利用逆矩陣 A'_{ij} 而以新基本向量來表示舊基本向量：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1=A'_{11}\boldsymbol{e}'_1+A'_{12}\boldsymbol{e}'_2+A'_{13}\boldsymbol{e}'_3,\\ \boldsymbol{e}_2=A'_{21}\boldsymbol{e}'_1+A'_{22}\boldsymbol{e}'_2+A'_{23}\boldsymbol{e}'_3,\\ \boldsymbol{e}_3=A'_{31}\boldsymbol{e}'_1+A'_{32}\boldsymbol{e}'_2+A'_{33}\boldsymbol{e}'_3。\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

如前述可得：

$$A'_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}'_j\ \ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)。\tag{1.6}$$

比較(1.4)與(1.6)，我們注意到

$$A'_{ij}=A_{ji},\tag{1.7}$$

就是說，矩陣 $\|A_{ij}\|$ 與 $\|A'_{ij}\|$ 是互相轉置的。除此以外，這兩個矩陣又是互逆的，因為它們決定互逆的變換(1.3)及(1.5)。

因而，欲得矩陣 $\|A_{ij}\|$ 的逆矩陣只要將它轉置過來就夠了。具有這種性質的矩陣叫做正交矩陣。矩陣 $\|A_{ij}\|$，$\|A'_{ij}\|$ 互逆這件事可記作兩矩陣的積與一單位矩陣相等：

$$\sum_s A_{js}A'_{sk}=\delta_{jk}=\begin{cases}0\ \ (j\neq k),\\ 1\ \ (j=k),\end{cases}$$

或根據(1.7)

$$\sum_s A_{js}A_{ks}=\delta_{jk}\ 。\tag{1.8}$$

把這兩個矩陣的次序顛倒而連乘之，同樣可得：

$$\sum_s A_{sj}A_{sk}=\delta_{jk}\ 。\tag{1.9}$$

每一個關係(1.8)或(1.9)顯然與矩陣的正交性相當。

利用公式(1.8)易證,要使公式(1.3)所決定的變換是從正交坐架到正交坐架的變換,矩陣$\|A_{ij}\|$的正交性是其必要和充份條件。

正交矩陣具有行列式 ± 1。

實際上,等式(1.8)告訴我們:當正交矩陣的行列式自乘時(列與列乘),得到單位矩陣的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1。$$

可見正交矩陣行列式的平方等於 1,而行列式本身等於 ± 1。

正號表示新正交標架與舊正交標架具有同樣的指向,而負號是表示標架的指向變作相反的(右變左,左變右)。

現在來看,當坐標軸轉動時,一固定向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標將如何改變。先寫出舊坐標系中的公式(1.2):

$$x_i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_i \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

同樣再寫出新坐標系中的公式(1.2):

$$x_i' = \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_i' \quad (i=1,\ 2,\ 3)。$$

作 $\boldsymbol{x}$ 與等式(1.3)的數量積,然後再利用上面的後三個式子,得:

$$x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3,$$
$$x_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3,$$
$$x_3' = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 。$$

換句話說,當坐標軸轉動時,每一個已知向量所受到的變換與基本向量所受到的正交變換(1.3)相同。這些變換簡單地記作:

$$\boldsymbol{e}_p' = \sum_i A_{pi}\boldsymbol{e}_i, \tag{1.10}$$

$$x_p' = \sum_i A_{pi}x_i 。 \tag{1.11}$$

在第一章的範圍內,總和所用的指標,總是跑過 1, 2, 3 三個值的。

同樣地,對公式中其他各個自由指標可以給這三個值中的任一個值。變換(1.10)及(1.11)的逆變換用類似的方式可記作:

$$e_i=\sum_p A'_{ip}e'_p=\sum_p A_{pi}e'_p, \tag{1.12}$$

$$x_i=\sum_p A'_{ip}x'_p=\sum_p A_{pi}x'_p\text{。} \tag{1.13}$$

這裏我們用了關係式(1.7)。

若在每一種坐標系中給了我們三個已編號的數 x_1, x_2, x_3, 且當坐標軸轉動時這些數按照規律(1.11)而變換,則稱所給的是一個一階張量。這些數叫做張量的坐標。

我們看到,在各種坐標系中所考察的一個已知向量的坐標構成一個一階張量。其逆亦眞:每一個一階張量的坐標可以看作某一個常向量的坐標。爲此只要選擇一個向量,令它在一種坐標系中的坐標與已知張量的坐標相一致就夠了;因爲對向量的坐標以及對一階張量的坐標,變換規律(1.11)都有效,所以在任何坐標系中兩者的坐標都能一致。

然而不要以爲一階張量僅可以用向量的形式來說明。例如,設有一固定的平面,而不通過坐標原點 O, 則其方程式可寫成下列形式:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=1\text{。}$$

當施行坐標軸的轉動時,則不難算出:方程式的係數 a_1, a_2, a_3 所受到的變換也滿足規律(1.11)。因而,這些係數構成一個一階張量(正如向量的坐標一樣)。

§2. 二階張量的概念

在研究最簡單的幾何形象時,自然會發生二階以及高階張量的概念。例如,取有心二次曲面的中心爲原點 O, 則其方程式可寫成

$$\sum_i\sum_j a_{ij}x_ix_j=1\text{。} \tag{2.1}$$

如前所假定:每一個總和的指標跑過 1, 2, 3 三個值。這裏由係數組成的矩陣 $\|a_{ij}\|$ 假定是對稱的:

$$a_{ij}=a_{ji}\text{。} \tag{2.2}$$

雖然在方程式 (2.1) 中經過合併同類項以後兩個坐標之積的係數將具有 $2a_{ij}$ 的形式(當 $i\neq j$ 時),但我們所稱的係數正是 a_{ij}。

施行坐標軸的轉動時,每一個向量(同樣也就是每一點)的新坐標可按照(1.11)而用舊坐標表示之。按照(1.13)其逆變換可寫成

$$x_i=\sum_p A_{pi}x'_p\text{。} \tag{2.3}$$

同樣也可寫成 $$x_j=\sum_q A_{qj}x'_q\text{。}$$

把這兩式代入(2.1)中,則得該曲面在新坐標系中的方程式:

$$\sum_p\sum_q\sum_i\sum_j A_{pi}A_{qj}a_{ij}x'_px'_q=1\text{。}$$

變換後方程式的係數顯然具有下列形式

$$a'_{pq}=\sum_i\sum_j A_{pi}A_{qj}a_{ij}\quad(p,\ q=1,\ 2,\ 3)\text{。} \tag{2.4}$$

於是得:已知曲面在每一種以曲面中心爲原點的坐標系中決定一組數 a_{ij} (九個), 這些數用兩個指標來編號,每一個指標可獨立地取 1,2,3 三個值。當坐標軸按(1.12)而轉動時,這些數按規律(2.4)而變換,而這一規律顯然是規律(1.10)對 a_{ij} 的每一個指標重複施行而得的。

若在每一種坐標系中給了我們以兩個指標而編號的九個數

$$\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

且當坐標軸轉動時這九個數按規律(2.4)而變換,則稱所給的是一個二階張量。a_{ij} 諸數本身稱爲張量的坐標。

條件 (2.2) 並不是必要的。在這一條件下的二階張量稱爲對稱的二階張量。所以,取有心二次曲面的中心爲原點時,這一曲面方程式的係數構成一個對稱的二階張量。也不難證其逆:二階對稱張量的坐標(如果它們的矩陣不是奇異的)總可解釋作以原點爲心的某一固定二次曲面方程式的係數。

不過，我們立刻會看到，這種解釋並非最重要的。

我們也不難獲得非對稱二階張量的例子。取兩個向量 $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$ 及 $\boldsymbol{y}(y_1, y_2, y_3)$，並用 a_{ij} 表示坐標 x_i 與 y_j 的積：

$$a_{ij}=x_iy_j。\tag{2.6}$$

在每一種坐標系中，這樣決定的數 a_{ij} 是以兩個足標而編號的，並且構成一個二階張量。實際上，當坐標軸轉動時，根據(1.11)得

$$x'_p=\sum_i A_{pi}x_i。\tag{2.7}$$

同樣有

$$y'_q=\sum_j A_{qj}y_j。\tag{2.8}$$

把這兩個等式各邊相乘得：

$$x'_py'_q=\sum_i\sum_j A_{pi}A_{qj}x_iy_j,\tag{2.9}$$

即

$$a'_{pq}=\sum_i\sum_j A_{pi}A_{qj}a_{ij},\tag{2.10}$$

就是說變換規律(2.4)成立。

這裏特別明顯地暴露出下列情況：這一變換規律是變換規律(1.11)對每一個足標重演而得的。特別，若公式(2.6)中的向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 相等時，則張量 a_{ij} 是對稱的。

§3. 作爲仿射量的二階張量

二階張量的最重要的意義是，它常可決定某一個仿射量。

仿射量 $\mathfrak{A}$ 就是一種規律，藉助於這種規律，對空間內的每個向量 $\boldsymbol{x}$，有某一個向量 $\boldsymbol{y}$ 與它對應，記作

$$\boldsymbol{y}=\mathfrak{A}\boldsymbol{x},\tag{3.1}$$

並且下列條件應該被滿足：

$$\mathfrak{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')=\mathfrak{A}\boldsymbol{x}+\mathfrak{A}\boldsymbol{x}',\tag{3.2}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha\mathfrak{A}\boldsymbol{x}。\tag{3.3}$$

這裏的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ 是任意向量,而 α 是任意(實)數。

換句話說,仿射量 $\mathfrak{A}$ 表示向量 $\boldsymbol{y}$ 對自變向量 $\boldsymbol{x}$ 的函數依從關係,並且這種依從關係應該是線性的。就是說,當兩個自變向量 $\boldsymbol{x}$ 的值相加時,對應的函數 $\boldsymbol{y}$ 的值亦相加[根據(3.2)];而當自變向量 $\boldsymbol{x}$ 乘上任一數時,函數 $\boldsymbol{y}$ 亦乘上同一個數[根據(3.3)]。

今特別來研究由基本向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 所變成的向量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_2$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_3$。若仿射量 $\mathfrak{A}$ 不是預先給定的,則常可(唯一地)這樣來選出 $\mathfrak{A}$,使得向量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_2$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_3$ 具任意給定的值。實際上,當給定了這些值以後,對於任一個向量 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$,我們可以計算 $\mathfrak{A}\boldsymbol{x}$:

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{x}=\mathfrak{A}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)=x_1\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1+x_2\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_2+x_3\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_3\text{。}\tag{3.4}$$

這裏我們利用了未知仿射量 $\mathfrak{A}$ 的性質 (3.2), (3.3)。於是,未知仿射量如果存在,就可由公式(3.4)決定之。不難證實這一公式確能決定一個仿射量,就是說性質(3.2),(3.3)恆成立。

利用下列方式可以明顯地想像到仿射量的作用。

對於空間每一點 M,作它的向徑

$$\boldsymbol{x}=\overline{OM}\tag{3.5}$$

並使向徑受到仿射量 $\mathfrak{A}$ 的作用。則新的向量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{x}$ 也是從原點 O 作出的,而它的終點一般是指一個新的點 M':

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{x}=\overline{OM'}\text{。}\tag{3.6}$$

結果,空間每一點 M 變到一個新的位置 M' 上,同時空間本身亦受到某種變形。

特別,由基本向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 所構成的單位立方體變到由向量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_2$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_3$ 所構成的平行六面體,只要假定這些向量是不共平面的。

實則,正立方體的各點對應的坐標是 x_i, 而 $0\leqslant x_i\leqslant 1(i=1, 2, 3)$,於是根據(3.4),變換後的點 M' 充滿所指出的平行六面體。

一般,由同樣大小的單位立方體(或任何其他的立方體)所構成的空間點陣經擴張(壓縮)並歪斜後,諸立方體變成平行六面體,但也是同

樣大小的。

當向量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1, \mathfrak{A}\boldsymbol{e}_2, \mathfrak{A}\boldsymbol{e}_3$ 不共平面時，所考察的空間變形叫做有心仿射變換。當這些向量共平面時，整個空間變到一個平面或一條直線，或甚至變到一點 O（當 $\mathfrak{A}\boldsymbol{x}\equiv 0$ 時）。這是仿射量 $\mathfrak{A}$ 的各種退化情形。

今轉到仿射量 $\mathfrak{A}$ 的坐標記法。我們知道，仿射量 $\mathfrak{A}$ 由預先給定的向量 $\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_i$ 完全決定之，而這些向量又可由其展開式決定。寫出這些展開式並記其係數爲 a_{pq}：

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3,\\ \mathfrak{A}\boldsymbol{e}_2 &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3,\\ \mathfrak{A}\boldsymbol{e}_3 &= a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

或簡寫成：

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_q = \sum_p a_{pq}\boldsymbol{e}_p\text{。} \tag{3.8}$$

係數 a_{pq} 可完全決定仿射量 $\mathfrak{A}$，這些係數我們叫做仿射量 $\mathfrak{A}$ 的坐標。把方程式(3.7)的第一式乘 $\boldsymbol{e}_3$，由(1.1)得 $\boldsymbol{e}_3\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_1 = a_{31}$。用相似的方法一般可得

$$a_{pq} = \boldsymbol{e}_p\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_q\text{。} \tag{3.9}$$

我們將在不同的坐標系中來研究同一個仿射量 $\mathfrak{A}$。這時仿射量的坐標 a_{pq} 每次所取的值都不同。現在要問：當坐標軸轉動時，這些數值按怎樣的規律而改變？

在新坐標系中把公式(3.9)寫成

$$a'_{pq} = \boldsymbol{e}'_p\mathfrak{A}\boldsymbol{e}'_q\text{。}$$

但根據(1.10) $\quad \boldsymbol{e}'_p = \sum_i A_{pi}\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}'_q = \sum_j A_{qj}\boldsymbol{e}_j,$

因而

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi}A_{qj}\boldsymbol{e}_i\mathfrak{A}\boldsymbol{e}_j = \sum_i \sum_j A_{pi}A_{qj}a_{ij} \quad (p, q = 1, 2, 3)\text{。}$$

所得的變換規律和(2.4)相一致，於是證明了仿射量的坐標 a_{ij} 構成一個二階張量。