优化方法及其程序设计

周承高 廖园 编

中国铁道出版社

优化方法及其程序设计

周承高　廖　园　编

中国铁道出版社

1989年·北京

内 容 简 介

本书主要包括数学优化法中的线性规划和非线性规划两部分。介绍了各种优化方法，并将这些方法与各种具体实例结合起来，以便读者掌握优化方法，解决实际问题。

在编写方式上，力求深入浅出建立概念，尽量做到通俗易懂，着眼于应用。书中的程序都在APPLE Ⅱ微型计算机上通过。

优化方法及其程序设计

周承高　廖园　编

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑　宋黎明　　封面设计　安宏

各 地 新 华 书 店 经 售

北京顺义燕华营印刷厂印

开本：787×1092毫米1/32　印张：10.25　字数：234千

1989年5月　第1版　第1次印刷

印数：1—3200册　定价：3.80元

前　　言

优化方法是随着计算机技术不断发展而出现的一种新的方法，它应用在企业管理、结构设计、机械设计、运输等其他许多领域。优化方法可以对所要解决的问题在一定程度上达到无可争议的完善化，优化方法的应用，必将促进国民经济的发展。

本书主要包括数学优化法中的线性规划和非线性规划两部分。介绍了各种优化方法，其中蒙特卡洛优化方法既可求解线性规划问题，也可以求解非线性问题。在介绍各种优化方法时，列举了许多具体实例。以便读者掌握方法，解决实际问题。

在编写方式上，力求深入浅出建立概念，尽量做到通俗易懂，着眼于应用。书中的程序都在APPIEⅡ微型计算机上通过。阅读本书只需要具备微积分和工程数学中某些基本知识即可。

本书可供工程技术人员、工商业管理人员和大专院校学生自学和参考。

在编写过程中，华东交通大学电气工程系计算机房的同志给予了大力支持和帮助，赵昌然副教授对本书进行了审阅，并提出了不少宝贵意见，特此对他们表示衷心的谢意！

由于编者水平有限，如有错误和疏漏之处，请批评指正。

编者

1985.11

目　录

第一章 引 言

§1—1 优 化

在工程设计、经济管理、自然科学以及其他领域中，人们都经常会遇到一些在一切可能方案中选择最好方案的问题。例如，在设计一个机械零件时，如何在保证强度的前提下使重量最轻或用料最省，或者如何确定参数，使其承载能力最高；在安排生产时，如何在现有人力、设备条件下，合理安排生产，使其产品的总产值最高；在确定仓库库存时，如何在保证销售量的前提下，使库存成本最小；在物资调配时，如何组织运输使运输费用最省；在化工生产中，如何确定投放原料的数量、反应的条件参数，使其反应产量最高；在配料时，如何合理配料，在保证质量前提下使成本最低等等，所有这些都是属于优化问题。

求解优化问题有许许多多种方法，随着电子计算机的应用，为优化问题的求解提供了有力的计算工具。由于优化是要在一切可能的方案中寻求最优的方案，往往需要进行大量的计算，若没有电子计算机而用人工进行计算，则不仅工作量很大，且有时是难以实现的。

电子计算机的出现，大大促进了数学最优化方法的发展。线性规划和非线性规划是属于数学最优化方法。用线性规划和非线性规划来求解最优化问题，首先要以数学的形式来描述所要求解的问题，即建立数学模型。在建立数学模型时，一方面我们希望建立一个完善的模型，另一方面我们又希望使建立的模型容易处理求解。所建立的数学模型如能较好的表示真实问题，则模型的解将也是真实问题的最优解，

反之，一个不好的模型，即使求解很精确，其解也不会是真实问题的解。同时，所建立的数学模型如果无法求解，那么再好的模型也是没有用的。因此，我们必须要分清主次，所建立的数学模型在能较好地反映真实问题的前提下，使其便于处理求解。

线性规划和非线性规划的数学模型有许多求解方法，即有许多算法。对于多数实际工作者，往往是根据所面临的问题，建立数学模型，并应用现有的算法及其程序来求解。

本书提到的优化方法指的是线性规划和非线性规划的各种算法。但不能认为优化方法就是使用电子计算机，就是数学优化方法。因为对于许多问题不少因素难以用数学来描述，无法建立数学模型，此时根据经验运用直觉来判断，对方案进行评价，作出最后较好的决策，也是一种优化方法。如对产品设计结构方案的选择，常常只能采取这种优化方法。

§1—2　变量、约束和目标函数

一个优化问题的提出，要包括三个方面的正确确定，即变量、约束和目标函数。

一、变　量

在对某一优化问题求解时，有一些基本参数是要在求解过程中选定的，我们把这些基本参数称为变量。例如，在空心扭转轴的优化设计中，设传递扭矩为M，轴的外径为D，内径为d，求如何在满足强度和扭皱稳定的条件下用料最省的设计方案，基本参数D和d就是变量。对容积一定的集装箱，在满足某些特定尺寸要求前提下，如何确定其长l、宽w、高h，使其用料最省，那么基本参数l、w、h就是变量。

变量一般是一些相互独立的基本参数，一组变量的数值

表示了优化问题的一种方案。

n个变量x_1，x_2，…，x_n可以按一定次序排列成数组，表示一个n维列向量，即

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=[x_1x_2\cdots x_n]^T$$

x_i是n维向量X的第i个分量。式中T为转置符，即把列向量转置为行向量。

以n个变量为坐标轴组成的实空间，称为n维实欧氏空间，用R^n表示。n维空间中的一点就代表了一个方案。

当$n=2$时，变量X是二维向量，平面（x_1，x_2）上的每一个点，都相应有一定的x_1和x_2值，即代表了一个方案。如图1—1（a）所示。

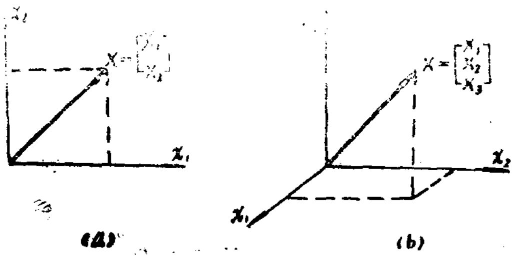

图 1—1

当$n=3$时，即由三个变量x_1，x_2，x_3组成一个三维空间，如图1—1（b），其中某一点X

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

代表了一个方案。

n维空间是由n个变量确定的方案的集合，用 $X \in R^n$ 表示。空间中任一方案K，被认为是从空间原点出发的向量 $X^{(k)}$。因此 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$ 表示了有k个不同的方案。

二、约　束

实际上，变量不仅在规定的范围内取值，且各变量之间还必须满足一定的关系，所以说n维空间是所有方案的集合，并不完全被实际问题所接受。由实际问题所引起的对变量取值的种种限制，我们称为约束。

约束一般可以表示为变量的不等式约束函数和等式约束函数。即

$$g_j(X) = g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$$

或者
$$g_j(X) = g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0$$

或者
$$h_i(X) = h_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$j = 1, 2, \cdots, l, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

式中l和m分别表示不等式约束和等式约束的条件数。

严格来说，等式约束的给出，反映了变量的某些不独立性，如果比较简单，可以通过等式约束，将变量的维数减小，从而消除了等式约束的要求。有时，这种做法会带来困难。

实际上，要想改变约束条件的表示形式并不困难。例如，若 $g(X) \leqslant 0$，则 $-g(X) \geqslant 0$；又 $h(X) = 0$，可以用两个不等式约束 $g(X) \geqslant 0$ 和 $-g(X) \geqslant 0$ 代替。

在求解优化问题过程中，不等式约束是比较重要的概念。一个不等式约束条件 $g(X) \leqslant 0$ 或 $g(X) = 0$ 可将n维空间划分为两部分：一部分满足约束条件，$g(X) < 0$；另一部分不满足约束条件，$g(X) > 0$；这两部分的分界面称为约束面，$g(X) = 0$，如图1—2（a）所示。

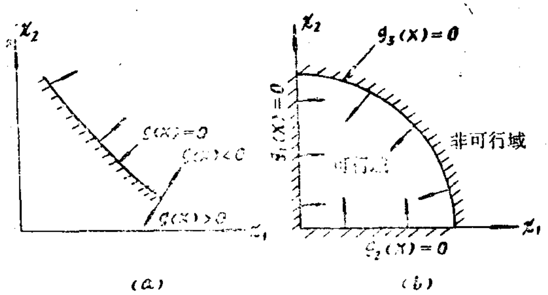

图 1—2

若有L个不等式约束条件，则由L个约束面在空间围成两个区域。凡满足不等式约束方程组的变量选择区域，称为可行域，如图1—2（b）所示。只要不满足不等式约束方程组中任何一个约束条件的变量选择区域，称为非可行域。

三、目标函数

对优化问题的许多可行方案中，哪个方案好，哪个方案不好，需要有一个衡量的标准。这个标准可以用一个函数来表示，我们把用于评选方案好劣的函数，称为目标函数，它是n个变量的一个实函数，写成

$$Z=f(X)$$
$$=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在实际问题中，优化的目标函数有两种表述形式：目标函数的极小化和目标函数的极大化即

$$\mathrm{Min}.f(X) \text{ 或 } \mathrm{Max}.f(X)$$

求目标函数$f(X)$的极大化就等价于求目标函数$-f(X)$的极小化。

第二章　线性规划的基本概念

线性规划是在满足一组线性约束和变量非负数的限制条件下，求多个变量线性函数的最优值。它具有计算技术比较简单的特点，在国民经济的各部门得到了广泛的应用。线性规划在理论上趋向成熟，不同的问题可以列出同种型式线性数学模型来求解。

§2—1　线性规划的数学模型

先看几个简单的例子。

例2—1　某车间生产A和B两种产品。为了生产一台A和B产品，所需的原料分别为2和3个单位，而所需要的工时分别为4和2个单位。现在可以应用的原料为100个单位，工时为120个单位，每生产一台A和B分别可获得利润6元和4元，应当安排生产A、B各多少台，才能获得最大利润。

设该车间应安排生产A、B分别为x_1、x_2台，那么该问题是求最大值的函数$z=6x_1+4x_2$。x_1和x_2应满足约束条件：

原材料方面：$2x_1+3x_2\leqslant 100$

工时方面：$4x_1+2x_2\leqslant 120$

非负数的限制x_1，$x_2\geqslant 0$

这个最优化问题是要求出x_1、x_2，既要满足约束条件又要使目标函数值Z最大。本例有二个变量，二个不等式约束。因为目标函数和约束条件都为线性函数，故称为线性规划。

例2—2　有Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种原料，每种原料的成本及成份分别如表2—1所示。三种原料混合后其成份应满足A≥

0.04，B≥0.02，C≥0.07。问上述三种原料各应占多少，则既能满足成份要求而又使成本最低。

表2—1

原料	成份			成本
	A	B	C	（元/公斤）
Ⅰ	0.06	0.02	0.09	15
Ⅱ	0.03	0.04	0.05	12
Ⅲ	0.04	0.01	0.03	8

设每公斤混料中原料Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ分别占x_1，x_2，x_3份，则$x_1+x_2+x_3=1$。同时还应满足：

$$A=0.06x_1+0.03x_2+0.04(1-x_1-x_2)\geqslant 0.04$$

$$B=0.02x_1+0.04x_2+0.01(1-x_1-x_2)\geqslant 0.02$$

$$C=0.09x_1+0.05x_2+0.03(1-x_1-x_2)\geqslant 0.07$$

成本最低，即求最小值的函数：

$$Z=15x_1+12x_2+8(1-x_1-x_2)$$
$$=7x_1+4x_2+8$$

将约束条件化简为

$$2x_1-x_2\geqslant 0$$
$$x_1+3x_2\geqslant 1$$
$$3x_1+x_2\geqslant 2$$
$$1-x_1-x_2\geqslant 0$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0$$

可以看出，本例也是线性规划问题，有二个变量，四个不等式约束条件。

例2—3 要做100套钢架，每套由长为2.9m，2.1m和1.5m的圆钢各一根组成。现只有长为7.4m的圆钢，问应如何下料，才能使用的原料最省。

如果在每根原料上截取2.9m、2.1m和1.5m的棒料各一根，这样每根原料剩下0.9m的料头，做100套钢架需 100 根原料，料头总数为90m。现在考虑合理套裁，以节省原料，表2—2有几种套裁方案，可以考虑采用。

表2—2

下料数（根）＼方案 长度（m）	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
2.9	1	2		1	
2.1			2	2	1
1.5	3	1	2		3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

为了达到省料的目的，需要混合使用各种下料方案。设用第Ⅰ种方案下料原材料的根数为x_1，方案Ⅱ为x_2，方案Ⅲ为x_3，方案Ⅳ为x_4，方案Ⅴ为x_5，我们希望总的料头长度最小，最小函数为

$$z = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

受到的约束为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

本例也是线性规划问题，有五个变量，三个等式约束。

从上面三个例子可以看出，它们都属于一类的优化问题，具有以下共同特征：

1． 每一个问题都用一组未知数(x_1，$x_2 \cdots x_n$)表示某一方案，这组未知数的一组定值就代表一种方案。通常要求

这些未知数取值是非负的。

2．存在一定的限制条件（约束条件），这些条件可以用一组线性等式或线性不等式来表达。

3．都有一个要求求最大值或最小值的函数（目标函数），该函数也是线性的。

一般来讲，这类问题可归纳为如下数学模型：

$$\text{Max.}(\text{Min.})\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

满足约束
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_m \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2\cdots\cdots,\ n \end{cases}$$

其简缩形式为：

$$\text{Max.}(\text{Min.})\ z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (2\text{—}1)$$

约束
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leqslant (\geqslant, =) b_j \qquad (2\text{—}2) \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2\cdots\cdots, n \\ \qquad\quad j = 1, 2\cdots\cdots, m \qquad (2\text{—}3) \end{cases}$$

该数学模型中式（2—1）为目标函数，式（2—2）为约束条件，式（2—3）为非负条件。

§2—2　线性规划的图解法

虽然线性规划的图解法仅限于含有二个变量问题，但通过图解法可以直观地看到线性规划问题解法的一些基本概念和基本原理。

一、图解法的步骤

用例2—1来具体说明图解法的步骤。

$$\mathrm{Max.}\ z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{约束}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

第一步分别确定满足各约束的点域：

1． 假设第一个约束为等式，在x_1，x_2坐标系上画出该约束，即直线$2x_1+3x_2=100$。并确定满足$2x_1+3x_2\leqslant 100$各点的集合。因为原点（0,0）是满足约束条件$2x_1+3x_2\leqslant 100$的，故在直线$2x_1+3x_2=100$下方所有的点都满足该约束条件。

由图可见，如果约束条件的常数项为非负，那么原点满足所有小于或等于的约束条件。

2． 同样假设第二个约束为等式，画出直线，确定满足约束$4x_1+2x_2\leqslant 120$条件的各点集合。同样可以确定在直线$4x_1+2x_2=120$下方所有的点必定满足约束条件。

3． 确定$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$的区域。

第二步找出可行域。由第一步所组成的区域，在该区域上每个点均满足所有的约束条件，并可能成为线性规划问题的解，我们称该区域为可行域，如图2—1中的ABCD斜线区域。

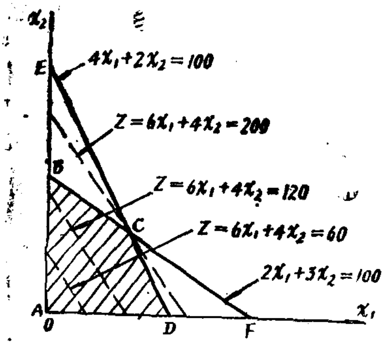

图 2—1

第三步观察目标函数的变化。

当函数值$z=0$时，

$x_1=0$，$x_2=0$；

当函数值$z=60$时，

$x_1=10, x_2=0$，或者 $x_1=0, x_2=15$

当函数值 $z=120$ 时，$x_1=20, x_2=0$，或者 $x_1=0, x_2=30$；

在可行域内直线 $6x_1+4x_2=60$ 上的点都具有相同的目标函数值 $z=60$，同样在可行域内直线在 $6x_1+4x_2=120$ 上的点都具有相同的目标函数值 $z=120$。

可以看出，不同的目标函数值将得到一系列直线，并随着目标函数值的增加该直线往C点移动。如果直线全部移过C点则完全离开可行域。

第四步求解。

通过第三步的分析，可知在C点产生目标函数的最大值或最优值，所求C点的坐标即为该问题的最优点。在约束优化中，最优点和最优值构成一个约束最优解。求解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=100 \\ 4x_1+2x_2=120 \end{cases}$$

可以得到 $x_1=20$，$x_2=20$。

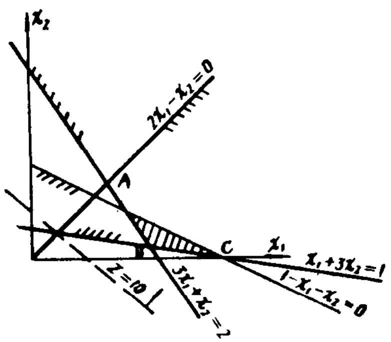

图 2—2

因此应当生产A、B产品各20台，能获得最大利润为 $z=60\times20+4\times20=200$ 元。

用同样的方法，我们可以得到例2—2的最优解。

$\mathrm{Min}.z=7x_1+4x_2+8$