

高等学校文科教材

文科高等数学教程

下 册

张国楚 徐本顺 主编

教育科学出版社

数学教程

下 册

张国楚 徐本顺 主编

教育科学出版社

编 者

主 编 张 国 楚 徐 本 顺
副 主 编 姚 孟 臣 董 奎 哲
编 委 (以姓氏笔划为序)
于 义 良 王 立 冬
刘 新 平 邸 继 征
张 勤 海 蔡 秉 衡

文 科 高 等 数 学 教 程 下 册

张 国 楚 徐 本 顺 主 编

教育科学出版社出版(北京·北太平庄·北三环中路46号 邮编 100088)

新华书店北京发行所发行 唐山市胶印厂印装

开本 850×1168毫米 1/32 印张 12.125 字数 31万

1994年10月第1版 1996年6月第2次印刷

印数 5001—10000册

ISBN 7-5041-1620-3/G·1597

定价:14.00元

目 录

第十章 微分方程——描述事物局部平衡关系的	
数学模型	(1)
§ 10.1 一般概念.....	(2)
§ 10.2 一阶微分方程.....	(4)
2.1 可分离变量的微分方程.....	(5)
2.2 齐次微分方程.....	(8)
2.3 一阶线性微分方程.....	(10)
2.4 拉格朗日.....	(16)
§ 10.3 二阶微分方程.....	(17)
3.1 特殊型二阶微分方程.....	(17)
3.2 二阶线性微分方程解的结构.....	(20)
3.3 二阶常系数线性微分方程.....	(21)
专题简述(10) 数学符号.....	(28)
思考题十.....	(32)
习题十.....	(33)
第十一章 无穷级数——无穷离散量之和的数学模型 ...	(35)
§ 11.1 特殊的函数项级数——数项级数.....	(36)
1.1 阿基里斯一定能追上乌龟——数项级数的 概念、敛散性及其基本性质.....	(36)
1.2 正项级数.....	(44)
1.3 任意项级数.....	(48)

§ 11.2 幂级数	(52)
2.1 幂级数的概念	(52)
2.2 幂级数的收敛半径	(53)
2.3 幂级数的性质	(57)
§ 11.3 台劳级数及其应用	(61)
3.1 台劳级数	(61)
3.2 函数台劳展开式在近似计算中的应用	(66)
3.3 台劳级数的意义	(68)
专题简述(11) 数学的形式化	(69)
思考题十一	(74)
习题十一	(74)
第十二章 多元函数微分学——一元函数微分学的推广 ...	(77)
§ 12.1 二元函数的极限和连续性	(78)
1.1 二元函数的概念	(78)
1.2 二元函数的极限	(80)
1.3 二元函数的连续性	(82)
§ 12.2 偏导数和全微分	(84)
2.1 偏导数——沿坐标轴方向的变化率	(84)
2.2 全微分——估计全增量的数学模型	(88)
§ 12.3 复合函数微分法	(91)
3.1 复合函数的概念	(91)
3.2 求复合函数偏导数的链式法则	(92)
* § 12.4 偏导数的一个应用——二元函数的 极值	(95)
专题简述(12) 数学内容的辩证分析(一) 简单性与复杂性	(100)
思考题十二	(104)
习题十二	(104)

第十三章 多元函数积分学——一元函数积分学的

推广	(106)
§ 13.1 二重积分的概念和性质	(107)
1.1 德漠克利特的求积术及求积的一般方法 ——二重积分的概念	(107)
1.2 二重积分的性质	(112)
§ 13.2 二重积分的计算	(113)
专题简述(13) 数学内容的辩证分析(二) 特殊与一般	(117)
思考题十三	(122)
习题十三	(122)
第十四章 线性代数浅谈	(124)
§ 14.1 行列式与线性方程组	(124)
1.1 行列式概念	(124)
1.2 行列式的性质与计算	(128)
1.3 用行列式解线性方程组	(135)
1.4 用消元法解线性方程组	(137)
1.5 数学王子——高斯	(142)
§ 14.2 矩阵	(145)
2.1 矩阵的概念	(145)
2.2 矩阵的加减	(146)
2.3 数与矩阵的乘法及矩阵的转置	(148)
2.4 矩阵的乘法	(149)
2.5 逆矩阵及其求法	(154)
专题简述(14) 数学的真善美	(158)
思考题十四	(162)
习题十四	(163)

第十五章 线性规划入门——一类应用广泛的最优化

数学模型	(165)
§ 15.1 线性规划的概念.....	(165)
1.1 问题的提出.....	(165)
1.2 建立数学模型——使具体问题抽 象化、形象化.....	(168)
1.3 线性规划问题的标准形式.....	(172)
§ 15.2 求解线性规划问题的基本方法 ——单纯形法.....	(174)
2.1 线性规划问题的图解法 ——用直观的几何图形求最优解.....	(174)
2.2 线性规划问题的代数解法 ——单纯形法.....	(178)
专题简述(15) 数学与哲学.....	(191)
思考题十五.....	(195)
习题十五.....	(195)
第十六章 概率统计初步——偶然现象的数学模型	(199)
§ 16.1 随机现象、事件与概率.....	(200)
1.1 随机现象及其统计规律性.....	(200)
1.2 随机试验与随机事件.....	(202)
1.3 随机事件的关系和运算.....	(203)
1.4 随机事件的概率.....	(205)
1.5 条件概率.....	(210)
§ 16.2 概率的计算公式.....	(212)
2.1 加法公式.....	(212)
2.2 逆算公式.....	(213)
2.3 乘法公式.....	(214)
2.4 二项概率公式.....	(215)
2.5 全概公式.....	(217)

2.6	逆概公式	(218)
§ 16.3	随机变量	(220)
3.1	离散型随机变量	(221)
3.2	连续型随机变量	(226)
3.3	分布函数	(230)
3.4	随机变量的数字特征	(233)
3.5	正态分布在教育研究中的应用	(236)
§ 16.4	统计资料的搜集	(240)
4.1	基本概念	(241)
4.2	统计资料的搜集	(242)
4.3	统计资料的误差	(243)
§ 16.5	统计资料的整理	(244)
5.1	统计表	(244)
5.2	统计图	(248)
§ 16.6	统计分析初步	(252)
6.1	集中量数	(252)
6.2	差异量数	(255)
§ 16.7	统计推断介绍	(257)
7.1	个体、总体、样本	(257)
7.2	统计推断的基本原理	(259)
§ 16.8	一元线性回归	(261)
8.1	一元线性回归的数学模型	(262)
8.2	未知参量 a, b 的最小二乘估计	(263)
8.3	回归方程的显著性检验	(264)
8.4	利用回归方程作预测	(265)
专题简述(16)	数学与社会科学	(266)
思考题十六	(270)
习题十六	(271)

第十七章 非欧几何简介——理性空间的数学模型	(275)
§ 17.1 几何学的产生与发展.....	(276)
1.1 欧几里得几何.....	(276)
1.2 漫长的思考.....	(278)
1.3 非欧几何的诞生.....	(281)
1.4 略谈几何学的发展近况.....	(283)
§ 17.2 罗巴切夫斯基几何简介.....	(283)
§ 17.3 非欧几何诞生的伟大意义.....	(291)
专题简述(17) 公理化方法.....	(294)
思考题十七.....	(298)
第十八章 几个新学科概述	(299)
§ 18.1 信息论.....	(299)
1.1 信息系统模型.....	(300)
1.2 什么是信息.....	(301)
1.3 信息量的大小.....	(303)
1.4 信息方法.....	(305)
§ 18.2 控制论.....	(307)
2.1 什么是控制.....	(307)
2.2 受控对象的数学描述.....	(308)
2.3 控制论的产生与发展.....	(310)
2.4 控制论方法.....	(311)
§ 18.3 系统论.....	(313)
3.1 系统及其特点.....	(313)
3.2 系统论的研究对象及系统工程.....	(315)
3.3 系统论的产生与发展.....	(317)
3.4 系统方法.....	(320)
§ 18.4 突变论.....	(322)
4.1 突变论的产生.....	(322)

4.2	尖顶突变模型	(323)
4.3	突变论的基本内容	(325)
4.4	突变论的应用与意义	(327)
§ 18.5	模糊数学	(329)
5.1	特征函数与隶属函数	(329)
5.2	模糊子集的定义	(331)
5.3	模糊子集的运算	(332)
5.4	水平截集	(333)
5.5	综合评判问题	(335)
5.6	模糊数学的内容与应用	(337)
专题简述(18)	数学与文化	(339)
附录一	习题答案与提示	(343)
附录二	初等数学小资料	(355)
附录三	两个数表	
	(一) 标准正态分布函数值表	(365)
	(二) t 分布双侧临界值表	(368)
附录四	主要人名检索	(370)
附录五	主要参考书目(续)	(375)

第十章 微分方程

——描述事物局部平衡 关系的数学模型

历史使人聪明,诗歌使人机智,数学使人精细,哲学使人深邃,道德使人严肃,逻辑与修辞使人善辩.

——培根

自然界的统一性显示在关于各种现象领域的微分方程式的‘惊人的类似’中^①.

——列宁

微分方程是在微积分的基础上发展起来的. 在 § 8.1 提及的牛顿字谜中“反之从流率求流量”一语就涉及到微分方程.

微分方程是数学分析的重要分支,它是从微观入手,通过变量与变化率的关系研究客观世界物质运动的数学模型,因而是从局部出发窥知全局的有效的数学工具,是人类探索世界奥妙的有力武器. 海王星就是依据微分方程的解被天文学家用望远镜按图案发现的. 微分方程在物理学、化学、生物学、天文、经济、考古、心

① 列宁:《唯物主义与经验批判主义》,人民出版社,1960,第 289 页.

理学等范围广泛的自然科学和社会科学中都得到极有价值的应用。

本章只介绍微分方程的一般概念,一阶、二阶微分方程的解法及其应用。

§ 10.1 一般概念

先看两个例子。

例 1 已知曲线上各点的切线斜率等于该点横坐标的二倍,且过点(1,2). 求此曲线方程。

解 设所求曲线方程为 $y = f(x)$, $M(x, y)$ 为该曲线上任意一点,依题意,在局部任意一点处有

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \quad (10.1)$$

这是一个含有导数的等式。

方程(10.1)两端对 x 积分,得

$$y = \int 2x dx,$$

即

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}). \quad (10.2)$$

由于曲线过点(1,2),故把 $x = 1, y = 2$ 代入(10.2),得

$$2 = 1^2 + C,$$

由此确定 $C = 1$. 于是所求的曲线方程为

$$y = x^2 + 1. \quad (10.3)$$

例 2 以初速 v_0 垂直上抛一物体,设此物体的运动只受重力影响,试求它所经过的路程 s 与时间 t 的函数关系。

解 由于重力加速度为 $\frac{d^2s}{dt^2}$,依牛顿运动第二定律,得关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g. \quad (10.4)$$

这是一个含有二阶导数的等式.

(10.4)两边对 t 积分,得

$$\frac{ds}{dt} = -g \int dt = -gt + C_1. \quad (10.5)$$

再对 t 积分一次,得

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \quad (10.6)$$

由题设可知, $t = 0$ 时, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = v_0$. 分别代入(10.5)和(10.6)式,得

$$v_0 = 0 + C_1,$$

$$0 = 0 + 0 + C_2,$$

由此解得 $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$. 于是(10.6)式变为

$$s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (10.7)$$

这就是所求路程 s 与时间 t 的函数关系.

从上面两个例子可以看出,许多实际问题的解决首先要在局部范围内找出含变量变化率——导数的等式. 然后通过积分找出变量间的函数关系. 为了便于讨论这类问题,以下给出微分方程的定义和有关概念.

定义 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程叫做**微分方程**. 有时简称为**方程**. 如(10.1)和(10.4)都是微分方程.

未知函数为一元函数的微分方程叫做**常微分方程**^①. 上面的两个例子都是常微分方程.

微分方程所包含的未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**. 如(10.1)是一阶微分方程,(10.4)是二阶微分方程.

^① 第十二章将介绍多元函数及多元函数的偏导数等概念. 含未知多元函数及其偏导数的方程叫做**偏微分方程**.

满足微分方程的函数叫做**微分方程的解**. 即把此函数代入微分方程后, 使该方程成为恒等式.

如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 那么, 这样的解叫做**微分方程的通解**(或**一般解**). 例如(10.2)是(10.1)的通解, (10.6)是(10.4)的通解.

在通解中, 若指定任意常量取某定值, 或利用已知条件求出任意常数值所得的解叫做**特解**. 如(10.3)是(10.1)的特解, (10.7)是(10.4)的特解. 确定特解的条件叫做**初始条件**. 例如在例2中 $t = 0$ 时 $s = 0, \frac{ds}{dt} = v_0$ 是方程(10.4)的初始条件.

通解的形式一般是含 x, y 和任意常数的方程, 在几何上, 它通常表示平面上具有某种共同性质的无穷多条曲线. 这些曲线的全体叫做**积分曲线族**. 特解则表示曲线族中某一条特定的曲线. 例如微分方程(10.1)的通解 $y = x^2 + C$ 表示一族抛物线, 这些抛物线上对应于同一横坐标的那些点处的切线的斜率均等于该横坐标的二倍. 而特解 $y = x^2 + 1$ 只表示通过点(1,2)的一条抛物线.

§ 10.2 一阶微分方程

形如

$$y' = f(x)$$

的一阶微分方程是最简单的一阶微分方程, 它的解可通过直接积分而求得, 称为**可直接积分的微分方程**.

顺便提及, 形如

$$y^{(n)} = f(x)$$

的 n 阶微分方程的解也可通过逐次积分直接求得, 也称为**可直接积分的微分方程**. 求解时每积分一次, 添加一个任意常数.

例1 求微分方程 $y'' = \sin x$ 的通解.

解 方程 $y'' = \sin x$ 的两边对 x 积分一次,得

$$y' = \int \sin x dx + C_1,$$

即

$$y' = -\cos x + C_1.$$

再积分一次,得

$$y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

现考虑一阶微分方程的其他类型及其求解方法.

2.1 可分离变量的微分方程

例 1 已知一向量场中每一点处的向量垂直于向径,求此向量场.

解 建立如图 10.1 所示的坐标系. 设 $M(x, y)$ 为向量场中任意一点. 由题设条件可知, 向量 \overrightarrow{MN} 垂直于向径 \overrightarrow{OM} , 即向量场在 M 处的切线 MN 垂直于线段 OM , 显然它们的斜率互为负倒数, 于是有

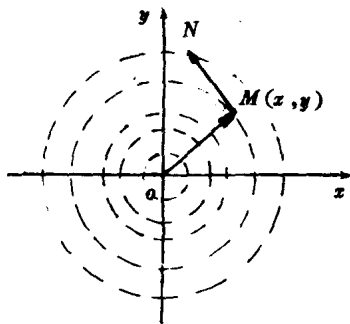


图 10.1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

该方程右端包含变量 x 和 y , 不能直接积分, 作如下变形

$$ydy = -x dx,$$

使左端仅含变量 y , 右端仅含变量 x . 这一步骤称为分离变量. 于是, 两端同时积分, 得

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2}.$$

化简得

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

该积分曲线族是以原点为圆心,任意常数 $C(C \geq 0)$ 为半径的同心圆,它就是所求满足题设条件的向量场.

由本例可知,我们可以根据事物的局部特征建立微分方程,而后通过解微分方程把握事物的整体变化规律.

例 2 碳 14 是放射性物质,衰变速度与该物质的含量成比例.设在时刻 $t = 0$ 时,其含量为 A_0 ,求碳 14 在任意时刻 t 的含量 $f(t)$.

解 碳 14 的衰减速度就是 $f(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{df(t)}{dt}$,从而由题设条件可建立微分方程

$$\frac{df(t)}{dt} = -kf(t).$$

其中 $k > 0$,为衰变比例常数,等式右端的负号是由于 $f(t)$ 随时间 t 的增加而减少.

将上述方程分离变量后,得

$$\frac{df(t)}{f(t)} = -k dt.$$

两端积分,得

$$\ln|f(t)| = -kt + C_1,$$

即

$$f(t) = \pm e^{-kt+C_1} = \pm e^{C_1} e^{-kt}.$$

记 $C = \pm e^{C_1}$,于是方程的通解为

$$f(t) = Ce^{-kt}.$$

由初始条件可得

$$A_0 = Ce^0 = C,$$

所以

$$f(t) = A_0 e^{-kt}.$$

这就是上册 § 3.3 例 7 中碳 14 含量的函数模型.

以上两例中的微分方程都可以写成两个变量及其导数(或微

分)分别分离在等式两边的形式.

一般地,形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (10.8)$$

的方程称为可分离变量的微分方程. 当 $g(y) \neq 0$ 时, (10.8) 可写成变量分离的形式

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (10.9)$$

这种类型的微分方程的解法, 只需对(10.9)两端求积分即可.

例 3 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解.

解 这是可分离变量的方程. 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = 2xdx.$$

两端积分, 得

$$\ln|y| = x^2 + C_1,$$

从而

$$|y| = e^{x^2+C_1} = e^{C_1}e^{x^2},$$

即

$$y = \pm e^{C_1}e^{x^2}.$$

因 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数, 把它记作 C , 于是可得方程的通解

$$y = Ce^{x^2}.$$

以后为了运算方便起见, 可把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$, 只要注意最后得到的任意常数 C 可取任意实数就行了.

例 4 求微分方程 $y \ln x dx + x \ln y dy = 0$ 的通解.

解 这是可分离变量的方程, 分离变量并积分, 得到

$$\int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{\ln y}{y} dy = C_1.$$

因此原方程的通解为