高 等 学 校 文 科 教 材

文科高等数学教程

下 册

张国楚　徐本顺　主编

教 育 科 学 出 版 社

数学教程

下 册

张国楚　徐本顺　主编

教育科学出版社

编　者

主　编　　张国楚　徐本顺
副主编　　姚孟臣　董奎哲
编　委　　（以姓氏笔划为序）
于义良　王立冬
刘新平　邸继征
张勤海　蔡秉衡

文科高等数学教程

下　册

张国楚　徐本顺　主编

教育科学出版社出版（北京·北太平庄·北三环中路46号 邮编 100088）
新华书店北京发行所发行　　唐山市胶印厂印装
开本 850×1168毫米　1/32　印张 12.125　字数 31万
1994年10月第1版　1996年6月第2次印刷
印数 5001—10000册

ISBN　7—5041—1620—3/G·1597　　定价：14.00元

目　录

第十章 微分方程
——描述事物局部平衡关系的数学模型

历史使人聪明，诗歌使人机智，数学使人精细，哲学使人深邃，道德使人严肃，逻辑与修辞使人善辩。

——培根

自然界的统一性显示在关于各种现象领域的微分方程式的'惊人的类似'中①.

——列宁

微分方程是在微积分的基础上发展起来的. 在§8.1提及的牛顿字谜中“反之从流率求流量”一语就涉及到微分方程.

微分方程是数学分析的重要分支，它是从微观入手，通过变量与变化率的关系研究客观世界物质运动的数学模型，因而是从局部出发窥知全局的有效的数学工具，是人类探索世界奥妙的有力武器. 海王星就是依据微分方程的解被天文学家用望远镜按图索骥发现的. 微分方程在物理学、化学、生物学、天文、经济、考古、心

① 列宁：《唯物主义与经验批判主义》，人民出版社，1960，第289页.

理学等范围广泛的自然科学和社会科学中都得到极有价值的应用.

本章只介绍微分方程的一般概念，一阶、二阶微分方程的解法及其应用.

§10.1 一般概念

先看两个例子.

例1 已知曲线上各点的切线斜率等于该点横坐标的二倍，且过点(1,2).求此曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y=f(x)$，$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，依题意，在局部任意一点处有

$$\frac{dy}{dx}=2x. \tag{10.1}$$

这是一个含有导数的等式.

方程(10.1)两端对 x 积分，得

$$y=\int 2x\,dx,$$

即

$$y=x^2+C \quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{10.2}$$

由于曲线过点(1,2)，故把 $x=1,y=2$ 代入(10.2)，得

$$2=1^2+C,$$

由此确定 $C=1$. 于是所求的曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{10.3}$$

例2 以初速 v_0 垂直上抛一物体，设此物体的运动只受重力影响，试求它所经过的路程 s 与时间 t 的函数关系.

解 由于重力加速度为$\frac{d^2s}{dt^2}$，依牛顿运动第二定律，得关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g. \tag{10.4}$$

这是一个含有二阶导数的等式.

(10.4)两边对 t 积分,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-g\int\mathrm{d}t=-gt+C_1. \tag{10.5}$$

再对 t 积分一次,得

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{10.6}$$

由题设可知,$t=0$ 时,$s=0,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0$. 分别代入(10.5)和(10.6)式,得

$$v_0=0+C_1,$$

$$0=0+0+C_2,$$

由此解得 $C_1=v_0,C_2=0$. 于是(10.6) 式变为

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2. \tag{10.7}$$

这就是所求路程 s 与时间 t 的函数关系.

从上面两个例子可以看出,许多实际问题的解决首先要在局部范围内找出含变量变化率 —— 导数的等式. 然后通过积分找出变量间的函数关系. 为了便于讨论这类问题,以下给出微分方程的定义和有关概念.

定义 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程叫做**微分方程**. 有时简称为**方程**. 如(10.1) 和(10.4) 都是微分方程.

未知函数为一元函数的微分方程叫做**常微分方程**①. 上面的两个例子都是常微分方程.

微分方程所包含的未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**. 如(10.1) 是一阶微分方程,(10.4) 是二阶微分方程.

---

① 第十二章将介绍多元函数及多元函数的偏导数等概念. 含未知多元函数及其偏导数的方程叫做**偏微分方程**.

满足微分方程的函数叫做**微分方程的解**. 即把此函数代入微分方程后，使该方程成为恒等式.

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，那么，这样的解叫做微分方程的**通解**(或**一般解**). 例如(10.2)是(10.1)的通解，(10.6)是(10.4)的通解.

在通解中，若指定任意常量取某定值，或利用已知条件求出任意常数值所得的解叫做**特解**. 如(10.3)是(10.1)的特解，(10.7)是(10.4)的特解. 确定特解的条件叫做**初始条件**. 例如在例2中 $t = 0$ 时 $s = 0, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0$ 是方程(10.4)的初始条件.

通解的形式一般是含 x, y 和任意常数的方程，在几何上，它通常表示平面上具有某种共同性质的无穷多条曲线. 这些曲线的全体叫做**积分曲线族**. 特解则表示曲线族中某一条特定的曲线. 例如微分方程(10.1)的通解 $y = x^2 + C$ 表示一族抛物线，这些抛物线上对应于同一横坐标的那些点处的切线的斜率均等于该横坐标的二倍. 而特解 $y = x^2 + 1$ 只表示通过点(1,2)的一条抛物线.

§10.2 一阶微分方程

形如

$$y' = f(x)$$

的一阶微分方程是最简单的一阶微分方程，它的解可通过直接积分而求得，称为**可直接积分的微分方程**.

顺便提及，形如

$$y^{(n)} = f(x)$$

的 n 阶微分方程的解也可通过逐次积分直接求得，也称为**可直接积分的微分方程**. 求解时每积分一次，添加一个任意常数.

例1 求微分方程 $y'' = \sin x$ 的通解.

解 方程 $y''=\sin x$ 的两边对 x 积分一次，得

$$y'=\int\sin x\mathrm{d}x+C_1,$$

即

$$y'=-\cos x+C_1.$$

再积分一次，得

$$y=-\sin x+C_1x+C_2.$$

现考虑一阶微分方程的其他类型及其求解方法.

2.1 可分离变量的微分方程

例 1 已知一向量场中每一点处的向量垂直于向径，求此向量场.

解 建立如图 10.1 所示的坐标系. 设 $M(x,y)$ 为向量场中任意一点. 由题设条件可知，向量 $\overrightarrow{MN}$ 垂直于向径 $\overrightarrow{OM}$，即向量场在 M 处的切线 MN 垂直于线段 OM，显然它们的斜率互为负倒数，于是有

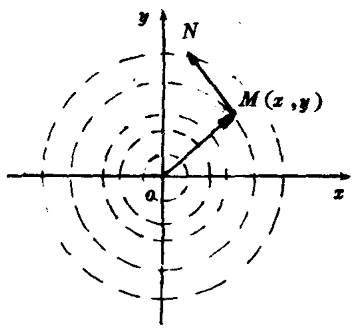

图 10.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}.$$

该方程右端包含变量 x 和 y，不能直接积分，作如下变形

$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$

使左端仅含变量 y，右端仅含变量 x. 这一步骤称为**分离变量**. 于是，两端同时积分，得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{C^2}{2}.$$

化简得

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

该积分曲线族是以原点为圆心，任意常数 $C(C \geqslant 0)$ 为半径的同心圆，它就是所求满足题设条件的向量场.

由本例可知，我们可以根据事物的局部特征建立微分方程，而后通过解微分方程把握事物的整体变化规律.

例 2　碳 14 是放射性物质，衰变速度与该物质的含量成比例. 设在时刻 $t = 0$ 时，其含量为 A_0，求碳 14 在任意时刻 t 的含量 $f(t)$.

解　碳 14 的衰减速度就是 $f(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$，从而由题设条件可建立微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -kf(t).$$

其中 $k > 0$，为衰变比例常数，等式右端的负号是由于 $f(t)$ 随时间 t 的增加而减少.

将上述方程分离变量后，得

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)} = -k\mathrm{d}t.$$

两端积分，得

$$\ln|f(t)| = -kt + C_1,$$

即

$$f(t) = \pm \mathrm{e}^{-kt+C_1} = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-kt}.$$

记　$C = \pm \mathrm{e}^{C_1}$，于是方程的通解为

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-kt}.$$

由初始条件可得

$$A_0 = C\mathrm{e}^0 = C,$$

所以

$$f(t) = A_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

这就是上册 § 3. 3 例 7 中碳 14 含量的函数模型.

以上两例中的微分方程都可以写成两个变量及其导数(或微

分)分别分离在等式两边的形式.

一般地,形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{10.8}$$

的方程称为**可分离变量的微分方程**. 当 $g(y)\neq 0$ 时,(10.8)可写成变量分离的形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x. \tag{10.9}$$

这种类型的微分方程的解法,只需对(10.9)两端求积分即可.

例 3 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 这是可分离变量的方程. 分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x.$$

两端积分,得

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

从而

$$|y|=\mathrm{e}^{x^2+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2},$$

即

$$y=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}.$$

因 $\pm\,\mathrm{e}^{C_1}$ 仍是任意常数,把它记作 C,于是可得方程的通解

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}.$$

以后为了运算方便起见,可把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$,只要注意最后得到的任意常数 C 可取任意实数就行了.

例 4 求微分方程 $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 这是可分离变量的方程,分离变量并积分,得到

$$\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y=C_1.$$

因此原方程的通解为