

255705

解 析 几 何

張 楚 宴 編



高等教育出版社

3192
1143

255705

3192
1143



解 析 几 何

張 楚 賓 編

高 等 教 育 出 版 社

本書內容包括平面解析几何、立体解析几何、行列式和向量代数初步等,且各章附有习题及其答案。

本書是作为测量和制图专业的教材而写的,因此取材比一般工学院用的略多一些(如关于椭圆的阿普隆尼奥斯定理、斜坐标、椭圆面的扁率、尤拉角等)。編者在叙述方面,力求簡潔所以內容較多而篇幅不大。

本書讀者对象,主要是高等工业学校的测量专业和制图专业的学生,工学院其他专业的学生也可参考。

解 析 几 何

張 楚 賓 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內景福寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

中国人民大学印刷厂印裝 新华書店发行

統一書号13010·661 开本850×1168¹/₃₂ 印張7²/₁₆

字数184,000 印数0001—7,000 定价(6) 0.76

1959年8月第1版 1959年8月北京第1次印刷

序

這本書是把解析几何作为测量和制圖專業的应用工具而編写的。由于测量学和制圖学应用到的解析几何知識比較多，本書在取材方面比較广泛，如关于橢圓的阿普隆尼奧斯定理、斜坐标、橢圓面的扁率、尤拉角等这些在测量学或制圖学中常用到的材料，在高等工业学校用的解析几何教程或参考書中一般都沒有。但是，如果去掉这几节材料，本書也适用于非測量專業的讀者。

本書在理論闡述方面力求簡單明了，并尽量用圖形来輔助說明問題；在文字敘述方面也力求簡潔。因此，它所包含的內容虽稍多，而篇幅却不大。

本書的第一章是行列式，如果某些專業不需要的話，可以刪去。第二章到第七章是平面解析几何，第八章到第十二章是立体解析几何。平面、立体两部分的内容結構，是用前后对照的平行方法編写的，对照起来讀，便于理解和記憶。

在立体解析几何中，專有一章向量代数基础，而且作了适当的运用。这是考虑到向量是物理学和各类工程学中的一个常用的运算工具，所以在本書里用了一定的篇幅来講解它。

考虑到在微积分学中要詳細講解函数、極限和切綫等的理論和应用，为了避免重复，在編写本書时，舍弃了“切綫”这一部分材料；而在本書中有关曲綫方程和曲面方程所用到的函数概念，也只取用初等代数中关于这方面的知識；至于在双曲綫的漸近綫中用到的一点点極限概念，則采用直观法来解决。

在編写本書时，参考了下列書籍：

- 1) И. И. 勃立瓦洛夫：解析几何学(苏步青譯)。

- 2) H. M. 別斯金: 解析几何学教程(王自楷、高鈞兰譯)。
- 3) 樊映川等: 高等数学講义。
- 4) 施孔成: 解析几何与代数。
- 5) 孙澤瀛: 解析几何学。
- 6) H. B. 叶菲莫夫: 解析几何簡明教程(胥長辰譯)。
- 7) C. П. 芬尼可夫: 解析几何(叶述武等譯)。
- 8) H. C. 米海里孙: 高等数学簡明教程(东北工学院数学教研組譯)。
- 9) Smith, Gale: Analytic Geometry.
- 10) Smith, Gale, Neeley: New Analytic Geometry.
- 11) B. B. 德罗茲捷茨基: 数学教程(張楚賓、党誦詩、汪廼栋、朱新美譯)。
- 12) 石鴻壽: 平面解析几何学。

而主要的参考資料是 H. H. 勃立瓦洛夫著解析几何学。

特別要感謝的是北京測繪学院数学教研組的同志們在审阅本書时作了大力的修改或提出了一些寶貴的意見。

由于編者知識有限,本書的缺点或錯誤在所难免,請讀者提出批評指正。

編 者

1959.5. 北京

目 录

序	vii
---------	-----

第一章 行列式和綫性方程組	1
---------------------	---

§1. 二阶行列式	1
§2. 三阶行列式	3
§3. 子行列式与代数余子式	6
§4. 高阶行列式	9
§5. 行列式的主要性質	11
§6. 綫性方程組(克萊姆規則)	16
§7. 含有两个三元齐次綫性方程的方程組	18
§8. 含有三个三元齐次綫性方程的方程組	20
§9. 三元綫性非齐次方程組的一般研究	23
第一章習題	27

第二章 平面直角坐标法·曲綫及其方程	29
--------------------------	----

§10. 軸和軸上的綫段	29
§11. 直綫上的坐标	31
§12. 平面上的直角坐标系	32
§13. 平面上两点間的距离	34
§14. 定比分点	35
§15. 两有向直綫間的夹角	36
§16. 平面射影原理	37
§17. 有向綫段在坐标軸上的射影·直綫的斜率	40
§18. 三角形的面积	41
§19. 平面上曲綫方程的概念	42
§20. 曲綫的截距、对称与范围	46
§21. 两曲綫的交点	48
第二章習題	49

第三章 直綫	52
--------------	----

§22. 直綫方程的次数·直綫方程的斜截式	52
§23. x, y 的一次方程的几何意义	53
§24. 直綫方程的各种形式	54
§25. 直綫方程各种形式的互化	57

§ 26. 关于直线某些问题的讨论	59
§ 27. 直线族与直线束	65
第三章习题	67
第四章 圆锥曲线的基本理论	71
§ 28. 圆	71
§ 29. 椭圆	72
§ 30. 双曲线	75
§ 31. 抛物线	80
§ 32. 作为圆锥截线的曲线	82
§ 33. 圆锥曲线的离心率和准线	83
§ 34. 圆锥曲线的直径	85
§ 35. 关于椭圆的阿普隆尼奧斯定理	89
第四章习题	92
第五章 直角坐标变换和一般二次方程的研究	96
§ 36. 坐标变换问题的提出	96
§ 37. 平移	96
§ 38. 旋转	98
§ 39. 坐标变换的一般情况	100
§ 40. 缺 xy 项的二次方程的研究	101
§ 41. 一般二次方程的平移问题	108
§ 42. 二次曲线方程的判别与化简	105
第五章习题	111
第六章 曲线的参数方程	113
§ 43. 曲线的参数方程	113
§ 44. 参数方程的作图法	114
§ 45. 同一曲线的参数方程的多样性	115
§ 46. 用参数方程解决轨迹问题	116
第六章习题	120
第七章 斜坐标·极坐标	121
§ 47. 斜坐标概念	121
§ 48. 把共轭直径作为斜坐标轴的椭圆方程	122
§ 49. 极坐标概念	124
§ 50. 极坐标与直角坐标的关系	126
§ 51. 曲线的极坐标方程	127
§ 52. 极坐标方程的作图法	130
第七章习题	133

第八章 空間直角坐标·曲面方程与曲綫方程	135
§ 53. 空間直角坐标	135
§ 54. 空間两点間的距离	137
§ 55. 曲面方程的概念	138
§ 56. 球面	140
§ 57. 母綫平行于坐标軸的柱面	140
§ 58. 空間曲綫	142
§ 59. 空間曲綫的参数方程	143
第八章習題	145
第九章 向量代数基础	146
§ 60. 数量与向量	146
§ 61. 向量的加法和減法	147
§ 62. 向量与数量的乘法	148
§ 63. 向量的射影	150
§ 64. 向量在直角坐标軸上的射影	151
§ 65. 向量的模·方向余弦	154
§ 66. 数量积	155
§ 67. 两向量間的夹角	158
§ 68. 向量积	160
§ 69. 三向量的乘积	165
第九章習題	169
第十章 空間平面和直綫	171
§ 70. 通过一定点且已知法綫向量的平面方程	171
§ 71. x, y, z 的一次方程的几何意义	172
§ 72. 平面的一般方程的研究	173
§ 73. 平面方程的其他形式	174
§ 74. 平面方程各种形式的互化	177
§ 75. 二平面的夹角及其互相垂直或平行的条件	179
§ 76. 点到平面的距离	181
§ 77. 空間直綫的方程	183
§ 78. 化空間直綫的一般方程成标准式	186
§ 79. 空間二直綫間某些問題的討論	187
§ 80. 空間直綫与平面之間某些关系的討論	190
第十章習題	193
第十一章 特殊曲面	197
§ 81. 旋轉曲面	197
§ 82. 橢圓面	198

§ 83. 地球橢圓面	200
§ 84. 單叶双曲面	203
§ 85. 双叶双曲面	204
§ 86. 橢圓拋物面	206
§ 87. 双曲拋物面	207
§ 88. 柱面	209
§ 89. 錐面	210
§ 90. 直紋面与直母綫	212
第十一章習題	214
第十二章 空間直角坐标变換 · 球面坐标 · 柱面坐标	215
§ 91. 空間直角坐标变換	215
§ 92. 尤拉角	218
§ 93. 球面坐标与柱面坐标	221
第十二章習題	222
習題答案	224

第一章 行列式和綫性方程組

§ 1. 二阶行列式

設有二元綫性方程組

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (1)$$

用初等代数的消元法求这方程組的解, 以 b_2 乘第一式, b_1 乘第二式, 然后相減, 得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \quad (2)$$

同理得 $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$

如果 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 那末, 方程組(1)的解为:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases} \quad (2')$$

(2)' 式中分子、分母的结构非常相像, 为了便于記憶, 我們引进一种新的概念和記号。

定义: $A_1B_2 - A_2B_1$ 称为二阶行列式, 用記号 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ 表示,

即 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1,$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 称为行列式的“元素”, 或簡称为“元”; 乘积 A_1B_2 ,

$-A_2B_1$ 叫做行列式的“項”; 記号 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ 中, 縱排叫“行”, 橫排叫“列”。因上式有二行二列, 所以叫二阶行列式。

这样,方程组(1)的解便写成:

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases} \quad (3)$$

可以看出,上二式的分子的规律是:从分母中将(1)式的 x 的系数 a_1, a_2 或 y 的系数 b_1, b_2 换成(1)的常数项 c_1, c_2 ,使得(3)式中的分子。这里必须假设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 。

例 1. 求 $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$ 之值。

解: $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (-3) \times (-6) - 5 \times (-4) = 18 + 20 = 38.$

例 2. 解方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 5x + 4y = 11. \end{cases}$

解: 利用(3)式,得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{9 \times 4 - 11 \times (-3)}{2 \times 4 - 5 \times (-3)} = \frac{69}{23} = 3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2 \times 11 - 5 \times 9}{2 \times 4 - 5 \times (-3)} = \frac{-23}{23} = -1.$$

§ 2. 三阶行列式

三阶行列式的概念,如同二阶行列式一样,可以从三元綫性方程組的解引出来。考察三元綫性方程組:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (4)$$

为了求这个方程組的解,我們用 $b_2c_3 - b_3c_2$, $b_3c_1 - b_1c_3$, $b_1c_2 - b_2c_1$ 分別乘这三个方程而后相加,于是得:

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x + \\ & + (b_1b_2c_3 - b_1b_3c_2 + b_2b_3c_1 - b_2b_1c_3 + b_3b_1c_2 - b_3b_2c_1)y + \\ & + (c_1b_2c_3 - c_1b_3c_2 + c_2b_3c_1 - c_2b_1c_3 + c_3b_1c_2 - c_3b_2c_1)z = \\ & = d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1. \end{aligned}$$

容易看出,上式中 y 和 z 的系数为 0, 因此

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_2c_1 - d_3b_1c_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_1c_3}.$$

用同样的方法,可得 y 和 z , 即

$$\begin{cases} x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_2c_1 - d_3b_1c_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_1c_3}, \\ y = \frac{a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_1d_3c_2 - a_2d_2c_1 - a_3d_1c_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_1c_3}, \\ z = \frac{a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_2d_1 - a_3b_1d_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_1c_3}. \end{cases} \quad (5)$$

(上列式子中的分母当然不能为 0)。像 (5) 式右端的分子和分母看来是很难记忆的,而它們的结构形式却是一样的,于是我們引进三阶行列式的概念和記号。

定义: $A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_1B_3C_2 - A_2B_2C_1 - A_3B_1C_3$

称为三阶行列式，用记号 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ 表示，即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 - A_3 B_2 C_1.$$

其中 $A_1, A_2, A_3, B_1, \dots, C_3$ 称为这行列式的“元素”或“元”，上式右端各项叫做行列式的“项”；行列式中纵排叫“行”，横排叫“列”。因为它有三行三列，故称三阶行列式。

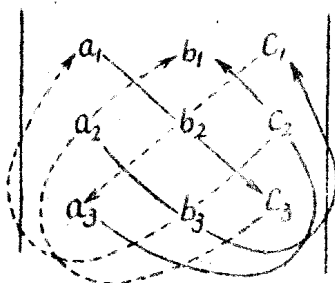
这样，方程组(4)的解便可写成

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \\ z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \end{cases} \quad (6)$$

容易看出,从分母中将原方程(4)的 x 的系数,或 y 的系数,或 z 的系数换成方程(4)的常数项 d_1, d_2, d_3 , 则得(6)式中的分子。

这里必须假设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 。

关于行列式的计算方法,下节我们将要详细讨论,这里介绍一种三阶行列式专用的计算方法——对角线法。由上面看出,三阶行列式的计算规律可以用下列图线指示出来,即



其中沿实线的三元的乘积为正,沿虚线的三元的乘积为负。

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) \times 3 + 1 \times 1 \times (-1) +$
 $+ 1 \times 1 \times 1 - (-1) \times (-3) \times 1 -$
 $- 1 \times 1 \times 1 - 1 \times 1 \times 3 = -16.$

例 2. 解联立方程组:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ 7x - 8y - 5z = -24. \end{cases}$$

解: 利用公式(6), 得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -24 & -8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{aligned} &= [6 \times (-1) \times (-5) + 3 \times (-8) \times 1 + (-24) \times 1 \times 1 - \\ &- 1 \times (-1) \times (-24) - 1 \times 3 \times (-5) - 6 \times (-8) \times 1] / \\ &/ [1 \times (-1) \times (-5) + 2 \times (-8) \times 1 + 7 \times 1 \times 1 - \\ &- 1 \times (-1) \times 7 - 1 \times 2 \times (-5) - 1 \times (-8) \times 1] = \\ &= 21/21 = 1, \end{aligned}$$

同样得

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -24 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{vmatrix}} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & -24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{vmatrix}} = 3.$$

§3. 子行列式与代数余子式

三阶行列式的展开式里的六项中，我们把有公因子的两项放在一起，而且把这公因子提出来，便可得到行列式更紧凑的展开

式。例如在行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的展开式中，分别将含有 a_1, b_1, c_1 的

項放在一起,并把 a_1, b_1, c_1 提出来,便有:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + \\ + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_1 c_3 = \\ = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

这样的展开式叫做行列式按照第一列的展开式; 因为 a_1, b_1, c_1 都是行列式第一列的元素。同样, 可以得到行列式按照其他列或行的展开式, 例如按照第二列展开:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

又例如按照第一行展开:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

其余类推。

显然可以看出上述的“展开”就是把一个三阶行列式化成带有系数的三个二阶行列式之和。这样, 比原来行列式降低了一阶的小行列式, 特称为所带元素(系数)的“子行列式”。这种子行列式很容易求得, 例如 a_1 的子行列式就是把 a_1 所在的行与列从原行列式中划掉后所剩下的小行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; b_2 的子行列式就是把 b_2 所在的行与列划掉后所剩下的小行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 。一般, 某元素的子行列式是由原行列式中划去该元素所在的行与列而得的小行

列式。至于系数前的正负号的确定,我们可以列成下面的表:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

即,第一个元素(左上角)处总是为正,全盘是正负相间地安排着。根据这个表,系数前的正负号是这样确定的:行列式中某个元素所在的位置,其行数与列数的和为偶数时,该元素与其子行列式相乘的项之前添正号;为奇数时,添负号。例如, c_2 所在的位置,其行数与列数的和为 $3+2=5$, 所以 c_2 与它的子行列式的乘积前添负号。即 $-c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 。

$$\text{例: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

这是按照第一列展开的。

为了写起来简单些,在行列式展开式中,把某元素与其子行列式之积的正负号算作子行列式的符号,这样带有正负号的子行列式,叫做该元素的“代数余子式”,或叫做“代数补式”,通常以该元素的大写字母表示;例如 a_1, b_1, c_1 的代数余子式分别以 A_1, B_1, C_1 表示,即

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_1 = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

以后我们常用 Δ 表示行列式,例如三阶行列式:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

于是将这三阶行列式按列展开时,可写为: