解析几何

張楚宾編

高等教育出版社

解　析　几　何

張楚宾編

高等教育出版社

本書內容包括平面解析几何、立体解析几何、行列式和向量代数初步等，且各章附有習題及其答案。

本書是作为測量和制圖專业的教材而写的，因此取材比一般工学院用的略多一些（如关于橢圓的阿普隆尼奧斯定理、斜坐标、橢圓面的扁率、尤拉角等）。編者在叙述方面，力求簡潔所以內容較多而篇幅不大。

本書讀者对象，主要是高等工业学校的測量專业和制圖專业的学生，工学院其他專业的学生也可参考。

解 析 几 何

張楚宾 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第054号）

中国人民大学印刷厂印裝　新华書店发行

統一書号13010·661　开本 850×1168 $^{1}/_{32}$　印張 $7^{6}/_{16}$

字数 181,000　印数 0001—7,000　定价（6）¥0.76

1959年8月第1版　1959年8月北京第1次印刷

序

这本書是把解析几何作为測量和制圖專业的应用工具而編写的。由于測量学和制圖学应用到的解析几何知識比較多，本書在取材方面比較广泛，如关于橢圓的阿普隆尼奥斯定理、斜坐标、橢圓面的扁率、尤拉角等这些在測量学或制圖学中常用到的材料，在高等工业学校用的解析几何教程或参考書中一般都沒有。但是，如果去掉这几节材料，本書也适用于非測量專业的讀者。

本書在理論闡述方面力求簡單明了，并尽量用圖形来輔助說明問題；在文字叙述方面也力求簡潔。因此，它所包含的內容虽稍多，而篇幅却不大。

本書的第一章是行列式，如果某些專业不需要的話，可以删去。第二章到第七章是平面解析几何，第八章到第十二章是立体解析几何。平面、立体两部分的內容結构，是用前后对照的平行方法編写的，对照起来讀，便于理解和記忆。

在立体解析几何中，專有一章向量代数基础，而且作了适当的运用。这是考虑到向量是物理学和各类工程学中的一个常用的运算工具，所以在本書里用了一定的篇幅来講解它。

考虑到在微积分学中要詳細講解函数、極限和切綫等的理論和应用，为了避免重复，在編写本書时，舍弃了"切綫"这一部分材料；而在本書中有关曲綫方程和曲面方程所用到的函数概念，也只取用初等代数中关于这方面的知識；至于在双曲綫的漸近綫中用到的一点点極限概念，則采用直观法来解决。

在編写本書时，参考了下列書籍：

1）И. И. 勃立瓦洛夫：解析几何学（苏步青譯）。

2) H. M. 别斯金：解析几何学教程(王白楷、高鈉兰譯)。

3) 樊映川等：高等数学講义。

4) 施孔成：解析几何与代数。

5) 孙澤瀛：解析几何学。

6) H. B. 叶非莫夫：解析几何簡明教程(胥長辰譯)。

7) C. П. 芬尼可夫：解析几何(叶述武等譯)。

8) H. C. 米海里孙：高等数学簡明教程(东北工学院数学教研組譯)。

9) Smith, Gale: Analytic Geometry.

10) Smith, Gale, Neeley: New Analytic Geometry.

11) B. B. 德罗兹捷茨基：数学教程(張楚宾、党誦詩、汪廼栋、朱新美譯)。

12) 石鴻翥：平面解析几何学。

而主要的参考資料是 П. И. 勃立瓦洛夫著解析几何学。

特别要感謝的是北京測繪学院数学教研組的同志們在审閱本書时作了大力的修改或提出了一些宝貴的意見。

由于編者知識有限，本書的缺点或錯誤在所难免，請讀者提出批評指正。

編　者

1959.5. 北京

目　　录

第一章　行列式和綫性方程組

§1. 二阶行列式

設有二元綫性方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

用初等代数的消元法来这方程組的解，以 b_2 乘第一式，b_1 乘第二式，然后相减，得

$$\left.\begin{aligned} &(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1, \\ \text{同理得}\qquad &(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 那末，方程組(1)的解为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \tag{2'}$$

(2)′ 式中分子、分母的結构非常相像，为了便于記忆，我們引进一种新的概念和記号。

定义: $A_1B_2-A_2B_1$ 称为二阶行列式，用記号 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ 表示，

即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-A_2B_1,$$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 称为行列式的"元素"，或簡称为"元"；乘积 $A_1B_2-A_2B_1$ 叫做行列式的"項"；記号 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ 中，縱排叫"行"，横排叫"列"。因上式有二行二列，所以叫二阶行列式。

这样，方程組(1)的解便写成:

$$
\left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

可以看出，上二式的分子的规律是：从分母中將(1)式的 x 的系数 a_1, a_2 或 y 的系数 b_1, b_2 换成(1)的常数項 c_1, c_2，便得(3)式中的分子。这里必須假設 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$。

例 1. 求 $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$ 之值。

解: $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (-3)\times(-6)-5\times(-4)=18+20=38.$

例 2. 解方程組 $\begin{cases} 2x-3y=9, \\ 5x+4y=11. \end{cases}$

解: 利用(3)式，得

$$
x=\frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{9\times 4-11\times(3)}{2\times 4-5(-3)}=\frac{69}{23}=3,
$$

$$
y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{2\times 11-5\times 9}{2\times 4-5(-3)}=\frac{-23}{23}=-1.
$$

§2. 三阶行列式

三阶行列式的概念，如同二阶行列式一样，可以从三元綫性方程組的解引出来。考察三元綫性方程組：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{4}$$

为了求这个方程組的解，我們用 $b_2c_3-b_3c_2$, $b_3c_1-b_1c_3$, $b_1c_2-b_2c_1$ 分别乘这三个方程而后相加，于是得：

$$\begin{aligned}(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x+ \\ +(b_1b_2c_3-b_1b_3c_2+b_2b_3c_1-b_2b_1c_3+b_3b_1c_2-b_3b_2c_1)y+ \\ +(c_1b_2c_3-c_1b_3c_2+c_2b_3c_1-c_2b_1c_3+c_3b_1c_2-c_3b_2c_1)z= \\ =d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1.\end{aligned}$$

容易看出，上式中 y 和 z 的系数为 0，因此

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3}.$$

用同样的方法，可得 y 和 z，即

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3}, \\ y=\dfrac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2-a_3d_2c_1-a_2d_1c_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3}, \\ z=\dfrac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_3b_2d_1-a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3}. \end{cases} \tag{5}$$

（上列式子中的分母当然不能为 0）。像(5)式右端的分子和分母看来是很难記忆的，而它們的結构形式却是一样的，于是我們引进三阶行列式的概念和記号。

定义： $A_1B_2C_3+A_2B_3C_1+A_3B_1C_2-A_1B_3C_2-A_3B_2C_1-A_2B_1C_3$

称为三阶行列式，用記号$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$表示，即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 +$$

$$+ A_3B_1C_2 - A_1B_3C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3.$$

其中 $A_1, A_2, A_3, B_1, \cdots, C_3$ 称为这行列式的"元素"或"元"，上式右端各项叫做行列式的"项"；行列式中縱排叫"行"，横排叫"列"。因为它有三行三列，故称三阶行列式。

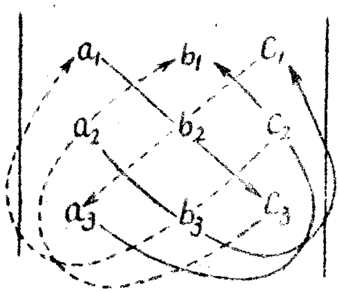
这样，方程組(4)的解便可写成

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

容易看出，从分母中将原方程(4)的 x 的系数，或 y 的系数，或 z 的系数换成方程(4)的常数项 d_1, d_2, d_3，則得(6)式中的分子。

这里必須假設 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$。

关于行列式的計算方法，下节我們将要詳細討論，这里介紹一种三阶行列式專用的計算方法——对角綫法。由上面看出，三阶行列式的計算規律可以用下列圖綫指示出来，即



其中沿实綫的三元的乘积为正，沿虛綫的三元的乘积为負。

例 1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-3)\times 3 + 1\times 1\times(-1) + $$

$$+1\times 1\times 1-(-1)\times(-3)\times 1-$$

$$-1\times 1\times 1-1\times 1\times 3=-16.$$

例 2. 解联立方程組：

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y+z=3, \\ 7x-8y-5z=-24. \end{cases}$$

解： 利用公式(6)，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&1&1\\3&1&1\\-24&-8&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\7&-8&-5\end{vmatrix}}=$$

$$=[6\times(-1)\times(-5)+3\times(-8)\times1+(-24)\times1\times1-$$
$$-1\times(-1)\times(-24)-1\times3\times(-5)-6\times(-8)\times1]/$$
$$/[1\times(-1)\times(-5)+2\times(-8)\times1+7\times1\times1-$$
$$-1\times(-1)\times7-1\times2\times(-5)-1\times(-8)\times1]=$$
$$=21/21=1,$$

同样得
$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&6&1\\2&3&1\\7&-24&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\7&-8&-5\end{vmatrix}}=2,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&6\\2&-1&3\\7&-8&-24\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\7&-8&-5\end{vmatrix}}=3。$$

§3. 子行列式与代数余子式

三阶行列式的展开式里的六項中，我們把有公因子的两項放在一起，而且把这公因子提出来，便可得到行列式更紧凑的展开式。例如在行列式$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$的展开式中，分别将含有$a_1, b_1, c_1$的

項放在一起，并把 a_1, b_1, c_1 提出来，便有：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 +$$

$$+ a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 =$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

这样的展开式叫做行列式按照第一列的展开式；因为 a_1, b_1, c_1 都是行列式第一列的元素。同样，可以得到行列式按照其他列或行的展开式，例如按照第二列展开：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

又例如按照第一行展开：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

其余类推。

显然可以看出上述的“展开”就是把一个三阶行列式化成带有系数的三个二阶行列式之和。这样，比原来行列式降低了一阶的小行列式，特称为所带元素(系数)的“子行列式”。这种子行列式很容易求得，例如 a_1 的子行列式就是把 a_1 所在的行与列从原行列式中划掉后所剩下的小行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；$b_2$ 的子行列式就是把 b_2 所在的行与列划掉后所剩下的小行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$。一般，某元素的子行列式是由原行列式中划去该元素所在的行与列而得的小行

列式。至于系数前的正負号的确定，我們可以列成下面的表：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

即，第一个元素(左上角)处总是为正，全盘是正負相間地安排着。根据这个表，系数前的正負号是这样确定的：行列式中某个元素所在的位置，其行数与列数的和为偶数时，該元素与其子行列式相乘的項之前添正号；为奇数时，添負号。例如，c_2 所在的位置，其行数与列数的和为 $3+2=5$，所以 c_2 与它的子行列式的乘积前添負号。即 $-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$。

例： $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

这是按照第一列展开的。

为了写起来簡單些，在行列式展开式中，把某元素与其子行列式之积的正負号算作子行列式的符号，这样带有正負号的子行列式，叫做該元素的“代数余子式”，或叫做“代数补式”，通常以該元素的大写字母表示；例如 a_1, b_1, c_1 的代数余子式分别以 A_1, B_1, C_1 表示，即

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad B_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

以后我們常用 Δ 表示行列式，例如三阶行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

于是将这三阶行列式按列展开时，可写为：