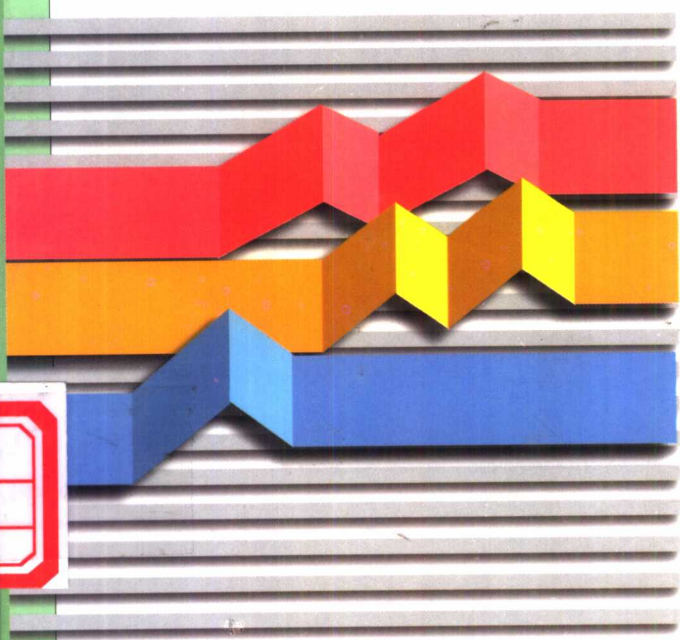
应用随机过程

钱敏平 龚光鲁 著



北京大学出版社

书　　名：应用随机过程
著作责任者：钱敏平　龚光鲁
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-03894-1/O·423
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62753160
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　12 印张　290 千字
1998 年 10 月第一版　1998 年 10 月第一次印刷
定　　价：20.00 元

前　言

近年来，有关随机过程的基本知识与方法，不仅为概率统计专业所必需，也为计算数学、物理、生物、化学等自然科学，以及工程、经济、管理，以至人文科学等广阔领域的研究工作所需要. 为适应这种需要，各高校不仅为概率统计专业大学本科生开设应用随机过程课程，也纷纷为上述其他专业的研究生或高年级大学生开设应用随机过程课. 笔者与许多这方面的任课教师讨论、交换意见，同感缺少一本适用于此类课程的教材，因而，尽管深知编写这样一本教材是十分艰难的，迫于教学的急需仍然勉为其难作一尝试.

鉴于上述写作意图与读者对象，本书着重于随机过程的概念、思想方法、计算与实例，而回避测度论水平的数学严格性. 希望使只具有高等数学及初等概率论基础知识的读者就能阅读与学习其主要部分. 书中努力收集各方面的应用模式，将笔者见到的文献资料中好的应用实例加工、简化为宜于教学的材料，写入正文或列入习题. 特别如模拟退火——优化的概率方法、神经网络的随机模型、隐马氏模型、吉布斯抽样等新近迅速发展起来的方向是随机过程的极好应用，本书力图简要地阐明其方法与思想，对读者起一个抛砖引玉的作用. 为了便于有兴趣的读者进一步学习，每章后设有附录，指出相应的尚待深入讨论或严格化的理论与实际问题及参考书与文献.

已故的我国概率统计专业的开创者许宝禄教授指出：与物理或其他领域对随机现象研究不同，概率论中随机变量的概念中暗含随机自变元 ω——基本事件（或者说轨道），这个 ω 的引入至关重要，它使许多含糊不清的问题，争论不休的悖论得以澄清与明晰；使许多复杂的问题得到正确分析的起点. 但是在许多问题中，

人们又并不去仔细追究这些 ω 究竟是什么，只是明确有此变元，从而得到概率空间的明确概念. 本书虽则回避测度论的严格性，但仍引入概率空间的准确定义，使得我们的研究具有概率论的韵味.

全书末尾设统一的参考文献目录，按作者的英语或汉语拼音字母次序统一排列. 本书是以北京大学概率统计系本科生的“应用随机过程”课的讲义为基础，扩充、增补与修改而成的. 本书中不少内容是笔者直接由文献改写的，错误与不妥必定不少，恳请读者批评与指正，以利修改订正.

笔者得以完成本书，首先要感谢北大概率统计系，由于他们的安排和鼓励，使得笔者有机会在教学实践中完成本书的写作和修改. 还要感谢各次听课的同学，由于他们仔细阅读原讲义而帮助我们纠正了一些不妥之处. 特别要感谢陈大岳同志，他在使用原讲义的教学实践过程中发现了不少不妥之处，并提出了许多宝贵意见. 刘朝峰、张奎和李晓满等同志对本书的作图排版打印，付出了辛勤的劳动，在此深表谢意.

目　录

第一章 概论与例

§1.1 什么是随机过程?

在概率论中,我们看到随机变量的概念是很重要的,但是在大量实际问题中,往往还需要研究随机变量是怎样随时间参数而变化的.也就是说要考虑依赖参数的一族随机变量.

将一个电话交换机在$[0,t](t>0)$时间区间内收到的呼唤次数记为ξ_t,它是一个随机变量,但随t变化,它又是时间t的函数.又例如将某城市在第n个单位时间的人口总数记为$x_n(n=0,1,2,\cdots)$,那么要研究此城市人口发展变化就要将$\{x_n;n=0,1,2,\cdots\}$这一族随机变量作为整体来研究,它是一个离散参数的随机过程.又如在研究流体的湍流时,将时刻t流体在位置(x,y,z)的速度记为$\boldsymbol{u}(t,x,y,z)(t>0,x,y,z$为实数),它就是一个随机向量,但研究湍流时就需要对不同的时间t与不同位置的速度作为一个整体来研究.

定义 1.1(随机过程) 设T是一个指标集,随机变量族$\boldsymbol{x}=\{x_t;t\in T\}$称为随机过程,其中$x_t$(固定$t$)是定义于概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上,取值于集合$S$的随机变量(向量).$S$称为该随机过程的状态空间.

在上面的定义中T通常可取为Z_+(非负整数集),Z(整数集),R_+(非负实数集),R(实数集)及它们与一个区间$[a,b)$的交.也可以取为Z_+^n(n元非负整数集),R_+^n(n元实数集),Z^n及R^n等,当$n>1$时,相应的随机过程通常叫随机场.本书主要讨论$n=1$的情况,它与$n>1$的情况的重要区别是:$n=1$时T有一个天然的"全序",它与随机过程的发展是一致的,而$n>1$时T中不存在这

样一个全序. 当 T 是 Z^n 的子集时,称相应的随机过程是离散参数的;而 T 当是 R^n 的子区间、矩形或超矩形则称之为连续参数的.

对应于每个固定的样本点 $\omega\in\Omega$,定义 1.1 中的 $\{x_t(\omega)\}$ 就是一个以 T 为定义域取值于 S 的向量值函数,我们通常称之为此随机过程的一条轨道,或一个实现.

§1.2 随机过程的分布与坐标过程

正如从概率论的观点研究随机变量(向量)着重于研究 它的分布一样,对随机过程我们关心的也是它的统计特性——分布. 但是这里我们面对的是无穷多个随机变量,表征它们的"联合分布",就不能简单地照搬有限个随机变量的做法,只把个数改为无穷如法泡制.

例 1.1 考虑 Bernoulli 序列 $\xi\triangleq\{\xi_n:n=0,1,2,\cdots\}$,其中 ξ_n 是在相互独立地进行的一系列掷币试验中第 n 次掷得的结果:$\xi_n=1$ 表示掷得正面,$\xi_n=-1$ 表示掷得反面. 如果按有限个随机变量联合分布那样,考虑概率:

$$\pi\triangleq P(\xi_0=\omega_0,\xi_1=\omega_1,\cdots,\xi_n=\omega_n,\cdots)$$

($\omega_i=\pm1,i=0,1,\cdots$)是不行的. 事实上,由于钱币正反对称,

$$P(\xi_n=1)=P(\xi_n=-1)=\frac{1}{2},$$

于是

$$\pi=\lim_{n\to\infty}P(\xi_0=\omega_0,\xi_1=\omega_1,\cdots,\xi_n=\omega_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0.$$

这样,无论试验结果 $\omega\triangleq(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots)$ 是什么都得到零概率,从而找不到任何有意义的统计规律来表达与 ξ 有关的可观测事件的概率. 自然地,我们转而考虑在任意有限个时刻的随机变量的联合分布

$$f_{i_1,i_2,\cdots,i_m,a_1,\cdots,a_m}\triangleq P(\xi_{i_k}=a_k;k=1,2,\cdots,m)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^m \tag{1.1}$$

($m\geqslant 1, i_1, i_2, \cdots, i_m$ 为 m 个不同非负整数，$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 各为 $+1$ 或 -1). 这一族分布决定了 $\xi=\{\xi_n; n=0,1,2,\cdots,n,\cdots,\}$ 有关的全部可观测(有概率的)事件的概率.

例 1.2 考虑流体的速度 $\boldsymbol{u}\triangleq\{u(t,x,y,z)(t\geqslant 0, x,y,z$ 为实数$\}$，我们也考虑流体在有限个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 及有限个位置 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$ 的速度的联合分布，并用这一族分布：

$$F_{t_1,\cdots,t_m,x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n}(v_{1,1,1},v_{1,1,2},\cdots,v_{3,m,n})$$
$$\triangleq P(u_l(t_i,x_j,y_j,z_j)\leqslant v_{l,j,z}, l=1,2,3; i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n) \tag{1.2}$$

(其中 $t_i\geqslant 0, x_j, y_j, z_j$ 为实数；$u(t,x,y,z)=(u_1(t,x,y,z), u_2(t,x,y,z), u_3(t,x,y,z))$)来刻画 $\boldsymbol{u}$ 这个随机场的统计特性.

其实，在通常的应用问题中，人们往往是先由分析或经验，得到如上的随机过程在有限个不同参数值处的那些随机变量的联合分布，而并未事先已知存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上定义的随机变量族(这一点在以下我们处理具体随机过程的例子时还会再仔细分析). 事实上，正如初等概率论中把 Ω 取作一切可能结果的集合一样，我们这里对例 1.1，自然可取

$$\Omega=\{\omega=(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots);\omega_i=\pm 1, i=1,2,\cdots\}.$$

对例 1.2，可取

$$\Omega=\{\omega=(\underline{v}_{t,x,y,z}; t\geqslant 0, x,y,z\in R); \underline{v}_{t,x,y,z}$$
$$=(v^{(1)}_{t,x,y,z}, v^{(2)}_{t,x,y,z}, v^{(3)}_{t,x,y,z})\},$$

其中每个 ω 可看成是$[0,+\infty)\times R^3$ 上一个三维向量值的函数. 于是，一个很基本的问题就是：已知上面那样的有限维分布族，是否一定可以设法构造 Ω 上一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的随机变量族(随机过程)，使得它在任意有限个参数值的那些随机变量具有上述已知的有限维联合分布. 从理论上，著名的 Kolmogorov 定

理可以相当一般地对此作肯定的答复. 由于这个问题不可回避地要用到测度论的知识，我们在下面讨论中不再仔细论证，只是承认这个事实，并在概率空间已经构造好的基础上去作进一步研究.

从另一个角度看随机过程，它也可当作以函数为取值的随机变元，也就是说，对固定的现实 ω, $\boldsymbol{x}(\omega)$ 可以看成一个从参数集 T 到状态空间的映射；$\boldsymbol{x}$ 以多大的概率随机地取值于不同的函数（映射），则是由上述有限维联合分布决定的. 总之，一个随机过程

$$\boldsymbol{x} = (x_t(\omega); t \in T)$$

当固定 $t \in T$ 是一个随机变量（向量）；而固定 $\omega \in \Omega$, $x_{\cdot}(\omega)$ 是一个 T 到状态空间的函数（映射）；它的统计规律由全体有限个参量的随机变量组的联合分布唯一决定.

§1.3 简单对称随机徘徊及其坐标过程

本节中，我们以简单对称随机徘徊为例构造随机过程，以使读者对随机过程有更清晰的认识.

一个简单随机徘徊，即一个粒子在直线上每隔单位时间独立地向左或向右以均等的机会走一步. 若考虑第 n 步时粒子所在的位置，它就是一个随机过程. 但是为了将这样一个直观的物理模型纳入上面的数学框架中，就需要给出概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，并定义其上的随机变量族 $\{\xi_n\}$ 来表示上述随机过程.

首先考虑概率空间，按照基本事件就是一切可能的随机试验的结果这一想法，对随机徘徊的一切可能结果的集合是

$$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots); \omega_i \text{ 是整数}\},$$

其中 ω_n 表示走了第 n 步粒子所在位置，由于每次只能走一步，自然若取一步的步长为单位，ω_n 只能取整数值. 令 $\mathscr{F}$ 为包含一切由有限个时间的位置限定的事件类的全体事件

$$\mathscr{C} = \{C = \{\omega : \omega_{i_1} = l_1, \omega_{i_2} = l_2, \cdots, \omega_{i_m} = l_m\}; m \geqslant 1, l_i \text{ 为整数}\} \tag{1.3}$$

的最小事件体(σ-代数),记为$\sigma(\mathscr{C})$. 再按Kolmogorov定理(见§1.4)决定一个$\mathscr{F}$上的概率测度P,使得$\mathscr{C}$中的集合与上述的物理模型符合,即当对$\forall\ k, l_k - l_{k-1} + (i_k - i_{k-1})$为偶数时

$$P(\omega;\omega_{i_1} = l_1, \omega_{i_2} = l_2, \cdots, \omega_{i_m} = l_m) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m, \quad (1.4)$$

其中

$$\begin{aligned} &\omega_0 = l_0, \quad p_k = C_n^m \left(\frac{1}{2}\right)^m, \\ &n = i_k - i_{k-1}, \ m = \frac{(l_k - l_{k-1} + n)}{2}. \end{aligned} \quad (1.4)'$$

而其他情形(1.4)左边的概率为0. 这是因为从时刻i_{k-1}到i_k,其中m步向右,$n-m$步向左($n = i_k - i_{k-1}$),总的位移是$l_k - l_{k-1} = 2m - n = m + (-(n-m))$. 这个事件的概率按二项分布应为(1.4)$'$中给出的$p_k$,而由于独立性,(1.4)中的联合分布应为各$p_k(k=1,2,\cdots,m)$的乘积. 于是,我们有了概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$. 若

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots) \in \Omega,$$

令

$$\xi_n(\omega) = \omega_n \quad (n \geqslant 0), \quad (1.5)$$

我们就得到了一列随机变量$\{\xi_n(\omega); n \geqslant 0\}$,它正是我们要的随机徘徊的数学表示.

对于概率空间中满足(1.5)的随机过程叫做此概率空间的坐标过程.

上面我们得到了随机徘徊的一个坐标过程表示. 当然随机徘徊并不一定要是一个坐标过程. 例如,按例1.1中的Bernoulli序列我们也可以得到一个坐标过程:令

$$\Omega_1 = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots); \omega_n = \pm 1, \forall\ n \geqslant 0\}; \quad (1.6)$$

及

$$\begin{aligned} \mathscr{C} = \{C = \{\omega; \omega_{i_k} = a_k; k = 1, \cdots, m\}; \\ m \geqslant 1, a_k = \pm 1 (k = 1, \cdots, n)\}, \end{aligned}$$

$$P(C) = P\{\omega:\omega_k = a_k; k = 1,\ldots,m\} = \left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

$\mathscr{F}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的最小事件体. 同样由 Kolmogorov 定理,按(1.1)可唯一决定$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个概率测度 P,从而得到概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$. 对$\forall\ \omega\in\Omega$,令

$$\zeta_n(\omega) = \omega_n \quad (\omega = (\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots)) \quad (n \geqslant 0),$$

于是随机变量族 $\zeta = \{\zeta_n; n = 0,1,\cdots\}$ 就是刻画 Bernoulli 序列的数学模型的一个坐标过程.

事实上,若 $\{\zeta_n; n = 0,1,\cdots\}$ 是例 1.1 中的贝努里序列,令

$$\eta_n(\omega) = \eta_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n}\zeta_k(\omega),$$

则 $\eta = \{\eta_n; n = 0,1,\cdots\}$ 也是刻画随机徘徊的一个随机过程,但它不是坐标过程.

§1.4 附　录

1. 一个事件体(σ-代数)$\mathscr{F}$ 指某集合 Ω(全体基本事件)的一个子集类,满足:

$F.1.$　$\mathscr{F}$ 含空集$\varnothing$与全集 Ω.

$F.2.$　对集合的可列并封闭(若 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$,则 $\bigcup_{N=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$).

$F.3.$　对集合余封闭(若 $A\in\mathscr{F}$,则 $A^c\in\mathscr{F}$).

2. 包含集类 $\mathscr{C}$ 的最小事件体 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$指一个事件体满足条件:$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$,而且若有事件体 $\tilde{\mathscr{F}}\supset\mathscr{C}$,则 $\mathscr{F}\subset\tilde{\mathscr{F}}$. 显然含 $\mathscr{C}$ 的最小事件体唯一.

3. 设 $\Omega=\{\omega=\{\omega_t;t\in T\};\omega_t\in\mathscr{S}\}$,$T$ 可为实数集 R,非负实数集 R^+,整数集 Z,非负整数集 Z^+,状态空间 S 为可列集. 定义柱集类 $\mathscr{C} = \{\{\omega:\omega_{t_k} = a_k, k = 1,2,\cdots,n\}; n \geqslant 1, a_k \in S, t_k \in T\}$.

若 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小事件体 $\sigma(\mathscr{C})$，则 $\mathscr{F}$ 上的任一概率 P 由它在 $\mathscr{C}$ 上的取值唯一确定.

4. 对 3 中的 Ω 与 T，当 S 为实数空间，或 d-维实向量时，柱集类

$$\mathscr{C}=\{\{\omega:\omega_{t_k}\leqslant x_k;k=1,2,\cdots,n\};\\ n\geqslant 1,t_k\in T,x_k\text{ 为 } d \text{ 维实向量}\}$$

(其中向量 $\omega_{t_k}\leqslant x_k$ 表示各分量分别满足不等式)，则 3 中结论仍成立.

5. (Kolmogorov 定理)　设有分布函数族

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n);n\geqslant 1,x_i\in R^d,t_i\in T,i=1,\cdots,n\}$$

(其中 R^d 表示 d-维实数值向量)满足相容性条件

$K.1)$ $F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_{m_1},t_{m_2},\cdots,t_{m_n}}(x_{m_1},x_{m_2},\cdots,x_{m_n})$ 对 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意排列 $(m_1,\cdots,m_n)$ 成立(意思是把时间次序与自变量次序同时交换，应有相同的概率分布值)；

$K.2)$ $F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=F_{s_1,s_2,\cdots,s_m}(y_1,\cdots,y_m)$，其中 $m<n$，$\{s_1,\cdots,s_m\}$ 是 $\{t_1,\cdots,t_n\}$ 的子集，

$$y_k=\begin{cases}x_k, & \text{当 } t_k\in\{s_1,\cdots,s_m\};\\ +\infty, & \text{当 } t_k\overline{\in}\{s_1,\cdots,s_m\}\end{cases}$$

(意思是在 $s_1,\cdots,s_m$ 中抹去若干时刻得到 $t_1,\cdots,t_n$，则在 $t_1,\cdots,t_n$ 时刻的联合分布应与 $s_1,\cdots,s_m$ 各时刻 $(m>n)$ 的联合分布在被抹去的时刻不加限制 $(x_k=+\infty)$ 的值相同).

于是存在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上唯一的概率测度 P，在 P 下对于 $\{\xi_t(\omega)\triangleq\omega_t(t\in T)\}$，$(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$ 的联合分布为 $F_{t_1,\cdots,t_n}$，其中

$$\Omega=\{\omega=(\omega_t;t\in T);\omega_t\in R^d\},$$

$\mathscr{F}$ 是含 Ω 的一切柱集的最小事件体(σ-代数)(柱集定义见 3 与 4).

Kolmogorov 定理告诉我们，从物理或直观模型的分析得到的有限维联合分布族，可以构造一个概率空间，及其上的坐标过程，

使其有限个时间参数的那些随机变量的联合分布与物理或直观的分析所得的一致.即这个数学模型不会引起矛盾.

6. 本节的严格的理论需有测度论的基础,具体可参见:汪嘉冈:《现代概率论基础》(复旦大学出版社,1988)与钱敏平,龚光鲁:《随机过程论》(北京大学出版社,1997).

§1.5 小　　结

本章以简单随机徘徊为例阐明随机过程的概念,即描述一族依赖于时间参数或空间参数随机地变化的量的数学模型.也就是把随机过程看成是一个概率空间上的一族依赖时间参数的随机变量.并进而指出描述随机过程的统计特征的是所有对应有限个时间参数的有限个随机变量的联合分布族.同时还指出了从实际问题得到概率空间和随机过程的建模思想.

习　　题

1. 试构造 Bernoulli 序列(例 1.1)的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及坐标过程.

2. 设粒子作非对称的随机徘徊:每步向右或向左随机地走一步,第 k 步向左与向右走的概率分别是 p_k 与 q_k($p_k,q_k\geqslant 0$, $p_k+q_k=1$).试构造概率空间及其上的随机过程来表达复杂随机徘徊.

3*. 试构造一个概率空间及其上坐标过程$\{\xi_t,t\in R^+\}$,使得 ξ_t 是独立增量的正态过程:即满足

1) 对任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, $\xi_{t_2}-\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}-\xi_{t_{n-1}}$相互独立;

2) $\xi_t-\xi_s(t>s)$的分布是均值为 0,方差为 $t-s$ 的正态分布.

第二章　随机徘徊与布朗运动

在第一章§1.3中我们介绍了一维对称简单随机徘徊，本章讨论较一般的随机徘徊模型及其性质与应用.

考虑一个粒子在d-维空间格点(记为Z^d)中的随机运动：粒子每隔单位时间相互独立地走一步，每步可沿任意一个坐标方向走一个单位长.设粒子沿第k个坐标轴正向或负向走一个单位的概率分别是p_k与q_k，则

$$\sum_{k=1}^{d}(p_k+q_k)=1.$$

于是第k步粒子的位移是一个随机变量：

$$x_k(\omega)=\begin{cases}\underline{e}_1, & \text{概率为 } p_1;\\ -\underline{e}_1, & \text{概率为 } q_1;\\ \cdots & \cdots\\ \underline{e}_d, & \text{概率为 } p_d;\\ -\underline{e}_d, & \text{概率为 } q_d,\end{cases} \tag{2.1}$$

其中$\underline{e}_1,\cdots,\underline{e}_d$分别表示沿第$1,\cdots,d$个坐标方向的单位向量，$p_k$，$q_k\geqslant 0(0\leqslant k\leqslant d)$.

为了要容纳所有的(无限个)相互独立的$x_k(\omega)(k=1,2,\cdots)$，我们只要取$\Omega=\{(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots);\omega_0\in Z^d,\omega_k\in\{\pm\underline{e}_1,\pm\underline{e}_2,\cdots,\pm\underline{e}_d\},k\geqslant 1\}$，而$\mathscr{F}$为包含有限个时间任意限定条件的一切事件的最小事件体，并定义乘积概率P：

$$\begin{aligned}&P(\omega;\omega_0\in A_0,\omega_1\in B_1,\cdots,\omega_n\in B_n)\\ &=P_0(A_0)\prod_{k=1}^{n}P(B_k),\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中$n\geqslant 0$，$P_0(\cdot)$是Z^d上任何一个概率分布，它代表随机徘徊的

初始值 ω_0 的分布；$B_k \subset \{\pm e_1, \pm e_2, \cdots, \pm e_d\}$，$P(B_k)$ 是 $x_k(\omega)$ 的分布(2.1)：

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1, & -\underline{e}_1, & \cdots, & \underline{e}_d, & -\underline{e}_d \\ p_1, & q_1, & \cdots, & p_d, & q_d \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

所决定的概率，于是在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的坐标过程即可取为

$$x_k(\omega) = \omega_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

令

$$\xi_n(\omega) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k(\omega), \tag{2.4}$$

就是我们想得到的简单随机徘徊的数学表达.

在概率论与应用的文献中随机徘徊还可以有更广义的理解：形如(2.4)的独立同分布随机变量的和($\omega_0 = 0$). 也就是说一般的随机徘徊可以不局限于每次沿坐标轴方向走一个单位长(如可以有各种跳动). 在本章中我们主要讨论简单随机徘徊的性质与应用. 简单随机徘徊是一个很典型的随机运动模型，在生物、物理、化学、计算方法等许多方面都有大量应用.

§2.1 简单随机徘徊的分布与首次返回(或离开)时间

1. 简单随机徘徊的分布

设简单随机徘徊在时刻 m 的位置为 x，在时刻 $n+m$ 的位置为 y，则经过 n 个单位时间它的位移是 $y-x$，这个事件的概率是多项分布：

$$p_n(y-x) = \sum \binom{n}{k_1, h_1; k_2, h_2; \cdots; k_d, h_d} p_1^{k_1} q_1^{h_1} p_2^{k_2} q_2^{h_2} \cdots p_d^{k_d} q_d^{h_d}, \tag{2.5}$$

其中和号取遍满足以下条件的各项：