中国科学技术大学21世纪教改系列教材

交换代数导引

宋光天 编著

中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学 21 世纪教改系列教材

交换代数导引

宋光天　编著

中国科学技术大学出版社

2002·合肥

内 容 简 介

本书讲述交换代数的基本理论和方法，在介绍经典的 Noether 环和 Dedekind 整环理论的同时，重点突出了模与范畴以及局部化方法. 这些内容都是学习代数几何和代数数论的公共代数基础，同时也为学习同调代数等其他数学学科打下基础.

学过近世代数课程的读者均可学习该教材.

本书可作为数学系研究生公共基础课教材和数学系高年级本科生选修课教材，也可供数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

交换代数导引/宋光天编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2002.8

ISBN 7-312-01351-1

Ⅰ.交… Ⅱ.宋… Ⅲ.交换环 Ⅳ.O187.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078715 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:4.875 字数:130 千
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
印数:1－2000 册
定价:8.00 元

前　言

交换代数是研究交换环的一门代数学科，它起源于两个经典数学分支：代数几何和代数数论，作为这两门学科的公共代数工具逐步发展成一门独立的学科，成为从事数学研究所不可缺少的基础之一.

中国科学技术大学数学系多年来一直为数学系研究生和高年级本科生开设交换代数课程，作者本人也曾五次讲授该课程. 1995 年以来，该课程列为数学系研究生的公共基础课程之一. 本书是为这一公共基础课程编写的教材. 学过近世代数的读者均可学习本教材.

本书在讲述交换代数经典的 Noether 环和 Dedekind 整环理论的同时，突出模论和局部化方法. 书中关于模论的许多定理及其证明，稍加调整即可适用于非交换环上的模. 本书也介绍了范畴和函子，侧重介绍了 Hom 函子、张量积函子和局部化函子. 这些内容也是学习同调代数所必需的预备知识.

本书是按一学期 80 学时(4 学分)来安排课程内容和习题的. 通常 60 学时可以讲完全部内容，剩余学时可选讲 1～2 个专题，例如 Gröbner 基理论等.

本书是在冯克勤教授的鼓励和支持下完成的，实际上是以冯克勤教授所著《交换代数基础》为蓝本撰写的，作者在此向他表示感谢. 在教学过程中，郭学军博士和讨论班的同学们提出了许多修改意见，在此一并致谢. 作者也期望听到各方面的意见，以利于改进今后的教学工作.

宋光天

2002 年春于合肥

目　录

第 1 章　环、模和范畴的基本知识

1.1　环的理想和根

在近世代数课程中，我们已学过有关环的基本知识，如理想、商环、环同态和同态基本定理等，这些都是学习交换代数的必要基础. 本节将复述其中的一些重要概念，明确所采用的术语和记号，并介绍一些新知识.

若不加声明，本书中所说的**环**均指有单位元 1_R（常简记为 1）的交换环；**环同态** $f:R\to S$ 均保持单位元，即 $f(1_R)=1_S$；环 R 的**子环**均含有 R 的单位元 1_R.

符号 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示自然数集、整数环、有理数域、实数域和复数域.

1.1.1　理想的运算

设 I,J 是环 R 的理想. R 的子集

$$I+J=\{a+b\mid a\in I,\ b\in J\},$$

$$I\cap J=\{a\mid a\in I\text{ 且 }a\in J\},$$

$$IJ=\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\mid a_i\in I,b_i\in J,n\in\mathbb{N}\},$$

$$(I:J)=\{x\in R\mid xJ\subseteq I\}$$

均是 R 的理想，分别称为理想 I 与 J 的**和**、**交**、**积**、**商**. 零理想 0 与 J 的商 $(0:J)$ 叫做 J 的**零化理想**，记作 $\mathrm{Ann}_R(J)$. 主理想 aR，$a\in R$，的零化理想也称为元素 a 的**零化理想**，记作 $\mathrm{Ann}_R(a)$.

不难验证，环 R 的理想的和、交、积运算均满足交换律和结合律，且有如下的分配律：

$$I(J+K)=IJ+IK,$$

其中 I,J,K 均是 R 的理想. 进而可定义理想 I 的**幂** I^n 为 n 个 I 的积，并约定 $I^0=R$.

环 R 的两个理想 I 和 J 称为是**互素**的，如果 $I+J=R$. 若环 R 的理想 $I\neq R$，则称 I 是环 R 的**真理想**.

对于环 R 的任意一个理想族 I_α，$\alpha\in A$，定义它们的**和**为

$$\sum_{\alpha\in A} I_\alpha=\left\{\sum_{\alpha\in A} x_\alpha \mid x_\alpha\in I_\alpha,\ \alpha\in A,\text{且只有有限个 } x_\alpha\neq 0\right\}.$$

这是环 R 中包含所有 I_α，$\alpha\in A$，的最小理想.

1.1.2 素理想和极大理想

环 R 的理想 P 称为**素理想**，如果 $P\neq R$，且满足条件：若 $a,b\in R$，且 $ab\in P$，则 $a\in P$ 或 $b\in P$. 环 R 的理想 M 称为**极大理想**，如果 $M\neq R$，且 M 与 R 之间不存在 R 的理想；即若 I 是 R 的理想，且 $M\subseteq I\subseteq R$，则 $I=M$ 或 $I=R$.

我们知道，环 R 的真理想 I 是素(极大)的，当且仅当商环 R/I 是整环(域). 于是，极大理想必是素理想.

非零环是否含有极大理想？答案是肯定的. 证明中要用到集合论中的一个基本结果，叫做 Zorn 引理，今后我们还将多次使用它.

集合 S 上的二元关系 $\leqslant$ 称为 S 上的一个**部分序**(或**偏序**)，如果对于任意 $x,y,z\in S$，均有

(1) $x\leqslant x$；

(2) 若 $x\leqslant y$，$y\leqslant x$，则 $x=y$；

(3) 若 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则 $x\leqslant z$.

此时称 $(S,\leqslant)$ 为一个**部分序集**. 所谓“部分”是指，在 S 中可能有元素 x 和 y，使得 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 均不成立，此时称 x 与 y 是**不**

可比较的. 如果 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 中至少有一个成立，则称 x 与 y 是**可比较**的. 设 T 是部分序集$(S, \leqslant)$的子集. 如果 T 中任意两个元素可比较，则称 T 是一个**链**. S 中的元素 x 称为子集 T 的一个**上界**，如果对于每个 $t \in T$ 均有 $t \leqslant x$. T 中元素 x 称为 T 的一个**极大(小)元**，如果 T 中每个与 x 可比较的元素 y，均有 $y \leqslant x$ $(x \leqslant y)$；称 $x \in T$ 是 T 的**最大(小)元**，如果对于 T 中的每个元素 y，均有 $y \leqslant x (x \leqslant y)$. 一个部分序集$(S, \leqslant)$称为是**良序集**，如果 S 的每个非空子集均有最小元. 注意，良序集必是一个链，反之未必.

Zorn 引理　设$(S, \leqslant)$是一个非空部分序集，若 S 中的每个链在 S 中有上界，则 S 必有极大元.

Zorn 引理有许多等价形式，例如下面的良序化原理和超穷归纳原理，以及选择公理.

良序化原理　对于任意集合 S 均存在 S 的一个部分序 $\leqslant$，使得$(S, \leqslant)$是良序集.

超穷归纳原理　设 T 是良序集$(S, \leqslant)$的子集，如果对于每个 $x \in S$，$\{y \in S \mid y < x\} \subseteq T$ 蕴含 $x \in T$，则 $T = S$.

下面用 Zorn 引理证明极大理想的存在性.

定理 1.1.1　设 I 是环 R 的真理想，则存在 R 的极大理想 M，使得 $M \supseteq I$.

证明　设 Σ 是 R 中所有不等于 R 且包含 I 的理想构成的集合. Σ 关于理想的包含关系 $\subseteq$ 构成一个非空部分序集(因为 $I \in \Sigma$). 设 T 是 Σ 中的一个链. 令 $J = \bigcup_{X \in T} X$，则 J 是 R 的包含 I 的理想；且 $J \neq R$. 这是因为，假定 $J = R$，则 $1 \in J$，于是存在 $X \in T$ 使得 $1 \in X$，从而 $X = R$，这与 $X \in T \subseteq \Sigma$ 矛盾. 所以 $J \in \Sigma$. 又由于对于任意 $X \in T$ 均有 $X \subseteq J$，故 J 是 T 在 Σ 中的上界. 由 Zorn 引理，Σ 必有极大元 M. M 就是 R 的极大理想，且包含 I. $\square$

环 R 的所有素理想构成的集合称为 R 的**素谱**，记作 Spec R；

R 的所有极大理想构成的集合称为 R 的**极大谱**，记作 Max R. 于是，对于每个非零环 R，Spec $R \supseteq$ Max $R \neq \varnothing$.

命题 1.1.2 设 I 是环 R 的理想，$P_1, \cdots, P_n$ 是 R 的素理想. 若 $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$，则存在 $j \in \{1, \cdots, n\}$，使得 $I \subseteq P_j$.

证明 不妨设对于每个 $j \in \{1, \cdots, n\}$，$I \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} P_i$，且 $n \geqslant 2$. 假定对于每个 j 均有 $I \not\subseteq P_j$，则对于每个 j，存在 $a_j \in I \backslash (\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} P_i)$，且 $a_j \in P_j$. 设 $a = a_1 + a_2 a_3 \cdots a_n \in P_j$（某个 j）. 若 $j > 1$，则 $a_1 = a - a_2 a_3 \cdots a_n \in P_j$，这矛盾. 若 $j = 1$，则 $a_2 a_3 \cdots a_n = a - a_1 \in P_1$，从而存在某个 $j > 1$，使得 $a_j \in P_1$，这也矛盾. 所以，存在某个 j，使得 $I \subseteq P_j$. □

1.1.3 素根和 Jacobson 根

一个环 R 的所有幂零元构成的集合记作 Nil(R).

定理 1.1.3 (Krull) 对于任意非零环 R，Nil(R) 是 R 的所有素理想的交.

证明 记 R 的所有素理想的交为 N. 若 $x \in$ Nil(R)，则存在 $n \geqslant 1$，使得 $x^n = 0 \in N$. 于是对于每个素理想 P 均有 $x^n \in P$，从而 $x \in P$. 所以 Nil$(R) \subseteq N$.

若 $x \notin$ Nil(R)，记 $S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$，则 $S \cap 0 = \varnothing$. 令 $\Sigma = \{I$ 是 R 的理想 $\mid S \cap I = \varnothing\}$，则 Σ 关于理想的包含关系 $\subseteq$ 构成一个非空部分序集. 设 T 是 Σ 中一个链，则 $J = \bigcup_{I \in T} I$ 是 R 的理想，且 $S \cap J = \varnothing$，从而 J 是 T 在 Σ 中的一个上界. 由 Zorn 引理，Σ 有极大元 P. 下证 P 是素理想. 若 $a, b \in R \backslash P$，由 P 的极大性，存在 $m, n \in \mathbb{N}$，使得 $x^m \in aR + P$，$x^n \in bR + P$. 于是 $x^{m+n} \in (aR + P)(bR + P) \subseteq abR + P$. 这表明 $ab \notin P$. 所以 P 是素理想. 再由 $x \notin P$ 可知 $x \notin N$.

所以，$\mathrm{Nil}(R)=N$. □

注　零环 R 的素谱为空集，此时约定 $\mathrm{Nil}(R)=R$.

由上述定理可知，$\mathrm{Nil}(R)$是环 R 的理想，叫做 R 的**素根**(或 **Nil 根**). 当 $\mathrm{Nil}(R)=0$ 时，称 R 为**半素环**.

环 R 的所有极大理想的交称为 R 的 **Jacobson 根**，记作 $\mathrm{Rad}(R)$. 由于 $\mathrm{Spec}\,R\supseteq\mathrm{Max}\,R$，故 $\mathrm{Rad}(R)\supseteq\mathrm{Nil}(R)$. 因此，也常称 $\mathrm{Rad}(R)$为大根，而称 $\mathrm{Nil}(R)$为小根.

注　对于零环 R，约定 $\mathrm{Rad}(R)=R$.

环 R 的乘法可逆元称为 R 的**单位**，R 的所有单位构成的乘法群称为 R 的**单位群**，记作 $\mathrm{U}(R)$.

下述命题给出 $\mathrm{Rad}(R)$一个元素形式的刻画.

命题 1.1.4　对于任意非零环 R，均有

$$\mathrm{Rad}(R)=\{x\in R\mid 1-xR\subseteq\mathrm{U}(R)\}.$$

证明　记上式右边为 I. 若 $x\notin I$，则存在 $y\in R$ 使得 $1-xy\notin\mathrm{U}(R)$，据定理 1.1.1，$1-xy$ 含于 R 的某个极大理想 M 中. 假定 $x\in\mathrm{Rad}(R)$，则 $x\in M$，从而 $1=xy+(1-xy)\in M$. 这是一个矛盾. 所以 $x\notin\mathrm{Rad}(R)$. 这表明 $I\supseteq\mathrm{Rad}(R)$.

反之，若 $x\notin\mathrm{Rad}(R)$，则存在 R 的极大理想 M 使得 $x\notin M$. 于是 $xR+M=R$，故存在 $y\in R$ 和 $m\in M$，使得 $xy+m=1$. 于是 $1-xy=m\in M$，所以 $1-xy\notin\mathrm{U}(R)$，从而 $x\notin I$. 这表明 $I\subseteq\mathrm{Rad}(R)$. □

1.1.4　理想的根

设 I 是环 R 的理想. 令

$$\sqrt{I}=\{a\in R\mid 存在\ n\geqslant 1,\ 使得\ a^n\in I\}.$$

不难验证，$\sqrt{I}$是 R 的包含 I 的理想，叫做 I 的**根**；且 R 的零理想 0 的根$\sqrt{0}=\mathrm{Nil}(R)$. 这一概念将在第 3 章中出现，它在代数几何中是基本的.

命题 1.1.5 设 $I, I_1, \cdots, I_n$ 是环 R 的理想. 则

(1) $\mathrm{Nil}(R/I)=\sqrt{I}/I$.

(2) $\sqrt{I}$ 是 R 的所有包含 I 的素理想之交.

(3) $\sqrt{I}=R \Leftrightarrow I=R$.

(4) $\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$.

(5) $\sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} I_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\sqrt{I_i}$.

(6) 若 $P\in \mathrm{Spec}\, R$, 则对于每个正整数 n, 均有 $\sqrt{P^n}=P$.

证明 (1) 按定义验证.

(2) 由于 R/I 的素理想一一对应于 R 的包含 I 的素理想, 据定理 1.1.3 和(1), 立得(2).

(3)~(6) 按定义验证. □

1.1.5 局部环和半局部环

仅有一个极大理想的非零环叫做**局部环**, 仅有有限多个极大理想的非零环叫做**半局部环**. 于是, 每个非零有限环均是半局部环.

若 M 是局部环 R 的唯一极大理想, 域 R/M 称为 R 的**剩余类域**. 下述定理给出局部环的一些性质刻画.

定理 1.1.6 设 M 是环 R 的理想, 且 $M\neq R$, 则下列条件等价:

(1) R 是局部环, 且 M 是 R 的唯一极大理想;

(2) $R\backslash M=\mathrm{U}(R)$;

(3) M 是 R 的极大理想, 且 $1+M\subseteq \mathrm{U}(R)$.

证明 (1)⇒(2): 由于 $M\neq R$, 从而 $M\cap \mathrm{U}(R)=\varnothing$, 于是 $R\backslash M\supseteq \mathrm{U}(R)$. 若 $x\notin \mathrm{U}(R)$, 则 $xR\neq R$, 于是由(1), $xR\subseteq M$. 所以 $x\notin R\backslash M$. 这表明 $R\backslash M\subseteq \mathrm{U}(R)$.

(2)⇒(3): 若 R 的理想 I 包含但不等于 M, 由(2), I 必含 R

的单位，从而 $I=R$，所以 M 是 R 的极大理想．若存在 $m\in M$ 使得 $1+m\notin \mathrm{U}(R)$，由(2)，$1+m\in M$．于是 $1\in M$，这矛盾．所以(3)成立．

(3)⇒(1)：假定 R 有极大理想 $L\neq M$，则 $L+M=R$．于是存在 $l\in L$，$m\in M$，使得 $l+m=1$．由(3)，$l=1-m\in \mathrm{U}(R)$，从而 $L=R$，这是一个矛盾．□

例　设 p 是素数，则 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 是局部环．

在第 2 章 2.5 节中，将用局部化方法构造出一类局部环．

习　题　1.1

1．设 I，J，K，$I_\alpha(\alpha\in A)$是环 R 的理想．证明：

(1) 若 I 与 J 互素，则 $I\cap J=IJ$．

(2) $((I:J):K)=(I:JK)=((I:K):J)$．

(3) $(\bigcap_{\alpha\in A}I_\alpha:J)=\bigcap_{\alpha\in A}(I_\alpha:J)$，$(I:\sum_{\alpha\in A}I_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}(I:I_\alpha)$．

(4) $\sqrt{I+J}=\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$，$\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}=\sqrt{IJ}$．

(5) $\sqrt{I}$ 与 $\sqrt{J}$ 互素 $\Leftrightarrow I$ 与 J 互素．

2．(**中国剩余定理**)设 $I_1,\cdots,I_n$ 是环 R 的两两互素的理想．证明：

(1) 对于任意 $a_1,\cdots,a_n\in R$，存在 $a\in R$，使得 $a\equiv a_i(\mathrm{mod}\ I_i)$，$i=1,\cdots,n$．

(2) $R/(\bigcap_{i=1}^{n}I_i)\simeq\coprod_{i=1}^{n}(R/I_i)$．

3．设 P 是环 R 的真理想．证明：P 是 R 的素理想 $\Leftrightarrow$ 对于 R 的任意理想 I 和 J，若 $IJ\subseteq P$，则 $I\subseteq P$ 或 $J\subseteq P$．

4．设 P 是环 R 的素理想，I 和 J 是 R 的理想，证明：若 $P=I\cap J$，则 $P=I$ 或 $P=J$．

5．设 R 是环．$\mathrm{Spec}\,R$ 关于包含关系的极小元叫做 R 的**极小素理想**．试用 Zorn 引理证明：非零环必含极小素理想．

6. 证明：有限环和主理想整环中的素理想均是极大理想.

7. 试求 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 和域 k 上的多项式环 $k[x]$ 的素谱、极大谱、素根和 Jacobson 根.

8. 设 R 是环，证明：$\mathrm{Nil}(R/\mathrm{Nil}(R))=0$，$\mathrm{Rad}(R/\mathrm{Rad}(R))=0$.

9. 设 R 是环，若 $x\in\mathrm{Nil}(R)$，$y\in\mathrm{U}(R)$，则 $x+y\in\mathrm{U}(R)$.

10. 设 R 是环，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$. 证明：

(1) $f(x)\in\mathrm{U}(R[x])\Leftrightarrow a_0\in\mathrm{U}(R)$，且 $a_1,\cdots,a_n\in\mathrm{Nil}(R)$.

(2) $f(x)\in\mathrm{Nil}(R[x])\Leftrightarrow a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathrm{Nil}(R)$.

(3) $f(x)$ 是 $R[x]$ 中的零因子 $\Leftrightarrow$ 存在 $a\in R$，$a\neq0$，使得 $af(x)=0$.

(4) $\mathrm{Nil}(R[x])=\mathrm{Rad}(R[x])=\mathrm{Nil}(R)[x]$.

11. 设 R 是环，$R[[x]]$ 是 R 上的形式幂级数环. $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in R[[x]]$. 证明：

(1) $f(x)\in\mathrm{U}(R[[x]])\Leftrightarrow a_0\in\mathrm{U}(R)$.

(2) $\mathrm{Nil}(R[[x]])\subseteq\mathrm{Nil}(R)[[x]]$. 等号是否一定成立？

(3) 若 R 是域，则 $R[[x]]$ 是局部环.

12. 设 $\mathfrak{m}$ 是环 R 的极大理想，$n\geqslant1$. 证明：商环 $R/\mathfrak{m}^n$ 只有一个素理想，从而是局部环.

1.2 模及其基本性质

1.2.1 定义和例

非空集合 M 称为环 R 上的一个**左 R-模**，如果 M 是一个加法 Abel 群，且有 R 与 M 的元素间的乘法

$$R\times M\rightarrow M;\ (r,m)\mapsto rm,$$

满足以下条件：对于任意 $r,s\in R$；$x,y\in M$，均有

(1) $r(x+y)=rx+ry$;

(2) $(r+s)x = rx + sx$;

(3) $(rs)x = r(sx)$;

(4) $1_R x = x$.

也称 R 为模 M 的**系数环**. 对称地, 可给出**右 R-模**的定义, 其系数环 R 作用在模 M 的右边. 每个左 R-模 M 都有一个自然的右 R-模结构, 其系数环 R 在加群 M 上的右作用为 $xr = rx$, $r \in R$, $x \in M$. 如不加声明, 本书中所说的 **R-模**均指左 R-模, 其右 R-模结构均指上述自然的右作用.

若系数环 R 是域, 则 R-模就是域上的线性空间.

由 R-模 M 的定义及线性代数中同样的方法, 不难推导出 M 具有以下性质: 对于任意 $r \in R$, $x \in M$, $n \in \mathbb{Z}$, 均有

(1) $r0_M = 0_M$, $0_R x = 0_M$;

(2) $(-r)x = -(rx) = r(-x)$;

(3) $n(rx) = (nr)x = r(nx)$.

为简便起见, 常将加群 M 的零元 0_M、环 R 的零元 0_R 以及数零均写成 0. 只有一个元素 0 的 R-模叫做**零模**, 也表示成 0.

例 (1) 设 A 为任意一个加法 Abel 群. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a \in A$, 令 $na = a + a + \cdots + a$(n 个 a), $(-n)a = -na$, 且 $0a = 0$. 不难验证, 关于整数环 $\mathbb{Z}$ 在 A 上的这种作用, A 构成一个 $\mathbb{Z}$-模. 所以, 每个 Abel 群可自然地看成 $\mathbb{Z}$-模. 反之, 由定义可知, 每个 $\mathbb{Z}$-模 M 就是加群 M 按上述方式确定的 $\mathbb{Z}$-模.

(2) 环 R 的理想均是 R-模.

(3) 设 $f: R \to S$ 是环同态. 若 M 是 S-模, 对于 $r \in R$ 和 $x \in M$, 定义 $rx = f(r)x$. 不难验证, 这使 M 成为一个 R-模, 这样每个 S-模均可看作 R-模. 特别地, 若 R 是 S 的子环, 则 S 是 R-模.

若 R-模 M 的非空子集 N 对于 M 的运算构成一个 R-模, 则称 N 是 M 的一个**子模**, 换句话说, N 是 M 的子模当且仅当 N 是 M 的非空子集, 且对于任意 $x, y \in N$ 和 $r \in R$, 均有 $x + y \in N$

和 $rx\in N$. 由子模的定义，不难验证，对于任意 R-模 M，均有

(1) M 的子模的子模仍是 M 的子模；

(2) M 的子模(有限个或无限个)的交仍是 M 的子模；

(3) M 的子模的升链并仍是 M 的子模.

设 X 是 R-模 M 的子集. M 的所有包含 X 的子模(M 就是一个)的交 N 称为 M 的**由 X 生成的子模**，且称 X 是子模 N 的一个**生成元集**. 当 $X=\varnothing$ 时，约定 $N=0$. 当 $X=\{a\}$，$a\in M$ 时，$N=\{ra\mid r\in R\}=Ra$，称为由 a 生成的**循环子模**. 当 X 是有限子集时，称 N 是 M 的**有限生成子模**.

设 M_1,M_2 是 R-模 M 的子模. 易知

$$M_1+M_2=\{x+y\mid x\in M_1,\ y\in M_2\}$$

是 M 的子模，叫做 M_1 与 M_2 的**和**. $M_1\cap M_2$ 也是 M 的子模. 不难验证，子模的和与交运算满足交换律和结合律. 对于 R-模 M 的子模族 M_λ，$\lambda\in\Lambda$，定义它们的**和**为

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda=\{\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda\mid x_\lambda\in M_\lambda,\ \lambda\in\Lambda,\text{且只有有限个 } x_\lambda\neq 0\}.$$

设 N 是 R-模 M 的子模，则 N 是 M 的子加群. 定义 R 在商群 M/N 上的作用为

$$r(m+N)=rm+N,\ m\in M,\ r\in R.$$

这样定义的作用是合理的，即与陪集 $m+N$ 的代表元的选择无关. 事实上，若 $m+N=n+N$; $m,n\in M$，则 $m-n\in N$. 于是对于任意的 $r\in R$，$rm-rn=r(m-n)\in N$，从而 $rm+N=rn+N$. 进而可以验证 M/N 构成一个 R-模，称为 M 关于子模 N 的 R-**商模**.

下述引理是很重要的.

引理 1.2.1 (**Nakayama**) 设 M 是有限生成 R-模，I 是环 R 的理想，且 $I\subseteq \mathrm{Rad}(R)$. 若 $IM=M$，则 $M=0$.

证明 假定 $M\neq 0$. 设 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 是 M 的一个元素个数最小的生成元集. 由于 $IM=M$，存在 $r_1,\cdots,r_n\in I$，使得 $u_n=$