高等學校教學用書

畫法幾何教程

上册

Н. А. ПОПОВ 著

浙江大學製圖教研室譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

畫法幾何教程

上册

H. A. 波波夫 著
浙江大學製圖教研室譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的波波夫（Н. А. Попов）所著“畫法幾何教程”（Курс начертательной геометрии）1947 年版譯出的，原書經蘇聯高等教育部審定爲高等技術學校用教科書。

本書中譯本分上下兩册出版，由浙江大學製圖教研室翻譯。參加本書上册翻譯工作的有：（依頁次先後爲序）陸遲、孔繁桐、柯純、徐道觀、王高升、高宜男、施潤昌諸同志，校訂工作的有柯純、王高升、王槐卿諸同志。

畫法幾何教程

上册　　書號261（課239）

波波夫著

浙江大學製圖教研室譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

新華書店總經售

京華印書局印刷

北京南新華街甲三七號

開本787×1092—1/16　印張13 7/8　字數393,000

一九五五年二月北京第一版　印數1—6,000

一九五五年二月北京第一次印刷　定價¥17,500

序　言

由於高等技術學校最近執行了加强製圖課程——特別是畫法幾何一課——的措施，寫作一本較以前的畫法幾何教程具有更全面的知識的教本已屬必要。具備這種知識，一方面，可以提高未來的工程師一般科學的修養，另一方面，亦使他在設計時不需要特別費力就能够解決一些專門性的問題。

按照新近批准的教學大綱，本教程包含有正投影法及軸側投影法，並且是按照合乎機械製造專業及建築專業的要求來敍述的。有專門的幾章(第一、六、十三章及第十八章76節)講到同調對應及其在畫法幾何中的應用。

這些章節是用小號字印刷的，作者在寫作本書時認爲略去這幾章，對於基本內容的瞭解並無影響。但是，同調對應的應用大大地擴展了各種問題的研究範圍，並簡化了許多習題的解答，所以最好不要略去這些章節。

一些可以不包括在必修範圍內的專門問題也是用小號字印刷的。它們是41節62節，第十六章，以及各別章節內的某些問題及習題。爲了給讀者介紹蘇聯幾何學家[格拉哥列夫(Глаголев)，契特維魯輿(Четверухин)，達帛勒可夫(Добряков)，別列表爾金(Перепёлкин)，格拉助諾夫(Глазунов)等]最近所獲得的成就，著者認爲敍述這些問題是適當的。至於這些材料是否需要包括入必修範圍內這個問題將由講課及輔導教師決定。

在每章的末尾附有該章的基本原理的簡述及有助於自我檢查的問題與需要獨立解決的習題。這樣可以使學生有可能檢查所學得材料的精通程度，因此本教程對那些自學者及函授高等技術學校的學生也能適用。

本書的評閱者——契特維魯輿教授(Н. Ф. Четверухин)，達帛勒可夫教授(А. И. Добряков)，格拉助諾夫教授(Е. А. Глазунов)及列維次基講師(В. С. Левицкий)細心地審閱全稿並供給許多寶貴的指示，著者對此謹致謝意。

波波夫(Н. Попов)

上册目錄

畫法幾何教程

緒　論

當建造各種機器和建築物時，在工程上常使用它們的平面圖。這種根據大家知道的規則所作出的圖畫，使我們可能來決定不論是各個另件的空間形狀和眞實大小，或者是它們的相互位置。這種圖畫稱做圖樣。

圖樣是表示任何技術思想的一種不可缺少的工具。圖樣的作法是以敍述於畫法幾何學中的投影方法爲基礎的，該方法的要點可歸納如下。

設已知一平面P及不在該平面上的一點S（圖 1）。在空間任意取一點A，並通過A及S引一直線使與平面P相交於點a。點a稱做點A的投影，平面P稱做投影平面，點S稱做投影中心（有時也稱做極或透視中心），而直線ASa則稱做投影線或投射線。投影中心距平面P一定距離的（有限遠的）這種投影稱爲中心投影，有時亦稱做有極投影或錐面投影[1]。

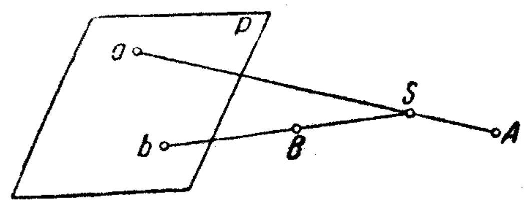

圖 1.

因此，在中心投影中，通過投影中心及已知點的投影線與投影平面的交點就稱爲空間任意一點的投影。

不論投影中心S是否在一點和投影平面之間，例如點B的情形（圖 1），都可以作出空間任意一點的投影，只有在通過投影中心S並平行於投影平面P的一個平面上的點才是例外，因爲這些點的投影線成爲投影平面的平行線。在這種情況下，我們說投影線和投影平面P相交於"無窮遠"，平面P上"無窮遠處的點"就是該點的投影。

因爲通過兩點衹能引一條直線，直線與投影平面P也只有一個交點，所以由此可以得出結論，如果已知極及投影平面[2]，那末空間的任意一點具有一個完全確定的投影。

現在讓我們來解決相反的問題：根據已知的投影平面P，空間某一點A的投影a，及投影中心S來決定點A在空間的位置（圖 1）。爲此，顯然，必須連接點a和S，也就是作一投影線，並在該線上找出點A的位置，但是位於投影線aS上的任何一點都可能具有投影a；所以根據已知的投影平面，點的投影及投影中心S還不可能決定點在空間的位置。

---

[1] 術語"錐面投影"的來源如下：如果從投影中心S，把一曲線投影在平面上，則通過投影中心S和曲線上各點的所有投影線形成一錐面。

[2] 投影中心位於投影平面上的情形爲例外，因爲在開始時已說過點S不在平面P上。

如果再把點A從投影中心S'投影到另一投影面，例如平面P'上，那末點A在空間的位置可以由該點的兩個已知投影：即從投影中心S在投影平面P上的投影a，及從投影中心S'在投影平面P'上的投影a'，所完全決定（圖2）。

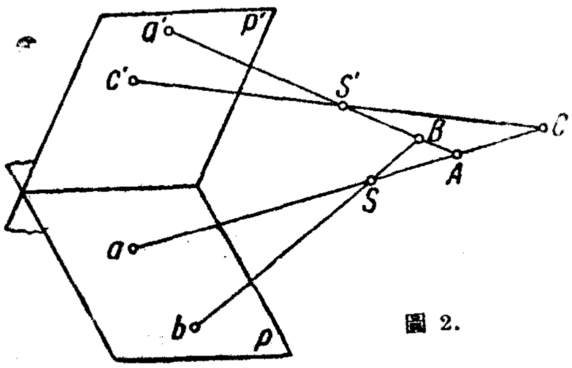

圖 2.

實際上，點a是位於投影線Sa上所有的點的投影，而點a'是位於投影線$S'a'$上所有的點的投影，但是在空間的所有的點中，只有位於投影線Sa和$S'a'$的相交處的點A具有在平面P上的投影a和在平面P'上的投影a'。所有位於投影線Sa和$S'a'$上的其餘的點都不具有同於點A的投影a或a'的投影。例如在投影線$S'a'$上的點B在投影平面P'上的投影是點a'，而在投影平面P上的投影是不與點a相同的點b。同樣的，在投影線Sa上的點C在投影平面P上的投影是點a，而在投影平面P'的投影却是與點a'不同的點c'。

現在讓我們來假設：投影中心沿平行於某任意選擇的方向MN（圖3）退離投影平面。從投影中心S'把點A和B投影於投影平面P上，求得在平面P上的投影a'和b'。把投影中心沿方向MN從位置S'移至位置S''，這時再從投影中心S''把點A和B投影到投影平面P上，求得在平面P上點A和B的投影a''和b''。當沿方向MN移動投影中心時，投影中心的每一新位置必有點A和B的一對應的投影的新位置。當投影中心離開投影平面P很大距離時，投影線Sa和Sb成爲相互平行，並且平行於方向MN；也可以說當投影中心沿方向MN移至"無窮遠"時，則投影線Sa和Sb成爲相互平行，並且平行於方向MN；在這種情形下，它們決定了空間的點A和B投影在平面P上的投影a和b（圖3）。

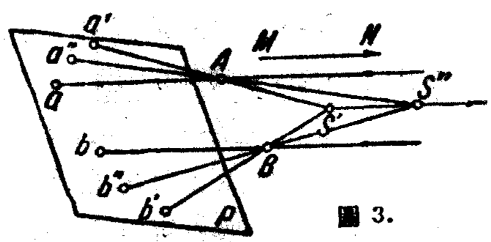

圖 3.

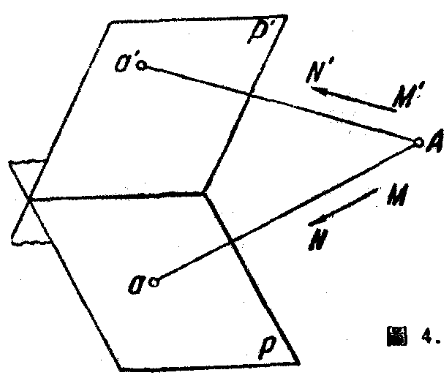

圖 4.

這種投影中心位於無窮遠的投影稱做平行投影或柱面投影[1]。

在這種情形下，如同在中心投影中一樣，空間的每一點在投影平面上只對應有一個投影，這個投影也是在通過這個投影的投影線上所有點的投影。因此，爲了決定點在空間的位置，如在中心投影中一樣，必須在適當的投影方向下把它再投影到一個投影平面上。例如

[1] 因爲曲線的平行的投影線形成一柱狀面。

(圖 4)如果已知一點的投影在投影方向 MN 情形下在投影平面 P 上的投影 a 和投影方向 $M'N'$ 情形下在投影平面 P' 上的投影 a'，那末點 A 的位置就成爲一定了。

投影方向垂直於投影平面的平行投影稱做正投影，或直角投影，它不同於投影方向傾斜於投影平面的斜投影。

緒論內容簡述 在緒論中敍述了在中心投影及平行投影中點的投影的規則。

闡明了在中心投影中，空間任意一點的投影的作法與在平行投影中任意一點投影的作法是一樣的。在兩種情形下都一樣，投影線皆通過投影中心和已知點，但是，因爲在平行投影中，投影中心位於距離投影平面無窮遠處，所以投影線通過已知點且平行於已知的投影方向。

闡明了在中心投影以及平行投影中，投影的重要特性，卽在空間的每一點在投影面上對應有一個投影，但投影平面上的每一點都是位於過該點的投影線上所有點的投影。

也說明了，利用點從兩個投影中心在兩個投影平面上的兩個投影來決定點在空間的位置的方法。這時，空間的點被獨一無二地決定，也就是說，在空間由該同一對投影所決定的另外的點是不存在的。這個情況具有很重要的意義，因爲如果空間的點不能獨一無二地被決定的話，那末要根據兩個投影平面上的投影來決定空間的圖形——點的集合——就不可能了。

自我檢查的問題

1. 投影的方法是怎樣的？
2. 中心投影與平行投影的區別何在？
3. 爲什麼中心投影稱做錐面投影，而平行投影則稱做柱面投影？
4. 怎樣的投影稱做正投影？

第一章　同調對應

§ 1. 平行投影及其特性

設已知平面P與P'及投影方向ST(圖5)。在P'平面上取點A'及B'，並將它們投影於P平面上，爲了得到點A'及B'的投影，我們可以從點A'及B'作直線平行於投影線ST，使與P平面相交於點A與B。點A與B即爲點A'與B'的投影，而線段AB就是線段$A'B'$的投影，因爲經過直線$A'B'$上各點，平行於已知的投影方向ST的投影線束均位於一個投射面上，該投射面與P平面相交得到直線AB。

以上所講的關於點及直線投影的作法可推廣至任意的平面圖形。P平面上的圖形p即爲P'平面上的圖形p'的投影，它是這樣求得的，若經過圖形p'上的各點作一系列平行於投影方向ST的投影線束；這些投影線與P平面的交點就形成了圖形p，亦即P'平面上的圖形p'的投影。

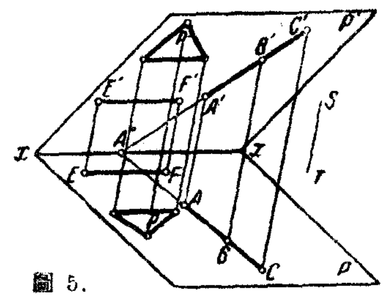

圖 5.

點A與B，直線AB和圖形p就叫做P'平面上的點A'與B'，直線$A'B'$和圖形p'在P平面上的平行投影(或同調圖形)。

平面P'和P的交線xx叫做投影軸。

從上面所講到的，可以很清楚的看出，在兩平面上的點、直線，及圖形間，藉平行投影法之助，相互間建立起了具有下列特性的對應關係：

а) 一平面上的每一個點對應於另一平面上的一定點。

б) 位於投影軸上的各點，對應於自己本身。

в) 一平面上的每一直線對應於另一平面上的一直線，該二直線相交於二平面的交線(投影軸)上。

事實上(圖5)直線$A'B'$和AB位於同一平面上；因此，它們或者平行，或者相交。如果二直線相交，則點A^0——直線$A'B'$及AB的交點——應當同時位於兩平面P和P'上，即位於它們的交線——投影軸上。

如果位於一平面上的直線平行於投影軸(圖5)，則位於另一平面上，與它對應的直線，亦平行於投影軸(直線$E'F'$及EF)。因此，就是在這種情況下，二直線的交點也還是在二平面的交線上，它是在無窮遠處。

г) 位於一平面內某一直線上的一點對應於另一平面內對應直線上的一個點。

д) 位於一平面內同一直線上各線段的比值等於位於另一平面內的對應直線上各線段的比值。

考慮角$B'A^0B$(圖5)，我們可以看到，直線$A'A$，$B'B$及$C'C$平行於投影方向ST，並將角的兩邊截斷成比例的線段：

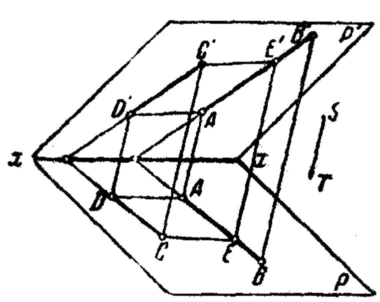

圖 6.

$$\frac{A^0A'}{A'B'}=\frac{A^0A}{AB},\quad \frac{A^0A'}{A'C'}=\frac{A^0A}{AC},\quad \text{由此}\ \frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC}.$$

е) 一平面上彼此平行的直線對應於另一平面上亦彼此平行的直線。

直線$A'B' \parallel C'D'$(圖6)；求證$AB \parallel CD$。

通過直線$A'B'$與$C'D'$的投射面是彼此平行的，因爲這二平面各包含了相應平行的二相交直線，$A'B' \parallel C'D'$及$D'D \parallel A'A$。

由此我們得出結論，直線AB與CD是平行的，因爲它們是兩平行平面與第三平面的交線。

ж) 位於一平面上的諸平行直線段之比例等於位於另一平面上的諸對應平行直線段的比例。

連接A'與D'(圖6)並作$C'E' \parallel A'D'$，在P平面上作對應於線段$C'E'$及$A'D'$的線段CE及AD，因爲$C'D'=A'E'$

及 $CD=AE$，所以

$$\frac{A'B'}{A'E'}=\frac{AB}{AE}\quad\text{或}\quad\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$$

由此可得出以下的推論: 如果諸線段相等且平行，則其對應的線段亦相等，且平行。

將上式體寫成下列的比例

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD},$$

我們可以說: 在平行投影時，兩平行線段的變形是一樣的。

我們已確定了平行投影，使平面 P' 及 P 上的各點彼此間建立起了一定的對應關係，這樣的對應關係叫做兩平面的透視仿射或同調對應。

§ 2. 兩重合平面的同調對應

爲了繼續研究同調對應，我們把諸平面重合。設若已知兩平面 P' 及 P(圖 7); 在 P' 平面內取兩點 A' 及 B'，在 P

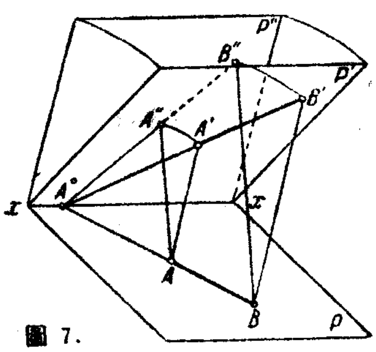

圖 7.

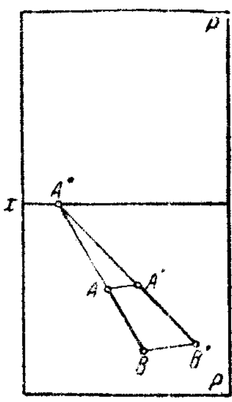

圖 8.

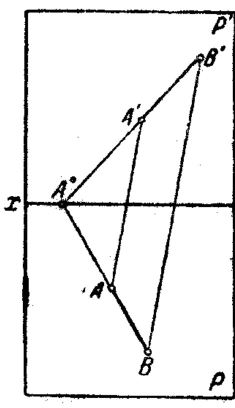

圖 9.

平面內取其對應點 A 及 B，直線 $A'B'$ 及 AB 相交於投影軸上的點 A^0。由上面已經證明了的原理，可知

$$\frac{A^0B}{A^0A}=\frac{A^0B'}{A^0A'}.$$

將 P' 平面繞 xx 軸旋轉一任意角度，使 P' 平面位於 P'' 處，而直線 $A'B'$ 位於 $A''B''$ 處。同時 $A^0A'=A^0A''$，$A^0B'=$ $=A^0B''$ 及 $A'B'=A''B''$。根據前式，我們可寫出:

$$\frac{A^0B}{A^0A}=\frac{A^0B''}{A^0A''}$$

即三角形 $A^0B''B$ 相似於三角形 $A^0A''A$。所以 $B''B \parallel A''A$。即兩平面 P'' 及 P 成同調對應。

將 P' 平面繞 xx 軸繼續旋轉至重合於 P 平面，同時隨旋轉方向的不同，在重合平面上的諸對應點或位於投影軸的一邊(圖 8)，或位於它的兩邊(圖 9)。我們來證明連接在重合平面上諸對應點的直線彼此互相平行。

事實上，在圖 7 上 $AA' \parallel BB'$ 及 $\frac{A^0B'}{A^0A'}=\frac{A^0B}{A^0A}$; 在圖 8 及圖 9 上 $\frac{A^0B'}{A^0A'}=\frac{A^0B}{A^0A}$; 因此

$$AA' \parallel BB'$$

因此，成對地連接諸對應點的各直線，彼此間互相平行。

現在，對應已經不是平行投影的結果，但它具有平行投影的各種特性。

事實上，使 P' 平面重合於 P 平面，直線 AB 是直線 $A'B'$ 的投影，在重合後該直線保持了它的直線性，於是，我們可以說，在我們的轉換中，每一個點對應於一定點，每一直線對應於一定直線，如果我們在直線 $A'B'$ (圖 5)上取一點 C'，則

它的投影C將位於 AB 上; 同時

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AB}{BC}$$

在重合後,點 A', B' 及 C' 間的距離不變(圖 10),又因爲連接在二重合平面上的諸對應點間的直線彼此平行,所以在重合後的直線上各線段的比值亦不變。

位於 P' 平面內(圖 6)的各平行直線,當 P' 平面重合於 P 平面以後亦同樣保持了它的平行性,兩平行線段的比值亦保持不變(圖 11),因爲

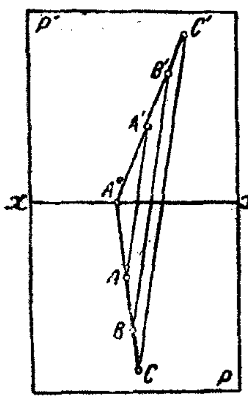

圖 10.

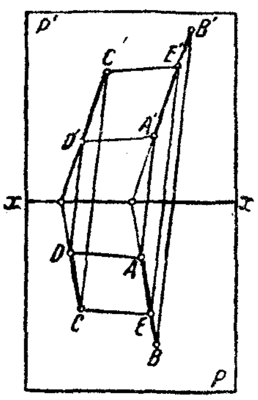

圖 11.

$$B'B \parallel A'A \parallel D'D \parallel C'C \parallel E'E$$

及 $C'D'=A'E'$, $CD=AE$,

所以 $\dfrac{A'B'}{A'E'}=\dfrac{AB}{AE}$

或 $\dfrac{A'B'}{C'D'}=\dfrac{AB}{CD}$.

從以上所敍述的關係可知, 在兩平面重合後所獲得的點的對應與兩平面重合前在平行投影時所得到的點的對應具有相同的性質, 現在所建立起來的對應(在平行投影時所建立的二個不重合的平面的對應情況亦是同樣的) 叫做透視仿射或同調對應,簡稱同調。對應的點, 例如點 A' 及 A, B' 及 B 等叫做同調點,而直線 $A'B'$ 及 AB 叫做同調直線,成對地連接諸同調點的各直線具有同一個方向,該方向叫做同調方向。作爲 P' 平面重合到 P 平面上去的投影軸——直線 xx——叫做同調軸。不難看到,各同調直線均相交於同調軸上,同樣也可以説同調軸上的每一個點自相對應。

把比例式 $\dfrac{A'B'}{C'D'}=\dfrac{AB}{CD}$ 寫成下列形式:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}.$$

在透視仿射(同調對應)中,二平行線段的變形是同樣的。

§ 3. 兩重合平面同調對應的建立

a) 如果已知同調軸及一對同調點, 便可以確定二重合平面的同調對應。

設已知同調軸 xx 及一對同調點 A' 及 A(圖 9),試求同調於任意一點 B' 的點 B。

作直線 $A'B'$ 並延長至與同調軸相交於點 A^0,用直線連接點 A^0 及 A, 並從點 B' 作平行於 $A'A$(同調方向)的直線,使與 A^0A 相交於點 B,點 B 卽爲所求之同調點。

如直線 $A'B'$ 與同調軸 xx 相交於圖紙以外,則可用下列方法來解答此問題(圖 12)。

從點 A' 作任意直線 $A'A^0$, 使與同調軸 xx 相交於點 A^0, 並將此點與點 A 連接起來, 得同調於直線 $A'A^0$ 的直線 A^0A。爲了作出同調點 B' 的點 B, 可作 $B'B^0 \parallel A'A^0$; 然後作同調於直線 $B'B^0$ 的直線 B^0B, 爲此可先作 $B'B \parallel A'A$, $B^0B \parallel A^0A$,直線 $B'B$ 及 B^0B 的交點 B 卽爲所求之同調點。

由此可見,如果已知同調軸及一對同調點,則對於任何圖形都可作出對應於它的同調圖形。

在圖 13 上已知同調軸 xx,一對同調點 A' 及 A; 求作同調於四邊形 $A'B'C'D'$ 的四邊形。

延長 $A'B'$,使與同調軸相交於點 A^0,並將點 A^0 與點 A 連接起來, 從點 B' 作 $B'B \parallel A'A$,並使與 A^0A 相交於點 B; 直線 AB 卽爲同調於直線 $A'B'$ 的直線,用同樣的方法,可得同調對應於 $B'C'$, $C'D'$ 及 $D'A'$ 的直線 BC, CD 及 DA。

б) 如果已知二對同調直線, 則可建立二重合平面的同調對應。

設已知二對同調直線 $A'B'$, AB 及 $A'C'$, AC (圖 14)。直線 $A'B'$ 及 $A'C'$ 的交點 A' 與同調直線 AB 及 AC 的交點 A 是同調點,而直線 $A'B'$, AB 與 $A'C'$, AC 的交點 B^0 及 C^0 是屬於同調軸上的點。由此可見, 此同調對應就由同調軸

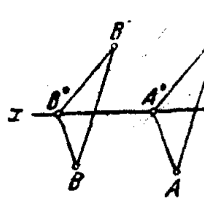

圖 12.

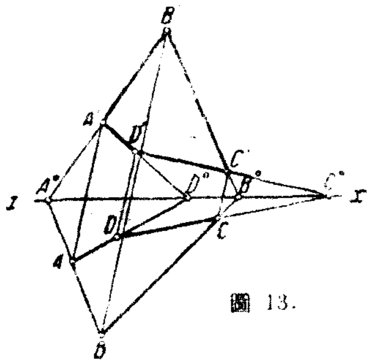

圖 13.

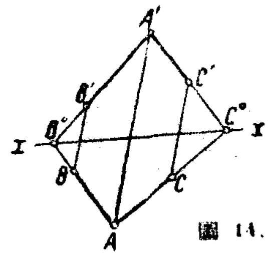

圖 14.

及一對同調點來決定了。

B）如果已知不位於同一直線上的三對同調點，或者二個同調三角形也一樣（當然，連接互成同調的兩點的三條直線應當彼此平行），則二平面的同調對應即可建立。

設已知二同調三角形 $A'B'C'$ 和 ABC，而且 $A'A \parallel B'B \parallel C'C$（圖 15）。

為了建立兩重合平面的同調對應，可以使用二對同調直線。但是，必須着重的說明：在已知的情形下，同調三角形的任意二個對邊所建立起來的對應都是一樣的，為此只要說明點 A^0、B^0 及 C^0，位於同一直線上就可以了。

設 $A'B'$ 及 AB 相交於點 C^0，$B'C'$ 及 BC 相交於點 A^0。直線 A^0C^0 是同調軸：我們必須證明直線 $A'C'$ 及 AC 相交於同一直線上的某一點。

以 B^0 代表 $A'C'$ 與 A^0C^0 的交點，B_1^0 代表 AC 與 A^0C^0 的交點，如能證明點 B^0 重合於點 B_1^0，則就證明了點 A^0，B^0 及 C^0 位於同一直線上。

從相似三角形 $C^0B'B_1$，$C^0A'A_1$ 及 C^0BB_1，C^0AA_1 可得：

$$\frac{A'A_1}{B'B_1}=\frac{C^0A_1}{C^0B_1} \text{ 及 } \frac{AA_1}{BB_1}=\frac{C^0A_1}{C^0B_1};$$

因為右邊兩分數相等，所以左邊兩分數也相等：

$$\frac{A'A_1}{B'B_1}=\frac{AA_1}{BB_1} \text{ 或 } \frac{A'A_1}{AA_1}=\frac{B'B_1}{BB_1} \qquad (1)$$

同樣，於相似三角形 $A^0B'B_1$，$A^0C'C_1$ 及 A^0BB_1、A^0CC_1 中，可得：

$$\frac{C'C_1}{B'B_1}=\frac{A^0C_1}{A^0B_1} \text{ 及 } \frac{CC_1}{BB_1}=\frac{A^0C_1}{A^0B_1};$$

因此

$$\frac{C'C_1}{B'B_1}=\frac{CC_1}{BB_1} \text{ 或 } \frac{C'C_1}{CC_1}=\frac{B'B_1}{BB_1} \qquad (2)$$

由相似三角形 $B^0A'A_1$，$B^0C'C_1$ 及 $B_1^0AA_1$、$B_1^0CC_1$ 可得：

$$\frac{C'C_1}{A'A_1}=\frac{B^0C_1}{B^0A_1} \text{ 及 } \frac{CC_1}{AA_1}=\frac{B_1^0C_1}{B_1^0A_1}$$

從(1)及(2)式得：

$$\frac{C'C_1}{CC_1}=\frac{A'A_1}{AA_1} \text{ 或 } \frac{C'C_1}{A'A_1}=\frac{CC_1}{AA_1};$$

因此

$$\frac{B^0C_1}{B^0A_1}=\frac{B_1^0C_1}{B_1^0A_1} \text{ 或 } \frac{B^0A_1}{B^0C_1}=\frac{B_1^0A_1}{B_1^0C_1}$$

取推算後比值

$$\frac{B^0A_1-B^0C_1}{B^0C_1}=\frac{B_1^0A_1-B_1^0C_1}{B_1^0C_1} \text{ 或 } \frac{A_1C_1}{B^0C_1}=\frac{A_1C_1}{B_1^0C_1}$$

因此 $B^0C_1=B_1^0C_1$，即點 B^0 重合於點 B_1^0。

例題　已知同調軸及平行四邊形 $A'B'C'D'$，求作一同調於該四邊形的一正方形（圖 16）。

我們假定問題已經解決。延長平行四邊形及正方形各邊至與同調軸相交於點 M^0、N^0、P^0 及 Q^0，從點 P^0 作 P^0E

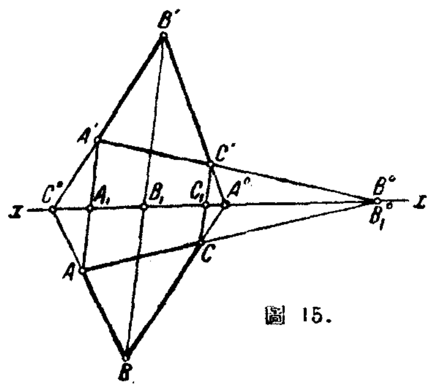

圖 15.

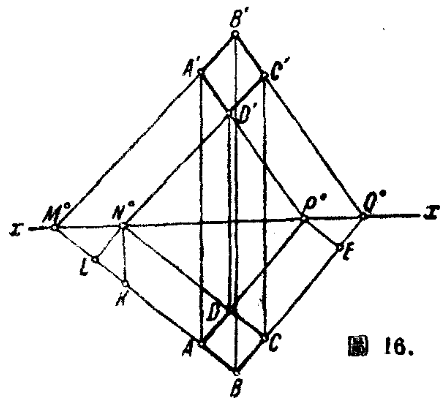

圖 16.

垂直於直線BQ^0，從點N^0作同調軸的垂線N^0K，並作N^0L垂直於直線BM^0，因爲$P^0E=N^0L$，角Q^0P^0E＝角KN^0L(兩兩互相垂直的兩條邊的夾角)，所以所得的二個三角形P^0EQ^0及KLN^0是相等的直角三角形。

因此

$$N^0K=P^0Q^0$$

根據上面所述，我們用下述作法，進行作圖。

將平行四邊形各邊$A'B'$、$D'C'$、$B'C'$、$A'D'$延長使與同調軸相交於點M^0、N^0、Q^0及P^0。在N^0點作同調軸之垂線並取$N^0K=P^0Q^0$，連接點M^0與K，並從N^0點作平行於直線M^0K的直線，從點P^0及Q^0作垂直於M^0K之直線，即可得所求的正方形$ABCD$。

§ 4.　橢圓是一同調於圓的圖形

首先我們來證明一個定理：有一對(並且僅有一對)由已知一點作出的相互垂直的直線，重新變換成一對相互垂直的直線。

設已知從一點A'作出的一對相互垂直的直線$A'B'$及$A'C'$(圖 17)，並且假設有一點A作出的另外一對相互垂直的直線AB及AC對應於它們。設點B'及C'就是直線與同調軸xx的交點，因此點B'及C'與點B及C重合。在四角形$A'C'AB$中$\angle A$及$\angle A'$之和等於180°，因此此四角形可以內接於一圓，而$B'C'(BC)$就是這個圓的直徑。

由此可見，需要作出一個中心在同調軸上並且通過點A'及A的圓，這樣的圓可以作出，並且僅有一個，因爲它的中心有一定的位置，即在同調軸與通過AA'中點的垂直線的交點O處。

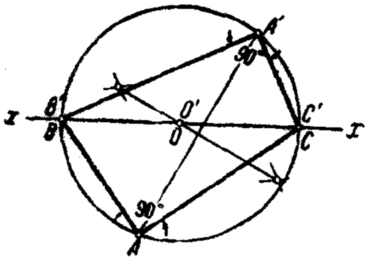

圖 17.

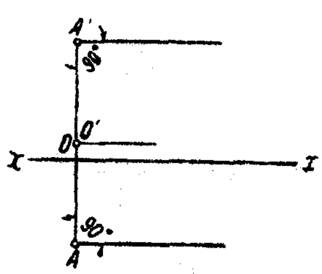

圖 18.

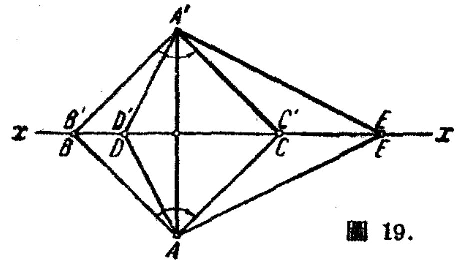

圖 19.

如果點A'及A在同調軸的垂直線上的話，那末直線AA'變換成直線本身，過AA'中點的垂直線就平行於軸(圖 18)並與該軸相交於"無窮遠"。通過點A'及A引直線平行於軸即得相互對應的兩個直角，當同調點A'及A在同調軸的一垂直線上，同時線段AA'恰被同調軸所等分時的情形(圖 19)是該定理的例外。在這種情形下，從線段AA'中點所引的垂直線與軸xx重合，此二直線的交點就變成不定，這就是說在軸xx上的任何一點。在這種情形下此題有無窮數量的解答，即以A爲頂角的任何直角同樣都有同調的直角。例如$\angle B'A'C'$同調於$\angle BAC$，$\angle D'A'E'$同調於$\angle DAE$等等。

現在我們來求出同調於已知圓的圖形。

設已知同調軸，中心爲O的圓及一對同調點A'（在圓上）及A（圖 20）。作出同調於已知的圓的圖形。通過點A'及圓心O'引一直線，此直線與圓相交於另外一點B'，與同調軸相交於點C^0。在直線C^0A（同調於直線C^0A'）上，求出同調於點O'及B'的點O及B。爲此，從點O'及B'引直線平行於同調方向至與直線C^0A相交。用同樣的作法，我們可以求出同調於圓的圖形$AFCBDE$上的任何數量的點。當投影時通過圓$A'F'C'B'D'E'$上的點所引的射線形成一個以圓爲底的斜圓柱的表面：因而同調於圓的圖形就是這個圓柱被一平面所截的斷面，這個曲線一般說來是一個橢圓，在特殊的情形下它也可以是一個圓。

我們來確定同調於圓的橢圓之特性。

圓之一直徑$A'B'$被圓心O'所等分；同調的線段AB同樣也被點O所等分（因爲在同調對應中比值是不變的）；因此$\frac{A'O'}{O'B'}=\frac{AO}{OB}=1$。

所有的直徑都被圓的中心O'所等分；因而，所有通過點O的橢圓的弦也被點O等分。點O稱做橢圓的中心，而通過中心的弦稱做橢圓的直徑。垂直於$A'B'$的圓的直徑$C'D'$一般說來對應於並不垂直於AB的直徑CD。弦$E'F' \parallel C'D'$且被直徑$A'B'$等分，因此，同調於圓的弦$E'F'$的橢圓的弦EF應同樣也平行於直徑CD並被直徑AB所等分。由此可見，橢圓的直徑AB等分平行於直徑CD的弦。顯然，直徑CD對於直徑AB來說也具有這個性質。橢圓的這兩個直徑，即其中的每一直徑等分平行於另一直徑的弦的直徑稱爲是共軛的。橢圓的共軛直徑AB及CD對應於圓上垂直的直徑$A'B'$及$C'D'$。

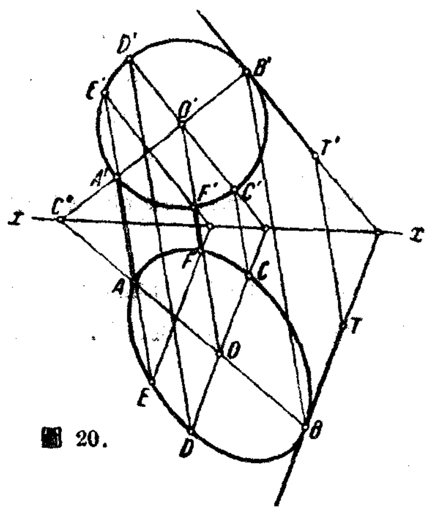

圖 20.

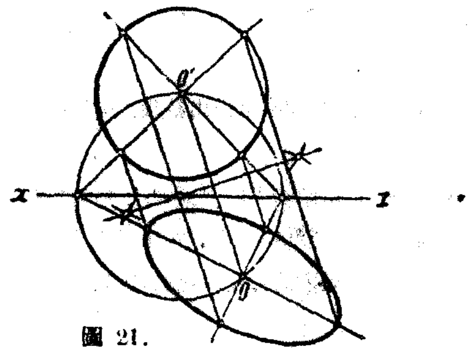

圖 21.

橢圓的切線BT對應於圓的切線$B'T'$。直線BT與橢圓的其他交點是不可能有的，因爲如果有這樣的點的話，那末它在圓上就有同調點。但我們知道圓的切線與圓只有一公共點因而直線BT同橢圓也只有一公共點。在我們的情形中$B'T' \parallel C'D'$；因此$BT \parallel CD$；因而過兩共軛直徑中一直徑之一端的橢圓的切線平行於另一直徑。

我們來證明每一橢圓都有一對相互垂直的共軛直徑。

設已知：以O'爲中心的圓及對應點O——橢圓的中心（圖 21）。

從線段OO'的中點作垂線至與同調軸相交；從求得的點作一通過點O'及O的圓。像我們在前面所看到的一樣，這個作圖確定了二對同調的並且相互垂直的直線——在這種情形下這二對直線就是圓與橢圓的相互垂直的且共軛的直徑，由此可見，任何一橢圓都有一對相互垂直的共軛直徑，這對直徑稱做橢圓的軸（長軸和短軸）。從已知圓的相互垂直的直徑的端點引直線平行$O'O$（同調軸）至與對應的橢圓的軸相交，求得橢圓的頂點。

平行於橢圓任一軸的弦都被另一軸所等分。

爲了根據橢圓的共軛直徑作出橢圓上的點，可以利用橢圓切線的性質。

設已知一圓，$A'B'$與$C'D'$是圓上相互垂直的直徑（圖 22）。這兩直徑同調於橢圓的共軛直徑AB及CD。作一外切於圓的正方形，它的邊平行於直徑$A'B'$及$C'D'$，在圓周上取任意一點E'並把它同直徑$A'B'$的二端A'及B'連接起

來。直線 $A'E'$ 與直徑 $C'D'$ 相交於點 G'，直線 $B'E'$ 與 $C'H'$ 相交於點 F'。由相等的直角三角形 $A'G'O'$ 及 $B'F'H'$ 中（$A'O'=B'H'$，$\angle G'A'O'=\angle H'B'F'$）求得 $O'G'=F'H'$ 及 $C'G'=C'F'$，由此 $\frac{C'G'}{G'O'}=\frac{C'F'}{F'H'}$。

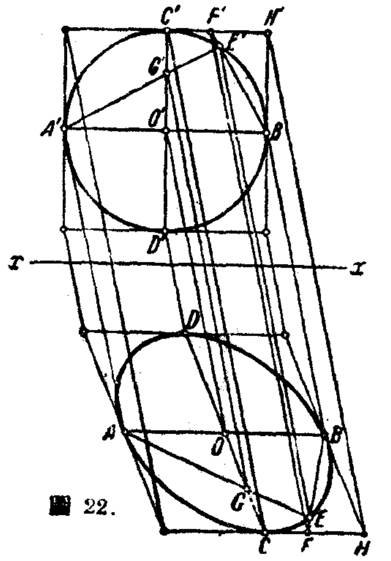

圖 22.

在我們的同調中，其邊平行於橢圓直徑 AB 及 CD 的橢圓的外切平行四邊形對應於圓的外切正方形。點 E、G 及 F 將對應於點 E'，G' 及 F'。因為在同調對應中一直線上的三點的比值是不變的，所以我們可以寫出 $\frac{CG}{GO}=\frac{C'G'}{G'O'}$ 及 $\frac{CF}{FH}=\frac{C'F'}{F'H'}$。因為等式的右邊的部分是相等的，所以左邊的部分也是相等的，我們求得 $\frac{CG}{GO}=\frac{CF}{FH}$。

由此得出結論：橢圓上的任何一點可以求得出來，如果我們引任意一直線，例如 BF，並在半徑 CO 上求出點 G 使 $\frac{CG}{GO}=\frac{CF}{FH}$。

用直線連接點 A 同點 G，延長之使與直線 BF 相交於所求的橢圓上的一點 E。

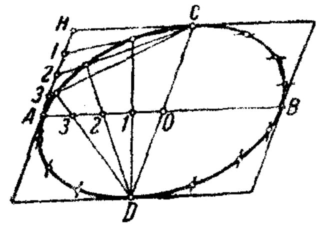

圖 23.

下面所述根據已知共軛直徑 AB 及 CD，作橢圓的方法就是根據這個原理的。

在共軛的直徑上作一平行四邊形（圖 23），把 OA 及 HA 分成同樣數目的相等部分，並把各分點寫上號碼如圖所示。把點 C 同線段 HA 上的點 1、2……連接起來，把點 D 同線段 OA 上的點 1、2……也連接起來。對應的直線，例如 C–1 和 D–1，C–2 和 D–2 等等的交點就是橢圓上的點。

由所述的作法，同樣也得出結論：橢圓的平行投影還是橢圓，其實，當把平面 P' 上的圓投影到平面 P 上時我們求得一橢圓。

現在如果把這個求得的平面 P 上的橢圓連同圖 23 中為了作出橢圓而引出來的直線都平行地投影到第三個平面 P'' 上的話，那末在那裏就得到也像在平面 P 上所得的同樣的作法。因為在平行投影的情形下作圖的方法保持不變，這種作法是利用同方向線段的長度的比例，所以橢圓就投影成一橢圓。

§ 5. 圓之正投影

假設把平面 P' 上的圓（圖 24）垂直地投影到平面 P 上❶。平行於平面 P 的圓的直徑 $1'$–$2'$ 不變地投影為橢圓的直徑 1–2，這直徑就是橢圓的長軸，該軸用記號 $2a$ 來表示。垂直於第一直徑 $1'$–$2'$ 的第二直徑 $3'$–$4'$ 的投影，短軸 3–4，用記號 $2b$ 來表示。平面 P' 與 P 的傾斜角度用記號 φ 來表示，那麼可以寫出 $3\text{–}4=3'\text{–}4'\cos\varphi=2a\cos\varphi=2b$，由此 $\cos\varphi=\frac{b}{a}$。

當平面 P' 與 P 重合時同調方向 $1'$–1，$2'$–2 將垂直於同調軸 xx（圖 25）。由此可見，對平行於直徑 $3'$–$4'$ 的圓的半弦 $5'$–$6'$ 和橢圓上同調的半弦 5–6 來說，我們可以寫出 $\frac{5\text{–}6}{5'\text{–}6'}=\cos\varphi=\frac{b}{a}$。

根據這個關係，我們可以用下面的方法來進行橢圓的作圖。設已知橢圓的軸 $2a$ 及 $2b$（圖 26）。我們把橢圓的長軸 1–2 當作同調軸，同調的圓的直徑 $1'$–$2'$ 及中心 O' 將與橢圓的長軸 1–2 及中心 O 相重合。圓的直徑 $3'$–$4'$ 及橢圓之短軸 3–4 在垂直於橢圓長軸的同一直線上。比例 $\frac{3\text{–}4}{3'\text{–}4'}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$。

在從點 O' 以半徑等於 a 所作的圓上，取任意一點 K'，把它與點 O' 連接起來，並求出直線 $O'K'$ 與由 O 以半徑 b 所作的圓相交於 L。引 $KL \parallel 1\text{–}2$，$K'K^0 \parallel 3\text{–}4$。直線 LK 與 $K'K^0$ 相交，即得屬於橢圓上的點 K。

❶ 在圖 24 上圓與投影軸切於點 $3'$。但我們的一切討論對於在平面上任何位置的圓也都是保持正確的。