成人高等教育管理类与财经类各专业适用

现代管理数学基础

微积分学

周誓达 编著

北京科学技术出版社

成人高等教育管理类与财经类各专业适用

现代管理数学基础

微积分学

周 誓 达 编著

北京科学技术出版社

现代管理数学基础

微 积 分 学

周誓达 编著

北京科学技术出版社出版
(北京西直门外南路19号)
北京市新华书店发行 各地新华书店经售
北京市密云县印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 15印张 376,000字
1986年6月第一版 1986年6月第一次印刷
印数1—60000册
统一书号4274·005 定价3.35元

前　　言

本书是现代管理数学基础，是根据作者在北京师范学院与北京市财贸管理干部学院授课讲义改写而成的，曾在北京市成人教育系统各有关院校广泛听取意见，并在北京、天津、上海、吉林等十省市财贸管理院校数学讨论会上进行交流。本书可作为成人高等教育管理类与财经类各专业的教材或教学参考书，也可作为管理干部与财经工作者自学用书。

本书承北京市财贸管理干部学院俞斯晟副教授、北京经济学院王光兆副教授、北京市火柴厂张家伦副厂长等给予关心指导，北京市成人教育局王宁一老师、电子工业部北京业余无线电工程学院张连城老师等提出修改意见，谨在此表示衷心的感谢。

本书力图做到“突出重点、精选习题、讲清道理、通俗易懂”，以利于讲授、便于自学。由于时间和水平所限，本书缺点和不足之处在所难免，热烈欢迎广大读者批评指正。

周誓达

1986年2月于北京

引　言

现代管理数学是研究现代管理领域中的数量关系和优化规律的科学，微积分是现代管理数学的基础。

微积分研究的对象是函数，主要是初等函数。研究的主要工具是极限。

微积分中最重要的基本概念是导数、微分、不定积分与定积分，最重要的基本运算是求导与求不定积分。

应用微积分解决某些实际问题，特别是求极值问题，是微积分的重要内容。

作为微积分的后继内容，微分方程是研究现代管理的有力数学工具。

书中有些内容加注了※号，作为教学参考，可以略去不讲。在命题的证明中，以▌号表示证明完结。习题编排与内容讲述的次序完全一致，重点内容配有综合练习题目。

目　　录

第一章 函　数

§1.1 实数

我们是在实数范围内研究微积分的，故有必要对实数的有关性质作一简要的讨论。

实数包括有理数与无理数，其中有理数包括了整数、分数。数发展到实数并没有完结，由于负数开平方，又引进了虚数，实数与虚数构成复数，当然，数发展到复数也没有完结，还会继续发展。

在数轴上任何一个点，都可以找到唯一一个确定的实数与之对应；同样的，对于任何一个实数，都可以在数轴上找到唯一一个确定的点与之对应。这样，数轴上的全体点与全体实数建立起一一对应的关系。这样的数轴叫做实数轴，简称数轴，它给出了实数的几何表示，这对我们讨论问题将带来很大的便利。以后，我们将不严格区别数与点，说数轴上一个点x，也就是说一个实数x；说一个实数x，也就是说数轴上一个点x。

如前所述，全体实数填满了整个数轴，一个挨一个，没有空隙，自然，任何两相异实数之间，总还存在着任意多个实数。

任何两个实数之和、差、积皆为实数，在除数不为零的条件下，两个实数之商亦为实数。

在实际问题中，有时只是考虑一个数的数值大小而不管它的符号，这就需要引进绝对值的概念：一个实数，它在数轴上的对应点到原点的距离叫做这个实数的绝对值。其表达式为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当} x \geqslant 0 \\ -x, & \text{当} x < 0 \end{cases}$$

显然，$|x-a|$表示点x到点a的距离。

绝对值具有下面几个性质：

(1) 由于距离不会是负值，从而$|x|\geqslant 0$；

(2) 由于相反数到原点的距离相等，从而$|-x|=|x|$；

(3) 当x与y符号相同或它们中有零数时，有$|x+y|=|x|+|y|$；

当x与y符号相反时，有$|x+y|<|x|+|y|$

综合起来，就有$|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(4) 当x与y符号相同或它们中有零数时，有$|x-y|=||x|-|y||$；

当x与y符号相反时，有$|x-y|>||x|-|y||$；

综合起来，就有$|x-y|\geqslant||x|-|y||$；

根据 (3)、(4) 得$||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$；

(5) $|xy|=|x||y|$；

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$　　$(y\neq 0)$；

(7) $\sqrt{x^2}=|x|$；

(8) 若$|x-a|<\delta$ $(\delta>0)$，则$a-\delta<x<a+\delta$，反之亦然，即$|x-a|<\delta$与$a-\delta<x<a+\delta$等价。

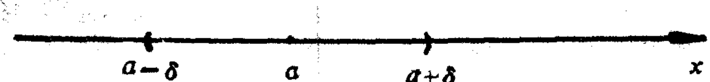

图 1-1

如图 1-1，这个结论是一目了然的，到点a的距离小于δ的点x都在$a-\delta$与$a+\delta$之间；反过来，在$a-\delta$与$a+\delta$之间的点x到点a的距离都小于δ。

特别的，当$a=0$时，$|x|<\delta$与$-\delta<x<\delta$等价。

(9) $|x|>X$（$X>0$）等价于$x>X$或$x<-X$。

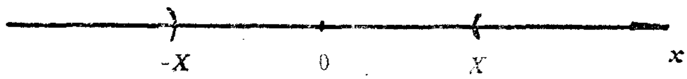

图 1-2

如图1-2，到原点的距离大于X的点x，或者在点X之右，或者在点$-X$之左，反之亦然。

今后，为了表示数值范围，往往采用区间的符号，设实数a与b，且$a<b$，满足不等式$a<x<b$的实数x的集合，称作以a、b为端点的开区间，记为(a, b)；满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合，称作以a、b为端点的闭区间，记为$[a, b]$；此外，还有半开半闭区间$[a, b)$，$(a, b]$，它们分别表示满足不等式$a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$的实数x的集合。显然，开区间不包含端点，闭区间包含端点。上述区间是有限区间，其右端点b与左端点a之差$b-a$，称作区间的长度。

除有限区间外，还有无穷区间，满足不等式$x>a$，$x\geqslant a$的实数x的集合，分别记为$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$；满足不等式$x<b$，$x\leqslant b$的实数x的集合，分别记为$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$；全体实数的集合，记为$(-\infty, +\infty)$。$-\infty$，$+\infty$分别读作"负无穷"与"正无穷"，它们不是数，仅仅是记号。形式上可把$-\infty$，$+\infty$看作无穷区间的端点。

进而考虑开区间$(a-\delta, a+\delta)$（$\delta>0$），它表示满足不等式$a-\delta<x<a+\delta$即$|x-a|<\delta$的实数x的集合，这个开区间，我们称为点a的δ邻域。点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径。

再考虑在点a的δ邻域内去掉点a，其余点所组成的集合，称为点a的δ去心邻域，它是开区间$(a-\delta, a)$与$(a, a+\delta)$的并

$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$，也即满足不等式$0<|x-a|<\delta$的实数$x$的集合，如图1－3。

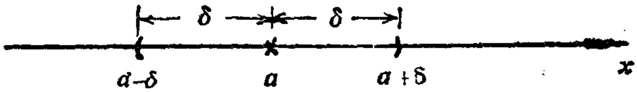

图 1-3

实数a_1、a_2、…，a_n中的最小者记为 $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，最大者记为$\max\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$。

§1.2 函数的概念

世界上一切物质，除了表现为质的变化外，还表现在反映物质特征的量发生变化，把变化着的量称为“变量”。在一定条件下，物质在某一方面的量，可以相对的保持一定的数值而不变，保持数值不变的量，称为“常量”，常量是变量的特殊情况。如果一个变量在所讨论的运动过程中变化很小，而且对所讨论问题的影响可忽略不计，就可以把它看做常量。在高等数学中，通常用字母x、y、z等表示变量，用字母a、b、c等表示常量。

在同一个实际问题中，变量往往不止一个，这些变量的变化也不是孤立的，往往存在着确定的依赖关系，具有一定的变化规律。

例1 圆盘面积S与其半径r之间的依赖关系是$S=\pi r^2$，当r变化时，S也随之变化，在$r>0$的范围内，任给r的一个具体数值。就有一个确定的S值与之对应，如当$r=4$米时，$S=16\pi$米^2，当$r=7$米时，$S=49\pi$米^{2}等等。

例2 某种机器的销售价为3万元／台，销售总收入y万元与销售x台的关系是$y=3x$，当x变化时，y也随之变化，当x取值在正整数的范围内，任给x的一个具体数值，就有一个确定的y值与之对应，如当$x=13$台时，$y=39$万元等等。

例 3　一物体自距地面高h处无初速自由落下，在落地之前，其经过的距离 s 米与经过的时间 t秒之间关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，其中重力加速度$g=9.8$米／秒^2，很显然，在落地之前，给定一个 t 值，根据上述变化规律，就有一个 s 值与之对应。

例 4　粮店售粮员把标准面粉的销售量x 仟克与收款数 y 元列成表格如下：

x	1	2	3	4	5	6	…	10
y	0.370	0.740	1.110	1.480	1.850	2.220	…	3.700

给定x一个不超过10的正整数值，根据上面表格所给出的对应规律，就有一个y值与之对应。

例 5　炮弹M在空中飞行过程中，其轨迹是一条平面曲线，如图 1－4。

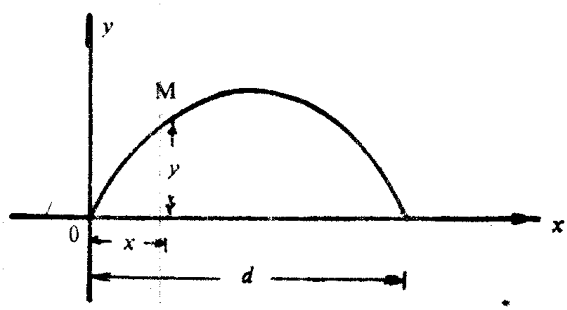

图　1－4

炮弹飞行高度y与水平距离x都在变化，显然，在$0\leqslant x\leqslant d$的范围内，给定一个x值，根据这条平面曲线，就有一个 y 值与之对应。

象这样的例子是很多的，概括起来，我们就得到函数的定义。

定义　设有两个变量x和y，若变量x在某范围D内变化，且

每取某个确定的值时，变量y按照一定的规律，总有唯一确定的值与之对应，则称变量y是变量x的函数，记为$y=f(x)$ $(x\in D)$。

其中，变量x称为自变量，自变量x的取值范围D称为函数的定义域；变量y也称为因变量，因变量y的取值范围称为函数的值域；f表示对应规律，也称函数关系。

函数关系与定义域是构成函数的两个基本要素，缺一不可。基于这一点，两个函数相等，必须是对应关系相同，而且定义域也相同，否则，就不是相同的函数。如$y=x^2$，$x\in(0, +\infty)$与$y=x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$是不相同的函数，因为定义域不一样。

在同一个问题中，同时讨论了几个不同的函数关系，那就要用不同的函数记号来表示，如$y=f(x)$，$z=g(x)$，…等。

根据函数的定义，并不排斥这样的情况：对应于自变量的所有取值，函数总取同一数值，即$y=C$，$x\in D$，其中C是某个确定实数。

上述定义的函数叫做单值函数。此外，还有这种情形：对应于自变量x的一个取值，变量y所取的值不是一个，而是几个，这样的函数叫做多值函数。本门课程只讨论单值函数。避免讨论多值函数，有时遇到多值函数，把它分成几支，每支都是单值函数，然后进行讨论。如$y^2=x$，$x\in(0, +\infty)$，这就是多值函数，对应于自变量$x=4$，就有两个函数值$y=2$与$y=-2$与之对应.我们可以把它分成两支单值函数：$y=\sqrt{x}$与$y=-\sqrt{x}$分别进行讨论。

上述定义的函数，其中自变量只有一个，称为一元函数。但在实际问题中，也会遇到多个自变量的函数，这样的函数称为多元函数。本门课程重点讨论一元函数，最后简单讨论二元函数。

函数关系的表示方法有三种：

1．公式法

用数学式子表示自变量与因变量之间的对应关系，这样的数学式子称为函数表达式．如例1、例2、例3．

2．列表法

把自变量的一系列数值以及与之对应的函数值列成表，表示自变量与因变量之间的对应关系，如例4．

3．图象法

用一条平面曲线表示自变量与因变量之间的函数关系，这样的平面曲线叫做函数曲线，它是函数关系的几何图象，如例5．

总之，$y=f(x)$ 中，其对应关系“f”，可以是数学公式，也可以是x与y之间的对应数值表．也可以是一条平面曲线．

在实际问题中，应结合具体情况，根据需要适当选择表示法或综合使用．在本门课程中，表示函数主要用公式法，以图象法做为辅助，偶而也会用到列表法．

在应用公式法表示函数的时候，函数表达式可分为三种：显函数、隐函数与参变量函数．

（1）显函数

函数y写成自变量x的明显表达式 $y=f(x)$，称为显函数．这时，在定义域内任给一个x值，只须经过关于x的数学运算，便可得到对应的y值，即y值与x值的对应是经过关于x的数学运算而实现的，例1、例2、例3中的函数表达式都是显函数的例子．

（2）隐函数

对于一个联系变量x、y之间的关系式$F(x,\ y)=0$，在x的取值范围内，任给一个x值，经过解方程式，若得到一个确定的y值与之对应，则称$F(x,\ y)=0$为表达y是x的函数关系的隐函数．这时，$F(x,\ y)=0$表示了变量x、y之间的对应关系，确定了y是x的函数 $y=y(x)$，即y值与x值的对应是经过解方程式才实现的，把 $y=y(x)$ 代入方程式 $F(x,\ y)=0$ 中，

就得到恒等式 $F(x,y(x))\equiv 0$，说明了在函数定义域内，任给一个x值，都使得$F(x, y(x))$恒为零。

当然，如无实际背景或特别说明，在关系式 $F(x, y)=0$中的x、y所处的地位是平等的，也有可能，$F(x, y)=0$ 确定了x是y的函数关系，不过，在本门课程中，习惯把x当作自变量，y作为因变量。

例 6　在xy平面的上半平面，动点 $M(x, y)$ 到原点的距离为常数$a>0$，这时动点M的坐标x、y满足关系式 $x^2+y^2=a^2$ $(y\geqslant 0)$，在 $-a\leqslant x\leqslant a$的范围内，任给一个x值，经过解方程，可知有一个y值与之对应，所以说$x^2+y^2=a^2$ $(y\geqslant 0)$ 为表达y是x的函数关系的隐函数。

注意：在隐函数的概念中，所谓解方程式 $F(x, y)=0$，是指通过具体求解或是理论分析，知道对于x 变化范围内的任一个x 值，方程都有唯一解，并不意味着在所有情况下都一定能得到y用x表出的表达式。

任何一个显函数 $y=f(x)$ 都可以写成隐函数$y-f(x)=0$的形式；有的隐函数可以写成显函数形式，如隐函数$x^2+y^2+a^2=0$ $(y\geqslant 0)$，经过解方程，可写成显函数形式 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$，但并不是所有隐函数都能化为显函数，如隐函数$10^{x+y}+(x^2+1)y=0$ 就不能化为显函数的形式。

（3）参变量函数

例 7　考察以原点为中心、$a>0$为半径的上半圆周，如图1-5，在其上面任一点M的纵坐标y是横坐标 x 的函数，另一方面，M点的位置也可由向径OM与x轴正向夹角θ所唯一确定。有

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

可见，借助于变量θ，确立了y是x的函数关系。

一般的，同时给出变量x、y与变量t之间的关系式