《数理天地》丛书 主编 周国镇

初等微积分精讲

那吉生 编著

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

气象出版社

作者简介

那吉生，男，1941年出生于浙江绍兴，1964年毕业于浙江大学数学系，同年考取中国科学技术大学应用数学系研究生，从此开始作为著名数学家华罗庚的学生、助手直到华罗庚去世，达21年之久。1977年，中国科学院成立以华罗庚为首的应用数学研究室（应用数学研究所的前身），那吉生是该研究室最早的研究员之一，1979年那吉生随同华罗庚出访欧洲作学术访问。近十年来，作为华罗庚的弟子，他很自然、热情地参与了青少年数学科普工作，他担任了“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会副主任，并参加了“华罗庚金杯”少年数学邀请赛的命题工作，《初等微积分精讲》是他给青少年学子们的一个真诚奉献。

ISBN 7-5029-3297-6

9 787502 932978 >

ISBN 7-5029-3297-6/G · 0956

定价：12.00 元

《数理天地》丛书　主编　周国镇

初等微积分精讲

那吉生　编著

A1027182

气象出版社

内 容 简 介

本书简明扼要地介绍微积分的基本知识，不拘于理论上的论证和完整，着眼于应用，大量的例题也是编写的重要内容。从极限的引入开始依次介绍了导数、微分、定积分和不定积分的概念，着重阐述了它们之间的联系，即微积分基本定理。系统地介绍了求导数的方法和计算积分的各种技巧，并详细例说定积分在几何和物理中的应用和导数在研究函数性状方面的作用。此外又概述了无穷级数的理论，包括级数收敛性的判别和函数展开为幂级数的结果。最后一讲介绍了微分方程的基本知识和五种特殊形式方程的解法，例说它们在解决各种物理和工程问题中的应用。

本书面向高中学生和具有高中数学知识的各类读者，从中不仅能学习到微积分的基本知识，而且能了解用微积分解决实际问题的方法。

图书在版编目(CIP)数据

初等微积分精讲/周国镇主编. —北京：气象出版社，2002.1

ISBN 7-5029-3297-6

Ⅰ.初…　Ⅱ.周…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 093604 号

初等微积分精讲

邢吉生　编著

责任编辑：宋　钢　终审：黄润恒

封面设计：梁培林　责任技编：刘祥玉　责任校对：肖　红

气象出版社出版

（北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮编：100081）

新华书店总店北京发行所发行　全国各地新华书店经销

*　*　*

北京市白河印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7.5　字数：168 千字

2002 年 1 月第一版　2002 年 1 月第一次印刷

印数：1～5000

ISBN 7-5029-3297-6/G・0956

定价：12.00 元

写在前面的话

中学数学里要不要有微积分的内容?这在我国,历来有两种截然相反的意见。

持肯定意见一方认为:有了微积分的知识,一可以使中学数学里原来感到困难的一些问题(如曲线方程的研究、不等式等)变得容易了,就像学了代数以后,算术里的应用题变容易了一样;二是联系实际,培养应用数学的能力有了更大的空间(尤其是考虑到多数中学生不一定能上大学,应当让这部分人在中学能接触更多的数学);三可以提升物理学习的水平;四是更有助于培养辩证思维能力。基于以上的理由,所以中学应该讲微积分。另一方面,从可接受性看,中学高年级学生完全可以理解和接受微积分的基本思想和基础内容。

持反对意见一方认为:由于课时的局限以及师资水平的不适应,中学生学微积分很难到位,而且会影响学生上大学以后的数学学习。

两种意见相持不下,这必然影响到决策者。一个典型的例子反映了决策者的矛盾心态:人民教育出版社曾编了一本很简明的《微积分初步》给高中使用,但是高考却不考,于是在"唯升学至上"的学校里就不讲,能将这本书给学生讲完的,在全国恐怕是寥若晨星。我在中学教高中数学课时,曾经很认真地讲完了这本书并加了一些内容,当时这样做,要顶着来自方方面面的众多压力。最大的压力是:你首先要保质保量地完成

高考必考的数学内容的教学，而且还必须保证学生在高考中取得好的数学成绩，否则就要归罪于因为你教了微积分而使得学生没考好，这个罪名就大了。庆幸的是我的学生们在高考中数学成绩很出色，尤其到了大学之后，大学里讲高等数学很简略，远不如中学里的老师讲得那样细致，但是他们很轻松地学下来了，他们把这归功于在中学里已经理解了微积分的基本思想和掌握了微积分的基本内容。这在某种程度上也说明在中学讲点微积分的必要性和可能性。

就在我们闭门争论不休的这数十年中，国外的数学教育大大地向前发展了。创造性思维能力的培养，数学与其他学科乃至社会各个方面的联系，数学文化、数学建模等等众多的新概念、新内容进入了中学数学课堂。说到微积分，在经济发达国家早就进了中学，甚至印度、越南的中学数学教材中都有，我们却还在争论要不要，实在可悲。近年来，随着"科教兴国"，建立面向21世纪的高水平的中国教育国策的落实，国家已制定了基础教育的课程标准，微积分进入中学已是不争的定论。正是在这个背景下，我特别约请了中国科学院数学与系统科学研究院的那吉生研究员，在《数理天地》高中版开设了《初等微积分》系列讲座。1998年第10期上刊登了第1讲，到2000年第11期才陆续登完。讲座登出以来，反响良好，学生来信说看了讲座，边学边用，自己数学、物理的学习都有提高；老师们来信说这个讲座帮他们复习了虽在大学学过但已经淡忘了的数学。更多的读者希望将讲座汇编成册出版，这个小册子就是那吉生先生在讲座的基础上进行了修改增补之后而完成的。呈现在读者手里的这本书，已经涵盖了微积分的基本思想和最基础也是最主要的内容，由于它的系统、完整和简明，完全

可以作为一个独立的教本，供高中学生和具有高中数学知识的各类读者学习及高中数学教师教学参考之用。

周国镇

2001 年 11 月 11 日

目　　录

第一讲　极限初步

1. 数列的极限

无穷数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，简记为 $\{a_n\}$ $(n \in N)$，是一种变量，为了描述它的性质，可以引入一些定义. 例如，

若 $|a_n| \leqslant M, \forall\ n \in N$（$\forall$ ："对所有的"），M 为一常数，则称 $\{a_n\}$ 是有界的；

若 $a_n \leqslant M (a_n \geqslant M), \forall\ n \in N$，则称 $\{a_n\}$ 有上（下）界；

若 $a_{n+1} \geqslant a_n (a_{n+1} \leqslant a_n), \forall\ n \in N$，则称 $\{a_n\}$ 单调递增（递减）.

由此可知，数列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots \tag{1.1}$$

是有界的，但不是单调的. 数列

$$1, q, q^2, q^3, \cdots, q^n, \cdots \tag{1.2}$$

当 $|q| \leqslant 1$ 时是有界的；当 $0 < q < 1$ 时是单调递减且有下界的；当 $|q| > 1$ 时是无界的.

然而，最令人感兴趣的则是 $\{a_n\}$ 的变化趋势问题，即当项数 n 无限增大（即 $n \to \infty$）时，a_n 的性态. 这时可能有以下几种情形：

(1) a_n 无限趋近于某个固定常数 A. 确切地说，无论预先给定多么小的正数 ε，在 $\{a_n\}$ 中总能找到一项，从这项起，以后所有的项与 A 的差的绝对值都小于该 ε. 此时称数列 $\{a_n\}$ 有

极限，且 A 为其极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

例如，数列(1.1)当 n 无限增大时，$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 与 0 的差的绝对值 $\frac{1}{n}$ 可以任意地小，于是

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0.$$

特别称极限为 0 的数列为无穷小(数列).

(2) a_n 的绝对值无限增大，即无论预先给定多么大的正数 K，在 $\{a_n\}$ 中总能找到一项，它以后所有项的绝对值都大于 K. 此时称 $\{a_n\}$ 为无穷大(数列)，记作

$$a_n\to\infty,\quad 当\ n\to\infty 时.$$

特别，若 a_n 本身的值无限地增大，则称 $a_n\to+\infty$；若 $-a_n$ 的值无限地增大，则称 $a_n\to-\infty$.

例如，数列(1.2)当 $|q|>1$ 时，是无穷大，当 $q>1$ 时趋近于 $+\infty$.

数列 $a_n=\dfrac{n^2}{n+1000}\to+\infty$，数列 $a_n=\sqrt{n}\cos(2n+1)\pi\to-\infty$.

(3) a_n 不趋近于一个确定值，即没有一个确定的趋向，是振动的. 例如数列

$$a_n=(-1)^n+\frac{1}{n} 和\ a_n=\sin\frac{n\pi}{2},n=1,2,\cdots$$

在后两种情形下数列都没有极限. 注意：由于极限是描述当 $n\to\infty$ 时的趋向，所以去掉任意有限项后，并不改变数列的极限，即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+p} \quad (p \in N).$$

2. 数列极限的四则运算法则

两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列分别称为两个数列的**和**、**差**、**积**、**商**. 在数列的这种四则运算下，以下公式成立(证明是容易的，此处从略).

如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$，则

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (\text{当 } b_n \neq 0, \forall\, n \in N, \text{且 } B \neq 0 \text{ 时}).$$

特别，常数 k 可以看成每项都是 k 的常数数列，则

$$\lim_{n\to\infty} k = k \quad \text{和} \quad \lim_{n\to\infty} (k a_n) = k \lim_{n\to\infty} a_n = kA.$$

利用这些公式可以计算一些复杂数列的极限.

例 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)$

$$= 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3.$$

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt{n^4+2}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n\sqrt{n^2+1} + 1}{\sqrt{n^4+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} + \dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^4}}}$$

$$= \frac{2+2+0}{1} = 4.$$

由此可知，有限个无穷小（数列）的和与积仍是无穷小，无穷小的常数倍也是无穷小．特别是：有界数列与无穷小数列的积是无穷小．

例 3 因为 $|\sin n|\leqslant 1, \forall n\in \mathrm{N}$，

所以 $\{\sin n\}$ 是有界的，而 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无穷小，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

所以 $\left\{\frac{1}{n}\cdot\sin n\right\}$ 仍为无穷小，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

3. 无穷级数的和

将一个数列的每一项顺次相加就得到一个级数．对于无穷级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，作它的前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$ 亦成一数列，这个数列的极限如果存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$，就称 A 为该级数的和，记作：

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=A.$$

例如，对于熟知的等比数列：

$$1,q,q^2,q^3,\cdots \quad (q\neq 1)$$

作 $S_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

当 $|q|<1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1-0}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}$，于是得到无穷递缩等比数列（级数）的和：

$$1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q},(|q|<1).$$

例 4 求和

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

解：因为 $$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\quad (n\geqslant 2),$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

4. 函数的极限

函数 $f(x)$的定义域 X 可以是开区间(a,b)，闭区间$[a,b]$，半开(闭)区间$[a,b)$和$(a,b]$，半无穷区间(a,∞)，$[a,\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，以及整个数轴$(-\infty,\infty)$. 实数 x_0 的邻域是指以 x_0 为中点的某个开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，其中 δ 是某个正数.

对于定义域 X 内的一点 x_0，考察自变量 x 趋近于 x_0 时，对应函数值 $f(x)$的变化情况. 特别当 $f(x)$也趋近于某个确定值 A 时，则称：$x\to a$ 时，$f(x)$的极限是 A，记作：

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

这一情形也可以用数列方式等价表述如下：如果对任何一个数列 $\{x_n\}\subset X$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，即数列 $\{f(x_n)\}(n\in N)$ 都有极限 A，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 这样就把数列的极限和函数的极限联系起来了.

例 5 $f(x)=3x^2$，求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

具体计算一些函数值，作出函数 $y=3x^2$ 的图像（抛物线），直观上可看出，当 x 无限靠近 2 时，$f(x)$的值无限接近 12. 于是 $\lim\limits_{x\to 2}3x^2=12$. 或者依上所述，也可以任意取数列 $\{x_n\}$ $(n\in N)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f(x_n)&=\lim_{n\to\infty}3x_n^2=3\lim_{n\to\infty}x_n^2\\&=3(\lim_{n\to\infty}x_n)^2=3\cdot 2^2=12.\end{aligned}$$

同样可以定义函数的单侧极限. 当 x 从点 x_0 的左（右）方趋近于 x_0 时，即趋近过程中总有 $x<x_0(x>x_0)$，若 $f(x)$ 也趋近于（极限）值 A，则称 $f(x)$ 在 x_0 处有左（右）极限 A，记作：$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$ $\quad(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A)$. 于是有以下定理：

函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是：左右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A.$$

当函数 $f(x)$ 只在 x_0 的一侧有定义时，可以考虑单侧极限. 例如：$\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}=0$；

$$\lim_{x\to 1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

需要说明：考虑 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限时，x_0 本身是否属于定义域是不重要的，$f(x)$ 可以在 x_0 没有定义，只要在它的附近（邻域里）有定义. 例如，考虑 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 是有意义的.

当 $f(x)$ 的定义域为无穷区间、半无穷区间时，也可以相应地考虑自变量 $x\to\infty$，或 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时函数的性态和极限存在的问题，即定义 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$（当然也可以用"任意数列 $\{x_n\}$：$x_n\to\infty$，$x_n\to+\infty$，$x_n\to-\infty$"

的方式来表述).

例 6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

函数极限的四则运算法则与数列的情形一样,即有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\text{当 }\lim g(x)\neq 0\text{ 时})$$

其中 lim 可以是各种类型的函数极限:$x\to x_0$,$x\to x_0+0$,$x\to x_0-0$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,只要相应的极限存在.

极限为 0 的函数亦称无穷小(量). 例如:当 $x\to 0$ 时,$x^n(n>0)$,$\sin x$,$\tan x$,$\log(1-x)$,$\arcsin x$ 等都是无穷小. 特别,有界量和无穷小的积仍为无穷小,据此可以判断一些极限.

例 7 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

两个无穷小 ε_1 和 ε_2,如$\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$仍是无穷小,则称 ε_1 是比 ε_2 高阶的无穷小,记为 $\varepsilon_1=o(\varepsilon_2)$;如$\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\to k$(常数 $k\neq 0$),则称 ε_1 与 ε_2 是同阶无穷小,特别当 $k=1$ 时,称 ε_1 与 ε_2 是等价无穷小,记为 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_2$;当$\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$为有界量时,统记为 $\varepsilon_1=O(\varepsilon_2)$.

例如:当 $x\to 0$ 时,$x^2=o(x)$,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$2\tan x=$

$O(x)$.

前面已经说过，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$的定义与 $f(x)$在 x_0 处的值 $f(x_0)$没有任何关系的，如果特别有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 是连续的. 自然也有单侧连续的概念，即如果 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$在 x_0 左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则右连续.

函数在一点连续，直观上来看，就是函数的图像在该点(附近)是连结在一起，不断开的.

我们已知的函数：幂函数 $x^\alpha(\alpha\in R)$，指数函数 $a^x(a>0)$，对数函数 $\log_a x\,(a>0)$，三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 和反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\mathrm{arccot}\, x$，在它们的定义域内各点都是连续的，它们称为基本初等函数. 由连续函数的运算法则可知：它们经由加减乘除运算所得的函数在定义域内都连续. 此外，对于复合函数 $y=f(g(x))$的极限，可以证明：

如果有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$， $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=y_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} y=\lim_{x\to x_0} f(g(x))=y_0.$$

由此可知：连续函数的复合函数也是连续的.

例 8 求$\lim\limits_{x\to 0}\log(1+\sin x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$的值.

$$\lim_{x\to 0}\log(1+\sin x)=\log(1+\lim_{x\to 0}\sin x)=\log(1+0)=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}=2^{(\frac{\pi}{2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x)}=2^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}=1.$$

由基本初等函数经过加减乘除及函数复合运算后得到的函数称为初等函数，它们是初等微积分研究的主要对象，由上

可知：

初等函数在定义域内是连续的.

利用这一性质可以计算许多极限.

函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续；如果 $f(x)$ 还在端点 a 右连续，在端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

5. 两个重要的极限

我们将不加证明地引用下面两个判断极限存在的准则，它们各有数列形式和函数形式.

准则 1 数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，$\forall\, n\in N$，且存在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$，则 $\{b_n\}$ 的极限存在也等于 l，即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$.

准则 1′ 函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 在 x_0 的某一邻域里满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=l$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l.$$

这个准则也称为“两边夹”法则，其实质直观上是容易理解的.

准则 2 数列 $\{a_n\}$ 单调递增（减）有上（下）界，则 $\{a_n\}$ 的极限存在.

（请读者写出准则 2 的函数形式）

如果 $a_n\leqslant b_n$，$n=1,2,\cdots$，且它们的极限存在，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 注意，即使有 $a_n<b_n$，$n=1,2,\cdots$，也不能保证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 这只要看例子：$a_n=\dfrac{1}{n+1}$，$b_n=\dfrac{1}{n}$，$a_n<b_n$，$n=1,2,\cdots$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

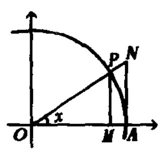

图 1.1