2004年

经济类研究生入学考试典型题详解系列

陈跃 主编

线性代数典型题详解

- 名校历年考研真题详解
- 名校题库精选
- 名校课堂精华

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

线性代数

典型题详解

2004年经济类研究生入学考试典型题详解系列

线性代数典型题详解

陈　跃　主编

机械工业出版社

本书紧扣最新经济类研究生入学考试大纲，以典型题详解的形式涵盖了《线性代数》大纲中必考的所有内容。本书按照大纲的要求设有综合填空题、综合选择题和综合解答题，并在各题后附有详细的解答过程。内容涉及行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等。在每章之前，还列出了该章的复习与考试要求、重要公式和结论。对于题型中出现的重要公式作了注解，以引起读者注意。

本书的最大特色是选题典型，解答详细，将各章的题型和考试要点有机地结合起来。读者在阅读本书时，不仅可以掌握各种题型的解题思路和技巧，而且还能将理论知识和考试要点融会贯通。本书是经济类研究生（含 MBA）入学考试高分突破必备用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数典型题详解/陈跃主编．—北京：机械工业出版社，2002.11

（2004 年经济类研究生入学考试典型题详解系列）

ISBN 7-111-10813-2

Ⅰ．线…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．线性代数－研究生－入学考试－解题　Ⅳ．O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 062849 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策　　划：常淑荼　责任编辑：曹雅君

责任校对：肖新民　封面设计：饶　薇　责任印制：付方敏

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm × 1400mm1B5·13.5 印张·516 千字

0 001—4 000 册

定价：32.00 元

前　　言

从2003年开始，在经济类研究生入学考试中，数学总分值从原来的100分增加到150分，数学成绩的高低成为能否考上研究生的关键。为此，考生花费在数学上的复习时间很多，但总感到解题能力还是上不去，最后的考分也不理想，这成为众多考生的一块心病。症结在哪里？“看”的题太少，“背”的题太少，“做”的典型题太少。

本丛书是编者多年辅导考研学生经验的精华。不同于市面上的指导、模拟题一类的复习资料，它具有如下特点：

(1) 题目典型且量大，几乎收集了目前经济类考研数学的全部题型和典型题。

(2) 每题有详解，包括选择题在内，每题解答得都很清晰，便于考生理解。有些题的结论在教材上并不作为定理或结论，但在考研中可直接使用，在本书中都做了说明，要求熟记。

认真“做”每道题，认真“背”一些结论性典型题，这是编者的建议。

由于水平所限，本丛书的错误和不妥之处在所难免。若有赐教，不胜感激。圣才工作室全体员工参与了本丛书典型题的筛选、解答和检查，在此表示特别感谢。

需要说明的是，由于考虑读者备考时间，2003年考研题无法收录在本书中，特表歉意。如有需要，编者愿穷全力相助(E-mail：1218 c@sohu.com)。

陈　跃

2003年1月

丛书编辑委员会

目　录

第1章 行 列 式

1.1 复习与考试要求

1. 理解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质。

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式。

1.2 重要公式和结论

1. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的转置行列式的值 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 相等。

2. 交换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。

3. 行列式中某行(列)元素的非零公因子可以提到行列式的外面，如：$|\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}| = 2|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}|$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为三维列向量。

4. 行列式某两行(列)的对应元素成比例，或行列式中有一行(列)的元素全为0，则此行列式的值为0。如：$|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{\alpha}| = 0$；$|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0| = 0$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量。

5. 行列式某行(列)元素是两数之和，则此行列式等于下述两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用向量形式表示为：

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}'_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$$
$$= |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}'_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量。

6. 将行列式的某行(列)的各元素乘以常数 k 加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变。

用向量形式表示为：

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$$
$$= |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$$

7. 行列式 D 按某一行(列)展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk} = \begin{cases} \boldsymbol{D}, i=j, \\ 0, i \neq j; \end{cases} (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{A}_{kj} = \begin{cases} \boldsymbol{D}, i=j, \\ 0, i \neq j; \end{cases} (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij}是 a_{ij}的代数余子式。

8. $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \iddots & \\ & \lambda_{n-1} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.3 典型题详解

1.3.1 综合填空题(1～33 题)

1. 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式，该式中 x 的系数为________。

解 因为行列式中只有一个元素为 x，所以多项式中含有 x 的项为

$$(-1)^{2+3}x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x(-1) = x$$

所以 x 的系数为 1。

2. 若 $\tau(124659783)=9$，则 $\tau(387956421)=$________。

解 直接套用公式

$$\tau(124659783)+\tau(387956421)=C_9^2=36$$

即 $$9+\tau(387956421)=36$$

所以 $$\tau(387956421)=27$$

注 以下公式课本上没有，但考研时可作为公式直接使用。请牢记！ $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = C_n^2$

3. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 3，则行列式 $|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}| =$ ________。

解 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是关于 λ 的 n 次多项式，即

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

因为有一个特征值为 3，所以 λ_i 中有一个值为 3。不妨设 $\lambda_1 = 3$，则

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (\lambda - 3)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

令 $\lambda = 3$，得

$$|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}| = (3-3)(3-\lambda_2)\cdots(3-\lambda_n) = 0$$

4. 设 $\boldsymbol{B}$ 为 2001 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}| =$ ________。

解 根据矩阵与矩阵的转置关系，易得

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$$

又因为 $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，所以

$$|\boldsymbol{B}| = |-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = (-1)^{2001}|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$$

即 $$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$$

于是 $$2|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| + (-|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|) = 0$$

所以 $$|\boldsymbol{B}| = 0$$

5. 若行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}_{41} + 2\boldsymbol{A}_{42} + 3\boldsymbol{A}_{44} =$ ________。（其中 $\boldsymbol{A}_{4j}$ 是 $\boldsymbol{a}_{4j}$ 的代数余子式）

解 令 D_4' 为 $D_4' = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

易知 $D_4' = 0$ 且 D_4 中第 4 行各元素的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{4j}$ 等于行列式 D_4' 中第 4 行对应元素的代数余子式，于是 D_4' 按第 4 行元素展开为

$$0 = 1\cdot\boldsymbol{A}_{41} + 2\cdot\boldsymbol{A}_{42} + 0\cdot\boldsymbol{A}_{43} + 3\cdot\boldsymbol{A}_{44}$$

即 $$\boldsymbol{A}_{41} + 2\boldsymbol{A}_{42} + 3\boldsymbol{A}_{44} = 0$$

6. 若 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$，则行列式

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & 0 & 2 \\ c+2 & 3 & -1 & 2 \\ d+4 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

解 $$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & 0 & 2 \\ c+2 & 3 & -1 & 2 \\ d+4 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & 0 & 2 \\ c & 3 & -1 & 2 \\ d & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & 1 & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 0 & 1 \\ d & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & 1 & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 0 & 1 \\ d & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 8 = 16$$

7. 行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 10 & 11 & -5 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$。

解 按照行列式的定义，第 1 行只能取第 4 列的元素 1；然后第二行不能取第 4 列的元素 7，则只剩下第 3 列的元素 2 不为 0；同理，第三行只能取元素 3；同理，第 4 行取第 1 列元素 4；于是第 5 行只能取第 5 列元素 5。因为

$$\tau(43215) = 6$$

所以 $D_5 = (-1)^6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

8. 已知 a，b 为整数，且满足

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1000 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0，则 a = \underline{\qquad\qquad}，b = \underline{\qquad\qquad}。$$

解 $$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1000 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8(a^2 + b^2) = 0$$

故有 $a^2 + b^2 = 0$，又由 a，b 为整数，故

$a = 0$，$b = 0$

9. 行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}=$ ________。

解 $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}a & a & 0 & 0\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 0 & 0 & b & b\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$

$$=ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1}ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -a & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$$

$$=-a^2b\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-b\end{vmatrix}=a^2b^2$$

10. 设 4×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ________。

解　因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)\\&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3+\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4+\boldsymbol{\gamma}_4)\\&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)\end{aligned}$$
再根据行列式的性质，第 2、3、4 列分别提取公因数 2，有
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=2^3|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8\,(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)=8\,(4+1)=40\end{aligned}$$

11. 行列式 $\begin{vmatrix}1994 & 1995 & 1996\\ 1997 & 1998 & 1999\\ 2000 & 2001 & 2002\end{vmatrix}=$ ________。

解　第 2 列乘以 (-1) 加到第 3 列，得
$$\begin{vmatrix}1994 & 1995 & 1\\ 1997 & 1998 & 1\\ 2000 & 2001 & 1\end{vmatrix}$$
第 1 列乘以 (-1) 加到第 2 列，得
$$\begin{vmatrix}1994 & 1 & 1\\ 1997 & 1 & 1\\ 2000 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & 0\end{pmatrix}$，

则 $|C|=$ __________。

解 由于行列式交换两行或两列的位置时行列式值反号，将矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 中 B 所在 n 列的列向量分别记为 b_1，b_2，$\cdots$，b_n。A 所在的 m 列向量分别记为 a_1，a_2，$\cdots$，a_m，则

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = (b_1,\cdots,b_n,a_1,\cdots,a_m)$$

则行列式 $|(b_1,\cdots,b_n,a_1,\cdots,a_m)|$ 经过 mn 次交换其两列的位置化为行列式

$$|(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B| = ab$$

故有

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}ab$$

13. 设 a，b，c 为方程 $x^3+px+q=0$ 的三个互异的实根，则

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

解
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

而由于 a，b，c 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个实根，故有 $a+b+c=0$，从而

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

14. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行元素代数余子式之和的值为 __________。

解 把行列式 D 的第 4 行元素换成第 2 行的元素，得另一行列式 D'，则易

知

$$D' = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

根据行列式的定义按第4行展开，得

$$2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + 2A_{44} = 0$$

即 $$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0$$

15. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第4行元素的余子式之和的值为__________。

解 根据行列式余子式的定义有4个余子式之和为

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-7) \times 8 + 0 + 3 \times 14 + 7 \times (6-8)$

$= -28$

16. 五阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -4 & -5 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -4 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ __________。

解 记该五阶行列式为 $|\boldsymbol{A}|$，易知 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵

即 $$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$$

因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$，所以 $|\boldsymbol{A}| = |-\boldsymbol{A}|$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 是5阶行列式，所以 $|-\boldsymbol{A}| = (-1)^5 |\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$

即 $2|\boldsymbol{A}| = 0$，所以 $|\boldsymbol{A}| = 0$

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = -3$，则 $|\boldsymbol{A}^2| =$ __________，$|3\boldsymbol{A}| =$ __________。

解 因为 $$|\boldsymbol{A}^2| = |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}|,$$

所以 $$|\boldsymbol{A}^2| = (-3) \cdot (-3) = 9$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，所以 $|3\boldsymbol{A}| = 3^3 \cdot |\boldsymbol{A}|$

于是 $$|3\boldsymbol{A}| = 3^3 \cdot (-3) = -81$$