

高等学校数学辅导教材

- 大学数学同步学练指南
- 备考硕士水平练测宝典

考研数学题典

——全国历年考研统考数学试题
分类全解与指导

黄光谷 胡启旭 何晓亚 石先军 编



华\中\科\技\大\学\出\版\社

考研数学题典

——全国历年考研统考数学试题
分类全解与指导

黄光谷 胡启旭 编
何晓亚 石先军

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学题典/黄光谷 等编

武汉:华中科技大学出版社, 2002年6月

ISBN 7-5609-2718-1

I. 考…

II. ①黄… ②胡… ③何… ④石…

III. 数学-研究生-入学考试-教学参考资料

IV. O1

考研数学题典

黄光谷 等编

责任编辑:钟小珉 李立鹏

封面设计:刘 卉

责任校对:蔡晓璐

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司

印 刷:今印印务有限公司

开本:850×1168 1/32

印张:19.75

字数:475 000

版次:2002年6月第1版

印次:2002年6月第1次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5609-2718-1/O·260

定价:23.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书汇集了 1987—2002 年全国硕士生入学统一考试数学(一)至(四)的全部试题,并按照考研数学考试大纲和面向 21 世纪课程新教材《微积分》、《线性代数》、《概率统计》的目录顺序,重新分类、整理、编排,按章编写了复习指导,且逐题给出了精练解答及分析.其中,第一篇包括高等数学的极限与连续,一元函数微分学、积分学,常微分方程共四章;第二篇包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分、积分学(含重积分与曲线、曲面积分),无穷级数共五章;第三篇为线性代数共六章;第四篇为概率论与数理统计共八章.第五篇给出了这些试题的统一分类表及综合统计、分析及预测.第六篇为附录,收录了 2001 年、2002 年数学(一)至(四)的试题、解答及评分标准,供读者模拟测试.

全国历年统一硕士研究生入学试题及解答是一个知识宝库,也是指导上述几门课程教与学的指挥棒.本书在着重于基本概念、基本理论、基本解题方法和运算技巧等方面阐述的同时,尽量注意到解题方法的归类,具有很强的同步性、可读性、针对性和资料性,循序渐进,便于自学,适用面广:既适宜各理、工、农、林、财经、管理等各专业一、二年级大学生与教学进度同步学习及复习、备考;也特别适宜高年级大学生和考研者作为考研复习、备考的资料;还可供任课教师教学新课选例、备复习课选例、编拟考题查阅和参考;还有利于数学能力和数学素质的提高.

此书在手,胸有成竹,钻研领会,应考不愁.熟读此书上千题,不会考试也会考.

出版说明

历年全国统一硕士研究生入学试题及解答是一个知识宝库,也是指导新课程教与学的指挥棒.本书汇集了1987—2002年全国硕士研究生入学统一考试理工数学(一)、(二)和经济数学(三)、(四)^①的全部试题,并按照2001年考研数学考试大纲和面向21世纪课程教材(高等教育出版社)《微积分》上、下册(第一版,同济大学应用数学系编)、《线性代数》(第三版,同济大学数学教研室编)、《概率论与数理统计》(第三版,浙江大学盛骤等编)的目录顺序,分为四篇重新分类、整理、编目,按章编写了复习指导,且全部给出了精练解答(含分析).这样编排既便于考研者循序渐进地进行复习、备考,也便于新学这几门课程的低年级在校生同步学习和复习.第五篇给出了编者对1987年开始实施考研统考以来数学(一)至(四)试题的统一分类及综合的统计、分析及预测;第六篇收录了2001年、2002年的考研数学试题.

在各章、节的试题及解答中,按年号及数学(一)至(四)的顺序编排,其中的重复试题亦按此顺序优先非重复选入(即省略了顺序在后面的重复题).例如,题号1. 1、99、三、(2)、(5')的意思依次是:某章节的第1题,取自数学(一)、1999年的、第三大题的、第(2)小题;(5')系指“本题满分5分”;其余类似.其中,画_____者为填空题;留[]者为选择题;留()者为判断是非题.其中,打“*”号的内容是数学(二)或(四)暂时不考的内容.

许多试题是综合题,为了便于新学者学习,对综合题基本上是按逆序编排,而非按用到的主要知识编排.例如,某题既用到闭区间上连续函数的性质,又用到微分中值定理和变上限积分,则按逆

^① 1987—1996年的数学(二)为原数学(三),数学(三)、(四)为原数学(四)、(五);这几年的原数学(二)的大部分试题包含在数学(一)之中,不另收录.

序将该题编入微积分基本定理这一节中. 所以某些章节的试题没有或较少, 不是该章节的内容不重要, 而是它的知识较前、是基础, 而多次出现在后面章节的综合题中. 有些综合题既用到高等数学, 又用到线性代数和概率统计知识的, 也按逆序编排, 选列在后面的某章节之中.

本书的题量很大, 从综合分析及预测可看出大致趋势, 可供读者备考参考. 熟读此书, 触类旁通, 可收到“熟读唐诗三百首, 不会作诗也会吟”的功效, 使临考者胸有成竹, 重点明确, 胜券在握.

编写本书的初衷, 与素质教育并不矛盾. 因为一方面, 许多考研试题, 本身就体现了数学素质及综合素质方面的要求, 阅读这些题解, 有利于提高读者的素质; 另一方面, 通过阅读本书, 可以帮助许多读者顺利地通过考试, 可以使读者把更多的时间和精力用到提高素质方面去.

参加本书编写工作的, 还有李美珍、黄青、李杨、黄东、蔡晓英、黄川等同志.

编写本书, 得到了武汉科技学院及数理系领导和华中科技大学出版社领导的关心与支持, 在此表示衷心的感谢!

由于我们的水平有限, 加上时间仓促, 书中可能会有错误或缺点, 恳请读者和同行批评指正, 以便再版时修改.

本书具有很强的同步性、可读性、资料性、针对性, 与教学和复习进度同步, 由浅入深, 循序渐进, 便于自学, 适用面广. 适宜各理、工、农、林、财经、管理等各类大学生和考研者学习、备考(但应以各类考纲和课本为准, 有重点地阅读); 也可供这些专业的教师教学备课、上复习课、查阅和拟题参考.

编 者

2002 年 3 月

目 录

第一篇 高等数学(即微积分)上册部分	(1)
第一章 函数、极限、连续	(1)
复习指导	(1)
§ 1 函数、预备知识	(3)
§ 2 数列极限的定义与性质	(5)
§ 3 函数极限的定义与性质	(6)
§ 4 极限的运算法则	(7)
§ 5 极限存在准则与两个重要极限	(13)
§ 6 无穷小的比较	(17)
§ 7 函数的连续性与连续函数的运算	(20)
§ 8 闭区间上连续函数的性质	(23)
第二章 一元函数微分学	(25)
复习指导	(25)
§ 1 导数的概念	(27)
§ 2 求导法则、高阶导数	(40)
§ 3 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数	(48)
§ 4 函数的微分	(53)
§ 5 微分中值定理	(55)
§ 6 泰勒公式	(63)
§ 7 洛必达法则	(66)
§ 8 函数的单调性与凸凹性的判别方法	(74)

§ 9 函数的极值与最大值、最小值, 曲率	(83)
* § 10 一元函数微分学在经济中的应用	(102)
第三章 一元函数积分学	(111)
复习指导	(111)
§ 1 原函数与不定积分的概念及性质	(113)
§ 2 不定积分的换元积分法	(114)
§ 3 不定积分的分部积分法	(119)
§ 4 有理函数的不定积分	(123)
§ 5 定积分的概念与性质	(124)
§ 6 微积分基本定理	(130)
§ 7 定积分的换元法与分部积分法	(148)
§ 8 定积分的几何应用	(160)
§ 9 定积分的物理应用	(181)
§ 10 平均值	(182)
§ 11 反常积分	(183)
第四章 常微分方程与差分方程	(188)
复习指导	(188)
§ 1 微分方程的基本概念	(190)
§ 2 可分离变量的微分方程	(191)
§ 3 一阶线性微分方程	(196)
§ 4 可用变量代换法求解的一阶微分方程	(202)
§ 5 可降阶的二阶微分方程	(205)
§ 6 线性微分方程解的结构	(211)
§ 7 二阶和高阶常系数线性微分方程	(212)
* § 8 差分方程 ^①	(220)

① 差分方程是经济数学中的内容.

* 第二篇 高等数学(即微积分)下册部分 ...	(221)
第五章 向量代数与空间解析几何	(221)
复习指导	(221)
§ 1 向量及其乘法运算	(222)
§ 2 平面与直线	(223)
§ 3 曲面、曲线	(226)
第六章 多元函数微分学	(228)
复习指导	(228)
§ 1 多元函数的基本概念、偏导数	(229)
§ 2 全微分	(231)
§ 3 复合函数的求导法则	(233)
§ 4 隐函数的求导公式	(240)
§ 5 方向导数与梯度	(242)
§ 6 多元函数微分学的几何应用	(243)
§ 7 多元函数的极值	(245)
第七章 重积分	(251)
复习指导	(251)
§ 1 二重积分的概念、性质与计算	(252)
一、利用直角坐标计算二重积分	(252)
二、利用极坐标计算二重积分	(258)
§ 2 三重积分的计算	(263)
§ 3 重积分的应用举例	(264)
第八章 曲线积分与曲面积分	(267)
复习指导	(267)
§ 1 第一类曲线积分	(268)
§ 2 第一类曲面积分	(269)
§ 3 第二类曲线积分	(272)

§ 4 格林公式	(275)
§ 5 第二类曲面积分	(280)
§ 6 高斯公式与散度	(282)
第九章 无穷级数	(287)
复习指导	(287)
§ 1 常数项级数的概念与基本性质	(288)
§ 2 正项级数及其审敛法	(292)
§ 3 绝对收敛与条件收敛	(294)
§ 4 幂级数	(299)
§ 5 函数的泰勒级数	(303)
§ 6 函数的幂级数展开式的应用	(305)
§ 7 傅里叶级数及其收敛性质	(307)
§ 8 一般周期函数的傅里叶级数	(308)
第三篇 线性代数	(311)
第十章 行列式	(311)
复习指导	(311)
§ 1 行列式的概念和基本性质	(312)
§ 2 行列式按行(列)展开	(315)
§ 3 克拉默法则	(317)
第十一章 矩阵及其运算	(318)
复习指导	(318)
§ 1 矩阵概念	(319)
§ 2 矩阵的运算	(319)
§ 3 逆矩阵	(325)
§ 4 矩阵分块法	(339)
第十二章 矩阵的初等变换与线性方程组	(341)
复习指导	(341)

§ 1 矩阵的秩	(342)
§ 2 线性方程组的解	(346)
§ 3 初等矩阵	(356)
第十三章 向量组的线性相关性	(358)
复习指导	(358)
§ 1 n 维向量	(359)
§ 2 向量组的线性相关性	(360)
§ 3 向量组的秩	(373)
§ 4 线性方程组的解的结构	(379)
第十四章 相似矩阵及二次型	(392)
复习指导	(392)
§ 1 方阵的特征值与特征向量	(394)
§ 2 相似矩阵	(404)
§ 3 对称矩阵的相似矩阵	(413)
§ 4 二次型及其标准形	(415)
§ 5 正定二次型	(421)
*第十五章 线性空间与线性变换	(426)
复习指导	(426)
§ 1 线性空间、维数、基底与坐标等概念	(426)
第四篇 概率论与数理统计	(427)
第十六章 随机事件和概率	(427)
复习指导	(427)
§ 1 样本空间、随机事件	(429)
§ 2 频率与概率	(430)
§ 3 等可能概型(古典概型)	(434)
§ 4 条件概率	(435)
§ 5 独立性	(442)

第十七章 随机变量及其概率分布	(445)
复习指导	(445)
§ 1 离散型随机变量的概率分布	(446)
§ 2 随机变量的分布函数	(450)
§ 3 连续型随机变量的概率密度	(452)
§ 4 随机变量的函数的分布	(457)
第十八章 二维随机变量及其概率分布	(462)
复习指导	(462)
§ 1 二维随机变量	(463)
§ 2 边缘分布与条件分布	(465)
§ 3 相互独立的随机变量	(467)
§ 4 两个随机变量的函数的分布	(469)
第十九章 随机变量的数字特征	(474)
复习指导	(474)
§ 1 数学期望	(475)
§ 2 方差	(485)
§ 3 几种重要随机变量的数学期望及方差	(492)
§ 4 协方差及相关系数	(495)
第二十章 大数定律及中心极限定理	(503)
复习指导	(503)
§ 1 大数定律	(504)
§ 2 中心极限定理	(504)
*第二十一章 数理统计的基本概念	(508)
复习指导	(508)
§ 1 抽样分布	(509)
*第二十二章 参数估计	(512)
复习指导	(512)

§ 1 点估计	(513)
§ 2 估计量的评选标准	(515)
§ 3 区间估计	(516)
§ 4 单个正态总体均值与方差的区间估计	(517)
*第二十三章 假设检验	(519)
复习指导	(519)
§ 1 正态总体均值的假设检验	(519)
第五篇 历年考研全国统一数学试题	
的统计、分析及预测	(521)
一、历年考研试题情况统计	(521)
二、历年考研试题情况分析和展望	(530)
三、历年命题情况和今后几年考研试题的预测	(535)
第六篇 附录	(540)
近两年全国攻读硕士学位研究生入学	
考试数学(一)至(四)试题、参考解答	
及评分标准	(540)
一、2001 年数学(一)试题、参考解答及评分标准	(540)
二、2001 年数学(二)试题、参考解答及评分标准	(549)
三、2001 年数学(三)试题、参考解答及评分标准	(558)
四、2001 年数学(四)试题、参考解答及评分标准	(569)
五、2002 年数学(一)试题、参考解答及评分标准	(577)
六、2002 年数学(二)试题、参考解答及评分标准	(588)
七、2002 年数学(三)试题、参考解答及评分标准	(598)
八、2002 年数学(四)试题、参考解答及评分标准	(608)

第一篇 高等数学(即微积分)上册部分

第一章 函数、极限、连续

复习指导

一、考纲要求^①

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.
6. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

^① 录自 2001 年数学考试大纲数学一(或三,注有 * 号),下同.

10. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、重点难点

1. 重点:求函数的定义域和建立函数关系式;熟练掌握极限的两个重要准则与两个重要极限及用等价无穷小求极限;会判别函数间断点的类型.

2. 难点:理解极限的 $\epsilon-N$, $\epsilon-\delta$ 定义;理解并运用闭区间上连续函数的性质.

三、复习注意

1. 在建立应用问题的函数关系式时,要仔细审题,恰当地预设自变量和因变量,根据题意或题设,找到变量之间联系的等式(或关系式),就可建立函数关系式.

2. 本章中的求(或计算)极限的问题,主要用下列方法:两个重要极限与两个重要法则,等价无穷小代换与无穷小的性质(有界量乘以无穷小仍为无穷小等),用函数式的变形法求极限,函数的连续性,极限与连续的四则运算性质等.

3. 在利用两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

时,要注意它们的适用时机分别是

$$1^\infty \text{型} \quad \text{与} \quad \frac{0}{0} \text{型 (三角函数)}$$

的未定式,并且经常对求极限的式子进行恒等变形为

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = \lim_{\psi(x) \rightarrow 0} [1 + \psi(x)]^{1/\psi(x)} \quad \text{与} \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)},$$

然后套用公式(1)求极限.

§ 1 函数、预备知识

1. I、88、三、(5')^① 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由题设 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$, 得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)};$$

由 $\ln(1-x) \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$,
知 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

2. I、90、一、(3)、(3') 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ _____.

解 1. 由题设知: $|f(x)| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 所以

$$f[f(x)]=1.$$

3. II、87、二、(1)、(3') $f(x)=|x \sin x| e^{\cos x}, -\infty < x < +\infty$
是 []

- (A) 有界函数; (B) 单调函数;
(C) 周期函数; (D) 偶函数.

解 应选(D). 因为

$$f(-x)=|-x \sin(-x)| e^{\cos(-x)}=|x \sin x| e^{\cos x}=f(x),$$

故应选(D).

4. II、92、二、(2)、(3') 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2+x, & x > 0, \end{cases}$ 则 []

$$(A) f(-x)=\begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2+x), & x > 0; \end{cases}$$

^① 这里(5')表示(本题满分5分), 以下类似.

$$(B) f(-x) = \begin{cases} -(x^2+x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2-x, & x > 0; \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2-x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

解 应选(D), 直接验证之. 因为

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0, \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0, \end{cases} = \begin{cases} x^2-x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

故应选(D).

5. II、97、二、(5)、(3') 设

$$g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$$

则 $g[f(x)] =$

[]

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

解 应选(D). $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0. \end{cases}$

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x < 0$; 而当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$, 所以

$$g[f(x)] = \begin{cases} x^2+2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0, \end{cases}$$

故应选(D).

6. III、90、二、(1)、(3') 设函数 $f(x) = x \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$

是

[]

(A) 偶函数;

(B) 无界函数;

(C) 周期函数;

(D) 单调函数.

解 应选(B). 显见 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x \rightarrow \pm \infty$, $f(x) \rightarrow \pm \infty$ 是无

界函数, 故选(B).