江苏省五年制中学試用課本

初等数学

CHUDENG SHUXUE

第三册

江苏人民出版社

江苏省五年制中学試用課本

初等数学

第三册

江苏省教材編輯委員会編

*

江苏省书刊出版业营业許可証出 001 号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

（南 京 湖 南 路 11 号）

江苏省新华书店发行　中华书局上海印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗 1/32　印張 7 7/16

1960 年 5 月第 1 版

1960 年 7 月第 2 版南京第 2 次印刷

印数 2,001—7,000

統一书号：K7100 · 1233

定　价：(2) 三角八分

目　录

第六章　三角函数

第七章 复 数

第八章 二元函数

第九章　綫性规划

第六章　三角函数

I. 任意角的三角函数

§1. 任意角的三角函数概念

对任意角的三角函数，我們是这样定义的：如果任何一个角 α 的終边上一点 M 的坐标是 (x, y)，原点到 M 点的距离是 r，那末

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

此外，我們把 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的倒数分别記做 $\operatorname{cosec}\alpha$，$\sec\alpha$，并把它們叫做角 α 的余割，正割。

根据相似三角形的性质，可以証明任意角的三角函数值和終边上所取 M 点的位置沒有关系。

上面所述任意角的三角函数的定义，可以推导出終边相同的角的三角函数完全相同。

例如，$390°$ 的角和 $30°$ 的角的終边相同，因此

$\sin390° = \sin30°$　　　　$\operatorname{tg}(-330°) = \operatorname{tg}30°$

$\cos(-330°) = \cos30°$ 等等。

一般地說，$k \cdot 360° + \alpha$（k 为整数）的三角函数和 α 的三角函数完全相同，也就是說，对于任意角 α 和任意整数 k，我們都

有：

$$\sin(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$$

习 题 一

1. 用一般的形式写出和下列各角終边相同的一切角：

（1） 60°　　-135°　　210°　　-60°

（2） -30°　　59°　　119°　　-76°

2. 求下列各三角函数的值：

（1） $\sin 750^\circ$　　$\cos 85^\circ$　　$\operatorname{tg}(-390^\circ)$　　$\sin(-390^\circ)$

（2） $\cos(-315^\circ)$　　$\operatorname{tg}(-330^\circ)$　　$\sin 45^\circ$

3. 如果角的終边上一点的坐标是：(1) $(3,4)$；(2) $(-5,12)$；(3) $(-8,-6)$；(4) $(2,-1)$，求这角的正弦、余弦、正切的值。

§2. 三角圓

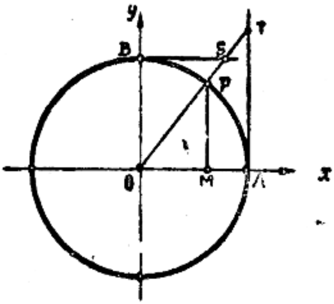

图 1

1. 用綫段表示三角函数： 以坐标軸的原点 O 为圓心，以等于单位长的綫段为半徑所作的圓叫做**单位圓**。

設单位圓和横坐标軸的正方向 ox 相交于 A 点，和纵坐标軸的正方向 oy 相交于 B 点，并且和角 α 的終边相交于 P 点。自 P 点作 x 軸的垂綫 MP；过 A 点和 B 点分别作单位圓的切綫；并且延长 OP 或者 PO，使它

和所作的两条切綫分别交于 T 点和 S 点(見图 1)。

我們把图中的綫段 (例如 MP、OM 和 OP 等等) 都看成是有向綫段,并认为由左至右或由下至上为綫段的正方向;从原点出发的有向綫段我們总把它作为正的。

根据三角函数的定义

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}$$

但是因为 OP 的量数是 1 并且是正的, 所以 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ **的值可以分别用单位圓中的綫段 MP 和 OM 的量数連同它們的符号来表示。**

其次 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{OM}$,

但是因为 $\triangle OMP\sim\triangle OAT$,

$$\therefore\qquad \frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}$$

因此 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AT}{OA}$

同样,我們可以得到

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{OM}{MP}=\frac{BS}{OB}$$

因为 OA 和 OB 的量数都是 1 并且都是正的, 所以 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ **的值可以分别用单位圓中的綫段 AT 和 BS 的量数連同它們的符号来表示。**

可以用来表示 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的单位圓中的綫段 MP、OM、AT 和 BS 分别叫做角 α 的**正弦綫、余弦綫、正切綫和**

余切綫。

2. 角由 0° 变到 360°，正弦、余弦、正切、余切各函数值的变化 在图 2 的单位圆里角 α 的終边，从始边 OA 的位置出发，經过 OP_1、OP_2、OP_3 等等位置，旋轉到 OB 的位置的时候，角 α 就由 0° 变到 90°。这时，正弦綫 MP 的长就对应地由 0 逐漸增加到 1；余弦綫 OM 的长对应地由 1 逐漸減少到 0；正切綫 AT 的长对应地由 0 逐漸增加。在 OP 充分接近 OB 的时候，AT 可以变到比任何指定的綫段都长（就是可以无限增长），但是在 OP 到达 OB 的时候，OP 与从 A 所引的切綫就沒有交点，AT 就不存在；余切綫 BS 在 OP 沒有离开 OA 的时候不存在，在 OP 离开 OA 充分近的时候，可以比任何指定的綫段都长。然后，随着 OP 的旋轉，BS 的长对应地逐漸減少到 0，这就是說：当角 α 由 0 变到 90° 的时候，$\sin\alpha$ 的值由 0 逐漸增加到 1；$\cos\alpha$ 的值由 1 逐漸減少到 0；$\operatorname{tg}\alpha$ 的值由 0 起逐漸增加，在 α 充分接近 90° 的时候，可以变到比任何指定的数都大，而当 α 等于 90° 的时候，$\operatorname{tg}\alpha$ 不存在；$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值在 α 等于 0° 的时候不存在，在 α 离开 0° 充分近的时候，可以比任何指定的数都大，然后逐漸減少到 0。

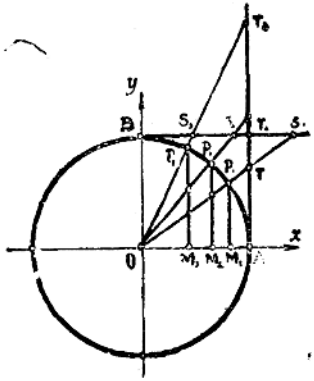

图 2

同样，在图 3、图 4、图 5 的单位圆中，注意到各三角函数綫的符号，就可以看到：

当角 α 由 90° 变到 180° 的时候，$\sin\alpha$ 的值由1逐渐减少到0; $\cos\alpha$ 的值由0逐渐减少到 -1; $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值在 α 等于 90° 的时候不存在，然后由負值逐渐增加到0; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值由0起逐渐减少，而当 α 等于 180° 的时候，$\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值不存在。

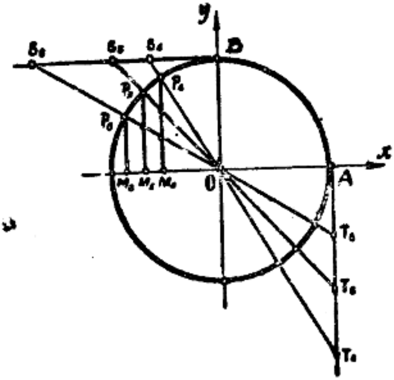

图 3

当角 α 由 180° 变到 270° 的时候，$\sin\alpha$ 的值由0逐渐减少到 -1; $\cos\alpha$ 的值由 -1 逐渐增加到0; $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值由0起逐渐增加，而当 α 等于 270° 的时候，$\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值不存在; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值在 α

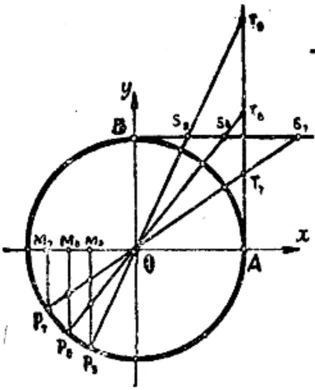

图 4

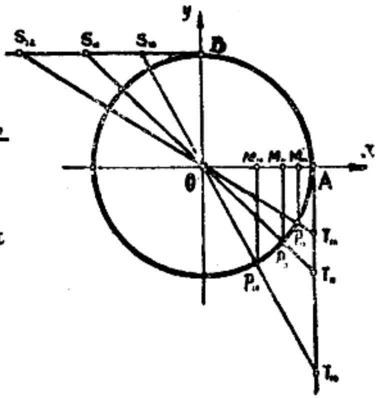

图 5

等于 180° 的时候不存在，然后由正值逐渐减少到 0。

当角 α 由 270° 变到 360° 的时候，$\sin\alpha$ 的值由 -1 逐渐增加到 0；$\cos\alpha$ 的值由 0 逐渐增加到 1；$\operatorname{tg}\alpha$ 的值在 α 等于 270° 的时候不存在，然后，由負值逐渐增加到 0；$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值由 0 起逐渐减少，而当 α 等于 360° 的时候，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值不存在。

上面的結果可以列成下表

α	0°		90°		180°		270°		360°
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	↗	不存在	↗	0	↗	不存在	↗	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在	↘	0	↘	不存在	↘	0	↘	不存在

由上面表中可以清楚的看到当角 α 由 0° 变化到 360° 时函数值变化的情况，又因終边相同的角对应的三角函数值是相同的，所以可直接推得角 α 由 $k\cdot360°$ 到 $(k+1)\,360°$ 对应的各三角函数值的变化情况。

习 題 二

1．比較下列各函数值的大小：

（1）$\cos30°$ 与 $\cos31°$　　（2）$\sin58°$ 与 $\sin58°30'$

（3）$\operatorname{tg}65°$ 与 $\operatorname{ctg}65°$

2．决定下列各差的符号：

（1）$\sin 50^\circ-\cos 50^\circ$　　　　（2）$\cos 30^\circ-\sin 30^\circ$

（3）$\mathrm{tg}75^\circ-\mathrm{tg}25^\circ$　　　　（4）$\mathrm{cosec}20^\circ-\sec 70^\circ$

（5）$\sin 115^\circ-\mathrm{tg}115^\circ$

3．叙述当角 α 由 90° 变化到 180° 时，$\mathrm{tg}\alpha$ 的值的变化情况。

4．化简下列各式：

（1）$\sin 180^\circ+\cos 0^\circ-\sin 270^\circ-\mathrm{tg}0^\circ+\mathrm{ctg}270^\circ$

（2）$P^2\sin 90^\circ-2pq\cos 0^\circ-q^2\cos 180^\circ+p\,\mathrm{tg}360^\circ-q\,\mathrm{ctg}270^\circ$

§3．角和弧的度量

1．角度制与弧度制

角的大小我們以前是用一个圓周角的$\frac{1}{360}$作为单位角——一度来度量的。为了更精确的度量角的大小，把一度的$\frac{1}{60}$称为一分，因此 $1^\circ=60'$；一分的$\frac{1}{60}$称为一秒，即 $1'=60''$。

在角的始边 OA 上任取一点 A，則当 OA 繞点 O 旋轉一周时，点 A 就描繪出一个圓周。对于每个角 α（任意大小）都有唯一的一段圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与它对应（图 6）；反过来，任意給定一段圓弧 $\overset{\frown}{AB}$，也有唯一的一个角 α 与它对应。因此在角与弧之間有着一一对应的关系。这样，我們可以用角的度量来代替弧的度量，例如弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的中心角 α 的度数是 $30^\circ10'20''$，那末，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 称为含有 $36^\circ10'20''$ 的弧。

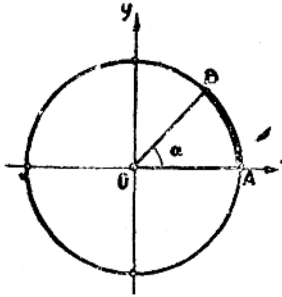

图 6

用角做单位来量角与弧的制度叫做角度制。

除了角度制外，还有一种角和弧的度量制度，称为**弧度制。**在弧度制里，把等于半徑的长的弧叫做含有**一弧度的弧**。而一弧度的弧所对的圓心角叫做**一弧度的角**。例如图 7 中，如果弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半徑 R，那末，$\overset{\frown}{AB}$ 就含有一弧度，$\angle AOB$ 也就是一弧度的角。

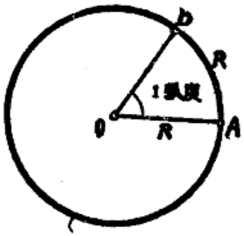

图 7

如果以角的頂点为圓心作一个圓，那末这个角的弧度数就等于它所对的弧长和半徑长的比。例如 $\angle AOB=2$ 弧度（图 8），就是說 $\angle AOB$ 所对的弧长等于半徑的长的 2 倍。在用弧度来量弧与角的时候，“弧度”两字通常略去不写。例如 $\angle AOB=2$。由于在圓心角相同的时候，两个圓上弧的长的比等于它們的半徑的长的比（图 9）* $\frac{\overset{\frown}{A_2B_2}}{\overset{\frown}{A_1B_1}}=\frac{R_1}{R_2}$ 或 $\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{R_1}=\frac{\overset{\frown}{A_2B_2}}{R_2}$

所以弧度数与半徑长短是无关的。又因圓长周长等于 $2\pi R$，所

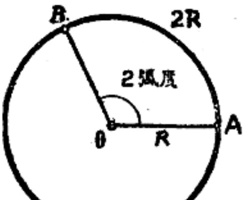

图 8

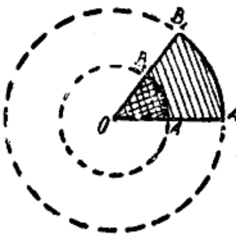
图 9

* 扇形 OA_1B_1 和 OA_2B_2 相似。

以等于一圓周角的角 α 就是 2π，因此 $\sin\frac{\pi}{3}$ 和 $\cos\frac{\pi}{2}$ 分别表示等于 60° 和 90° 的角的正弦和余弦。

这里把一些特殊角的角度与弧度的关系列表如下：

度	360°	180°	90°	60°	45°	30°
弧度	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

2．度与弧度的相互换算

化度为弧度

因为 $360^\circ=2$ 弧度，所以 $1^\circ=\frac{2\pi}{360}\approx0.017453$ 弧度。因此，一个角含有 A°，那末，它的弧度数是

$$\alpha=\frac{A\pi}{180}$$

反之，若告訴我們一个角的弧度数 α，从上面公式可以求得它的角度 A

$$A=\frac{\alpha\cdot180^\circ}{\pi}$$

特例：1 弧度 $=\frac{180^\circ}{\pi}\approx57.295$ 度 $\approx57^\circ17'45''$

例 1．把 $67^\circ30'$ 化成弧度。

解：因为 $67^\circ30'=67\frac{1}{2}$ 度，所以

$$67^\circ30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times67\frac{1}{2}=\frac{135\pi}{360}\text{弧度}$$

$$=\frac{3}{8}\pi\text{弧度。}$$

例 2．把$\frac{3\pi}{5}$弧度化成度。

解：$\frac{3\pi}{5}=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{5}=108^\circ$

例 3．求圆心角 $196^\circ6'$ 所对弧的弧度数。

解：$A=195^\circ6'=90^\circ\times2+15^\circ6'$

所求弧的弧度数≈$3.1416+0.2635=3.4051$

附：**弧度表的用法**

在“四位数学用表”中第 XVI 表为弧度表，这表中載有角从 0° 到 90° 每相差 $6'$ 的各角度数所对应的弧度数（用修正值，可以求出角由 0° 到 90° 每相差 $1''$ 的各角度数所对应的弧度数）。我們利用这个表，可以求得整数度数和整分数的圓心角所对弧的弧度数；也可以反过来，求已知弧度数所对的圓心角度数。

在用弧度表各頁最右边的三項修正值时，如相差 $1'$ 的弧度数，可以加上$1'$ 的弧度数；当所知角超过90°，則减去 90° 的整数倍再查表，然后将查得的数加上$\frac{\pi}{2}=1.5708$ 的相应整数倍数。

例 1．化 $63^\circ42'$ 为弧度。

解：在表里 63° 所在的横行，与 $42'$ 所在的直行交叉处，查得 1.1118，就是 $63^\circ42'=1.1113$ 弧度。

例 2．化 $109^\circ32'$ 为弧度。

解：因为 $109^\circ32'=90^\circ+19^\circ32'$，查表得 $19^\circ30'=0.3403$ 弧度，又查得相当于 2 的修正值是 0.0009 弧度，所以 $19^\circ32'=$ 0.3403 弧度 +0.0006 弧度 =0.3409 弧度。因此，$109^\circ32'=$ 1.5708 弧度 +0.3409 弧度=19.9177 弧度。

3．圓心角、半徑和弧长間的关系

如果用 R 表示圆的半徑，l 表示弧长，α 表示这弧所对的圆心角的弧度数(图 10)，那末，根据弧度的定义就得：$\alpha=\frac{l}{R}$，由此推得 $l=R\alpha$ 或 $R=\frac{l}{\alpha}$。

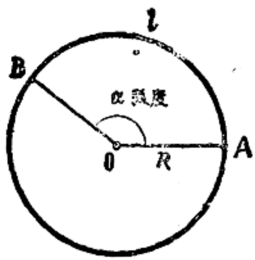

图 10

例 1. 已知圆的半徑是 5 厘米，試求 18° 的孤度。

解： $\because\quad 18^\circ=18\times\frac{\pi}{180}$ 弧度 $=\frac{\pi}{10}$ 弧度

$$\therefore\quad L=R\alpha=5\times\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\approx1.571(\text{厘米})$$

例 2. 如下图是直联轉动机装置 R、r 为两輪的半徑，a 为两輪的中心距离，求轉动皮带的长度 l。

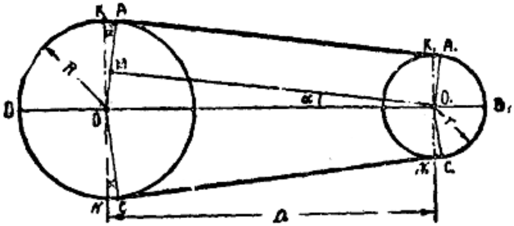

图 11

解： 皮带长是由 O 圆上的弧 $\overparen{ABC}$ 和圆 O_1 上的弧 $\overparen{A_1B_1C_1}$ 以及两圆的两条外公切綫，AA_1 和 CC_1 所組成

$$\because\quad \overparen{ABC}=\overparen{NBK}+\overparen{NC}+\overparen{KA}=\pi R+2R\alpha$$

$$\overparen{A_1B_1C_1}=\overparen{N_1B_1K_1}-\overparen{N_1C_1}-\overparen{K_1A_1}=\pi r-2r\alpha$$

在直角三角形 $\triangle OMO_1$ 中

$$O_1M = OO_1 \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$$

$$AA_1 = CC_1 = O_1M = a\cos\alpha$$

$$\begin{aligned} l &= \overparen{ABC} + \overparen{A_1B_1C} + AA_1 + CC_1 \\ &= \pi R + 2R\alpha + \pi r - 2r\alpha + a\cos\alpha + a\cos\alpha \\ &= \pi(R+r) + 2\alpha(R-r) + 2a\cos\alpha \end{aligned}$$

角 α 可以从等式 $\sin\alpha = \dfrac{OM}{OO_1} = \dfrac{R-r}{a}$ 来計算

若設 $R=275$ 毫米，$r=175$ 毫米，$a=5$ 米，即可計算 l 的长度如下：

$$\because \quad \sin\alpha = \frac{R-r}{a} = \frac{275-175}{5000} = 0.02$$

$$\therefore \quad \alpha = 1°9' \approx 0.02 (\text{弧度})$$

$$\cos\alpha = \cos 1°9' \approx 0.9998$$

$$\begin{aligned} l &= \pi(275+175) + 2\cdot 0.02 \times (275-175) + 2\times 5000 \times 0.9998 \\ &\approx 450\pi + 200 \times 0.02 + 9998 \\ &\approx 11415 \text{ 毫米} \end{aligned}$$

(此例題在实际应用上常用下面的近似公式来計算 l

$$l = \pi(R+r) + 2a + \frac{(R-r)^2}{a})$$

例 3. 有一活塞梢的鎖环，直徑为 26 毫米，环成350°，問制造时需多长的銅絲？

解： $l = R\cdot\alpha = 13 \times 0.01745 \times 350 = 79.40$(毫米)

习 題 三

1. 用弧度表示下列各角：