数学名著译丛

〔美〕S.C.克林 著

元数学导论

下册

科学出版社

数学名著译丛

元数学导论

下册

〔美〕S. C. 克林 著

莫绍揆 译

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书是数理逻辑方面的一本名著，既概括了数学基础的主要内容，也概括了这方面所产生的若干基本方向．本书为数理逻辑和递归函数论提供一个有系统的导论，也为更新的数学基础的探讨提供一个有系统的导论．

本书可供高等学校数学系师生以及有关研究人员参考．

S. C. Kleene

INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS

Van Nostrand

数学名著译丛

元 数 学 导 论

下 册

〔美〕S. C. 克林 著

莫绍揆 译

责任编辑 杨贤英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年 9月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1985年 9月第一次印刷 印张：14 5/8

印数：0001－6,000 字数：381,000

统一书号：13031・2971

本社书号：4032 13—1

定价：4.10 元

符号与记号

集合论

数理逻辑与形式数论

公理、引理、定理、公式表

本书中对定理、引理及各可证公式的编号是贯通全书的，而且编号系统非常复杂，当在后面征引前面的结果时，查阅非常困难，故特制本表。“例”与“系”均在各节内自行编号，极易查索，故不列入。(表中节号后面的数字表示页码.)

目 录

第三部分 递归函数

第四部分 数理逻辑(附加项目)

第三部分　递归函数

第九章　原始递归函数

§ 43. 原始递归函数

为了要证明哥德尔定理的引理，我们将对某一类数论函数及谓词来发展一个直觉理论，从而证明这个类里的每个谓词都可以在形式体系内数字地表示（§ 49），而引理内两谓词 $A(a, b)$ 及 $B(a, c)$ 便属于这一类（§ 52）. 这便使得我们免去在形式系统内逐步逐步地展开的麻烦.

除却刚才所说的应用外，这些函数及谓词的理论的发展将和前几章的形式系统无关. 在这理论内，和元数学中一样，我们只用有穷性方法[1].

我们把自然数列

$$0, 0', 0'', 0''', \cdots$$

或 0, 1, 2, 3,……当作由一个原始客体 0 出发，应用一个原始运算 $'$ 或 $+1$ 而造成的客体的类. 这实质上便是自然数类的归纳定义（§ 6）.

归纳证明，作为对任何自然数 y 而证明定理 $T(y)$ 的方法言，便直接相应于这种产生数的方法（§7）. 依归纳而定义（不要和'归纳定义'相混，§6, §53），亦叫递归定义，是定义数论函数 $\varphi(y)$ 或数论谓词 $P(y)$ 的相似的方法. 首先给出 $\varphi(0)$ 或 $P(0)$（以 0 为变目时函数或谓词的值），其次，对任何自然数 y，用 y 及 $\varphi(y)$ 或 $P(y)$（以 y 为变目时的值）来表出 $\varphi(y')$ 或 $P(y')$（以 y 之后一数为

1）参见第 66 页的脚注、依（俄）译者的意见，作者并没有一贯地遵守他自己所宣告的有穷性方法（例如，见第 246, 292 诸页脚注）——俄译者注.

变目的值）．类似地，我们可以作结论说，在这种情况下，函数或谓词的值 $\varphi(y)$ 或 $P(y)$ 便对每个自然数 y 都定义了．因为由这定义的两部分可以使我们在产生数 y 的同时亦决定了值 $\varphi(y)$ 或 $P(y)$.

为了详细考查它，可写出两个方程

$$(1)\qquad \begin{cases}\varphi(0)=q,\\ \varphi(y')=\chi(y,\ \varphi(y)),\end{cases}$$

它们就 y 而递归地定义了函数 $\varphi(y)$，这里 q 是一个给定的自然数，而 $\chi(y,z)$ 是给定的一个二元数论函数．

例如，值 $\varphi(4)$ 便可如下确定，为了要生成 4，我们逐次地生成 0，1，2，3，4，由第一个方程可知值 $\varphi(0)$ 便是所给的数 q；然后由第二个方程，值 $\varphi(1)$ 为 $\chi(0,\varphi(0))$ 亦即（应用已得的值 $\varphi(0)$）$\chi(0,q)$，而这是一个已知的数（因为 $\chi(y,z)$ 是一个给定的函数）；又其次，$\varphi(2)$ 将是 $\chi(1,\varphi(1))$，亦即 $\chi(1,\chi(0,q))$；值 $\varphi(3)$ 将是 $\chi(2,\varphi(2))$ 即 $\chi(2,\chi(1,\chi(0,q)))$；最后，值 $\varphi(4)$ 将是 $\chi(3,\varphi(3))$，即 $\chi(3,\chi(2,\chi(1,\chi(0,q))))$.

因此，对于每一个自然数 y，只须看在自然数列中 y 的产生过程便可以有一过程决定相应的数 $\varphi(y)$．这样，对于每一数 y 都对应着一数 $\varphi(y)$，亦即定义了一个特殊数论函数 φ，它以这些数 $\varphi(y)$ 作为它的各个值.

当把（1）考虑为未知函数 φ 的泛函方程时，函数 φ 适合方程（1），因为包含于（1）中的每个特殊方程（即 $\varphi(0)=q$，$\varphi(0')=\chi(0,\varphi(0))$，$\varphi(1')=\chi(1,\varphi(1))$，…等等）被相继地选择的数 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，…所满足．又当（1）作为泛函方程时，只有 φ 才满足它，因此我们由方程（1）而决定相继的数 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，…，这过程可以释义为：任何满足这方程的函数必须具有所选择的值.

在别的递归定义中，所定义的函数 φ 还与别的变元 $x_2,\cdots,x_n$ 有关，后者叫做参数，当对 y 而作归纳时，它们永取固定的值.

例 1 试直觉地考虑下二方程

$$\begin{cases} a+0=a, \\ a+b'=(a+b)'. \end{cases}$$

我们曾把它们作为前一章形式符号体系中的公理 18 及 19. 这两方程就 b 归纳而定义了函数 $a+b$，而以 a 作为参数，′作为预先已知的函数. 其次下二方程

$$\begin{cases} a\cdot 0=0, \\ a\cdot b'=(a\cdot b)+a, \end{cases}$$

便就 b 归纳而定义 $a\cdot b$，以 $a+b$ 作为已知函数；又

$$\begin{cases} a^0=1, \\ a^{b'}=a^b\cdot a, \end{cases}$$

就 b 归纳而定义 a^b，以 $a\cdot b$ 作为已知函数.

依归纳而定义谓词的例子见后（§ 45，例 2）.

什么数论函数是可以递归地定义的[1]？要把这问题弄得明确，我们必须指明什么函数是作为一开始便知道的，在定义新函数时允许使用什么运算，包括允许什么样式的递归定义.

我们现在先给出一个明指，由它可以得到用初等的递归式所能得到的函数. 这些函数将叫做‘原始递归的’.

下列方程 (I)—(V) 中每一方程和方程组都定义一个数论函数 φ，其中 n 与 m 为正整数，i 为整数 $1\leqslant i\leqslant n$，q 为自然数，而 $\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m, \chi$ 等则为给定的数论函数，其变元的个数已相应地标出了.

(I) $\qquad \varphi(x)=x'.$

(II) $\qquad \varphi(x_1,\cdots,x_n)=q.$

(III) $\qquad \varphi(x_1,\cdots,x_n)=x_i.$

(IV) $\qquad \varphi(x_1,\cdots,x_n)=\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n)).$

(Va) $\qquad \begin{cases} \varphi(0)=q, \\ \varphi(y')=\chi(y,\varphi(y)) \end{cases}$

1) 从现在起，不管原文为 definition by induction 还是 recursive definition，一律译为“递归定义”——译者注.

$$(\mathrm{Vb})\quad \begin{cases}\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)=\psi(x_2,\cdots,x_n),\\ \varphi(y',x_2,\cdots,x_n)=\chi(y,\varphi(y,x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n).\end{cases}$$

((Va) 便是 $n=1$ 时的 (V), (Vb) 是 $n>1$ 时的 (V).)

如果一函数可以由逐次应用这个五个定义运算而定义出，则它叫做原始递归的.

这定义亦可以更详细地给出，类似于形式体系的可证公式的定义 (§19), 如果用第二种说法，便如下.

我们把上述的方程或方程对偶 (I)—(V) 叫做模式,它们很类似于公设, (I)—(III) 有公理模式的作用(更严格些, (I) 类似于一个特殊公理),而 (IV) (V) 有推论规则的作用.

函数 φ 将叫做开始函数，如果 φ 满足方程 (I), 或满足具有某些特定的 n, q 的方程 (II), 或满足具有某些特定的 n, i 的方程 (III).

如果 φ 满足具有某些特定的 n, m 的方程 (IV), 则函数 φ 叫做直接依赖于函数 ψ, χ_1, $\cdots$, χ_m; 如果 φ 满足具有特定的 q 的方程 (Va), 则 φ 叫做直接依赖于函数 χ; 如果 φ 满足具有特定的 n 的方程 (Vb), 则 φ 叫做直接依赖于函数 ψ, χ.

函数 φ 叫做原始递归的,如果有有穷函数序列 φ_1, φ_2, $\cdots$, φ_k ($k\geqslant 1$) (叫做 φ 的原始递归描述) 使得这序列中每个函数或者是一个开始函数,或者是直接依赖于序列中在前的函数,并且最后一函数 φ_k 便是 φ.

§44. 显 式 定 义

本章的第一个问题是要把好些已由其它方式而知道的函数认出它们是原始递归的. (类似地,当研究形式系统时，我们由公理而推演出一些形式定理，并推演出导出规则作为获得更多的定理的一般方法.)

我们对各模式都给以定型，以使原始递归函数类的定义得以简化. 在本节的其余部分,我们将看看它们的一些应用.

模式(I)给出后继函数作为开始函数之一，我们把它记为 S。模式(II)所给出的开始函数叫做常函数，记为 C_q^n。模式(III)所给出的开始函数叫做么函数[1]，记为 U_i^n。

模式(IV)叫做依代入而定义的模式[2]。φ 的未定值的表达式可由把 $\chi_1, \cdots, \chi_m$ 的未定值表达式代入 ψ 的变元处而得。应用这模式而定义的函数 φ 有时记为 $\mathbf{S}_m^n(\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m)$。

对一函数作显式定义便是把它的未定值的表达式如下地作成：由它的自变元(此外没有其它的自由变元)及给定的函数符号、常数符号及运算子符号[3]等等用造句法而作成。在特例，我们说一函数 φ 可由函数 $\psi_1\cdots, \psi_l$ 及常数 $q_1\cdots, q_s$ 而显式地定义(或称显式于这些函数及常数)，如果 φ 的未定值的表达式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可以由变元 $x_1, \cdots, x_n$，常数 $q_1, \cdots, q_s$ 及函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而表出(参见 §10 例 2)。在这情形，φ 可由 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 经一系列的应用模式(II)—(IV)而作出。因为模式(II)(III)可把每个常数及每个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 都作为所有变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数而给出，然后用以组成未定值表达式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的各个代入便全都适合标准形(IV)了。

例 1 试考虑下列显式定义

(a) $$\varphi(x, z, y) = \zeta(x, \eta(y, \theta(x)), 2).$$

今把右边的 x, y 及 2 都当作 x, z, y 的函数，则

$$\varphi(x, z, y) = \zeta(U_1^3(x, z, y), \eta(U_3^3(x, z, y), \theta(U_1^3(x, z, y))), C_2^3(x, z, y)).$$

然后我们便可以看见由 ζ, η, θ 经过下面列出的逐次应用模式(II)—(IV)而定义 φ。被依次使用的函数在左边加以命名或定义，模式的使用则在右边加以分析。例如，在第五步是就 $n=3$ 及

1) 原文为 identity function，不宜译为恒等函数——译者注。

2) 又叫做迭置模式——译者注。

3) “给定的函数符号”指 S 及 U_i^n，“给定的常数符号”指 C_q^n，“给定的运算子符号”指 $\mathbf{S}_m^n(\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m)$。下文的“可以由…而表出”亦指兼用这些符号而表出(不包括递归模式(V))。又按，所谓“用造句法而作成”“可由…而表出”均不够明确，不如直说“经一系列的应用(II)—(IV)而作出”(原书把这句作为解释，不作为正式定义)——译者注。