函數構造論

中册

И. П. 納唐松著

科学出版社

函数構造論

中册

И. П. 納唐松著
何旭初　唐述釗譯

科学出版社
1958年6月

И. П. НАТАНСОН
КОНСТРУКТИВНАЯ
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва 1949 Ленинград

內 容 提 要

本書利用最簡單的分析工具(代数多項式与三角多項式)来討論(实变)函数的逼近理論. 共分三部分:第一篇为最佳一致逼近理論,書中限于用古典分析学的方法来处理函数逼近問題,在第二篇里,討論了直交多項式、平方逼近及矩量問題,最后一篇是研究內插过程与机械求积的收斂性問題. 本書述理詳明,取材丰富,特别是对苏联数学家在这方面的巨大成就进行較多叙述,同时書中几乎未用到复变函数論方法.

譯本的中册相当于原書的第二篇.

函 数 構 造 論

中 册

И. П. 納唐松著
何旭初 唐述釗譯

*

科 学 出 版 社 出 版(北京朝陽門大街117号)
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
上海大众文化印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1958年6月第 一 版　　書号:1181 印張:5 3/4
1958年6月第一次印刷　　开本:850×1168 1/32
(滬)0001—2,775　　字數:140,000

定价:(10) 1.10元

目　录

第　二　篇

第 二 篇

平 方 逼 近

第 一 章

$L^2_{p(x)}$ 空間

§1. 問題的提出

在本書的第二部分，和在前一部分一样，我們主要是致力于研究用多項式来逼近任意函数的問題．但是，用多項式 $P(x)$ 逼近函数 $f(x)$ 的精确度，我們將采用与前面不同的估值．

那就是，設 $f(x)$ 是定义在閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数，$P(x)$ 是一个多項式．如果量

$$\max_{a\leq x\leq b}|P(x)-f(x)| \tag{1}$$

是很小的話，在以前我們便認为多項式 $P(x)$ 接近于函数 $f(x)$；

而現在如果积分[1)]

$$\int_a^b[P(x)-f(x)]^2dx \tag{2}$$

很小，我們便說多項式 $P(x)$ 接近于函数 $f(x)$．

应当指出，用表达式（1）来估計逼近的精确度时，对函数 $f(x)$ 的連續性这一要求是極为重要的．因为，如果在这种估計方法下要使用多項式逼近函数达到任意的精确度，那末，$f(x)$ 便是一致

---

1) 通常我們所采用的 $P(x)$ 接近于 $f(x)$ 的估値，是借助于較（2）的形式更广泛的积分，但是在目前，为了不使問題复杂，我們根据課文中所指出的标准来談．

收斂的多項式序列的極限. 而这只有在 $f(x)$ 連續的时候才可能.

在用积分(2)估計逼近时, 問題便不是这样. 例如, 設函数 $f(x)$ 是按下法定义在 $[-1,+1]$ 上的:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0 \text{ 时},\\ 1, \text{当 } \quad 0<x\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

虽然函数 $f(x)$ 是間断的, 但却存在有这样的多項式 $P(x)$, 对于它来說, 积分

$$\int_{-1}^{+1}[P(x)-f(x)]^2dx$$

可以随意地小.

事实上, 我們引进函数 $\varphi(x)$, 令

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0 \text{ 时},\\ 1, \text{当 } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

并且在閉区間 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上把 $\varphi(x)$ 当作是綫性的. 容易看出 $\varphi(x)$ 在 $[-1,+1]$ 上是連續的, 并且

$$\int_{-1}^{+1}[\varphi(x)-f(x)]^2dx=\int_{0}^{1/n}[\varphi(x)-f(x)]^2dx<\frac{1}{n},$$

因为 $|\varphi(x)-f(x)|\leqslant 1$. 根据外尔斯特拉斯定理, 可以选取这样的多項式 $P(x)$, 使得对于 $[-1,+1]$ 中的所有 x, 都有

$$|P(x)-\varphi(x)|<\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

对于这个多項式, 显然

$$\int_{-1}^{+1}[P(x)-\varphi(x)]^2dx<\frac{1}{n}.$$

因为

$$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2),$$

所以

$$[P(x)-f(x)]^2\leqslant 2\{[P(x)-\varphi(x)]^2+[\varphi(x)-f(x)]^2\},$$

故有

$$\int_{-1}^{+1}[P(x)-f(x)]^2dx<\frac{4}{n}.$$

因为 n 可以取得随意地大，从而便推出了我們的断言.

这样一来，在我們的新观点下，被逼近函数的連續性这一要求便是多余的了. 我們不提出連續性这个要求，而在討論中也引进間断的函数. 但是，这些函数并不能是完全任意的，因为我們必須保証积分（2）的存在. 如果我們以黎曼的积分定义为基础，那末，我們便只能研究間断点集的測度等于零的不連續函数. 但是并非所述理論在本質上一定要引出这种要求，而不过是由于采用通常的积分定义才引起的. 要想使說明具有更严整与更完美的形式，我們不以黎曼积分为基础而以勒貝格积分为基础. 这就要求讀者熟悉实变函数論的基本內容. 此后，这些內容都假定是已經知道了的.

§2. 权函数. $L^2_{p(x)}$ 空間

設在閉区間 $[a,b]$ 上給定了一个非負的与可求和的函数 $p(x)$. 由于这函数在以后預定要起特殊的作用，我們便把它叫做权函数，或簡称为权. 我們永远約定只考虑这样的权 $p(x)$，它只在一个測度等于零的集合上才等于零. 以后我們便不再提到这个約定.

每一个权函数 $p(x)$ 都对应有兩类定义在 $[a, b]$ 上的可測函数：乘积 $p(x)\,f(x)$ 可求和的 $L_{p(x)}$ 类，以及乘积 $p(x)\,f^2(x)$ 可求和的 $L^2_{p(x)}$ 类. 在 $p(x)=1$ 时，我們便把这兩个函数类簡單地記作 L 和 L^2. 有时候我們要求在这些函数类的記号中能表示出所有被考虑的函数定义在什么区間上. 这时，我們便分別用 $L_{p(x)}([a,b])$，$L^2_{p(x)}([a, b])$，$L([a, b])$ 和 $L^2([a, b])$ 来表示它們.

由不等式

$$|f(x)| \leqslant \frac{1+f^2(x)}{2}$$

便推得 $L^2_{p(x)}$ 包含在 $L_{p(x)}$ 内.

仿此,不等式

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

表明 $L^2_{p(x)}$ 中兩个函数的乘积包含在 $L_{p(x)}$ 內. 借助于恒等式

$$(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2,$$

从而也知道 $L^2_{p(x)}$ 中兩个函数的和或差也都在这一类內. 末了,重要的是:所有的函数 $cf(x)$ 与 $f(x)$ 一起都在 $L^2_{p(x)}$ 內,其中的 c 是常数.

定理1. 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $L^2_{p(x)}$ 內的兩个函数,則不等式

$$\left[\int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b p(x) f^2(x)\, dx\right]\left[\int_a^b p(x) g^2(x)\, dx\right] \qquad (3)$$

与不等式

$$\sqrt{\int_a^b p(x)\,[f(x)+g(x)]^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b p(x)\, f^2(x)\, dx} + \sqrt{\int_a^b p(x)\, g^2(x)\, dx} \qquad (4)$$

都成立. 它們分别称为布尼亞柯夫斯基 (Буняковский) 不等式与哥西(Cauchy)不等式.

要証明不等式(3)我們令

$$\psi(z) = \int_a^b p(x)\,[zf(x)+g(x)]^2 dx = Az^2 + 2Bz + C,$$

其中

$$A=\int_a^b p(x)f^2(x)dx,\quad B=\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx,$$
$$C=\int_a^b p(x)g^2(x)dx.$$

若 $A=0$, 則 $f(x)=0$(像通常在度量函数論中一样,我們对于只在零測度集合上不相等的函数是不加区别的)而不等式(3)就化为等式 $0=0$. 若 $A>0$, 則(3)可根据 $\psi(z)\geqslant 0$ 和
$$\psi\left(-\frac{B}{A}\right)=\frac{AC-B^2}{A}$$
推出.

于是,(3)便被証明了. 把(3)写成
$$\int_a^b pfg\,dx\leqslant\sqrt{\int_a^b pf^2\,dx}\sqrt{\int_a^b pg^2\,dx}$$
的形式后,二倍起来,在兩端都加上
$$\int_a^b pf^2dx+\int_a^b pg^2dx,$$
我們便得到与(4)等价的不等式
$$\int_a^b p(f+g)^2dx\leqslant\left[\sqrt{\int_a^b pf^2dx}+\sqrt{\int_a^b pg^2\,dx}\right]^2.$$

对于 $L^2_{p(x)}$ 中的每一个函数 $f(x)$, 我們都賦予一个数
$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)dx}.$$

这个量便叫做函数 $f(x)$ 的范数,它具有下列类似于数的模的性質:

I. $\|f\|\geqslant 0$, 并且当且仅当 $f(x)=0$ 时,才有 $\|f\|=0$;

II. $\|cf\|=|c|\cdot\|f\|$, 于特例, $\|-f\|=\|f\|$;

III. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

范数的概念使得能够引用便利的几何术語.

設 E 是任意性質的元素 $x, y, z, \cdots$ 的集合. 如果对应于集合 E 中的每一对元素 x 和 y 都有一个具有下列性質的实数 $r(x, y)$:

1) $r(x, y)\geqslant 0$, 并且当且仅当 $x=y$ 时, $r(x, y)=0$;

2) $r(x, y)=r(y, x)$;

3) $r(x, z)\leqslant r(x, y)+r(y, z)$.

那末,集合 E 便叫做距离空間,并称 $r(x, y)$ 为 x 与 y 之間的距离.

对于 $L^2_{p(x)}$ 中的任意兩个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 令

$$r(f, g)=\|f-g\|,$$

我們就把 $L^2_{p(x)}$ 变成了一个距离空間.

§3. 平均收斂性

定义 1. 設 f 与 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 都是空間 $L^2_{p(x)}$ 中的元素,如果

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0,$$

我們就称 f 为序列 $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots$ 的極限.

虽然这样关系在函数論上的意义是:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b p(x)[f_n(x)-f(x)]^2dx=0,$$

我們仍按通常的方式把它写成:

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f, \ f_n\to f .$$

这种类型的收斂性便叫做帶权 $p(x)$ 的平均收斂性.

定理 1. $L^2_{p(x)}$ 中的元素序列不能有兩个不同的極限.

事实上,如果 $f_n\to f$ 且 $f_n\to g$, 則对不等式

$$0\leqslant\|f-g\|\leqslant\|f-f_n\|+\|f_n-g\|$$

取極限,便得到关系 $\|f-g\|=0$, 从而 $f=g$.

定理 2. 設函数列 $\{f_n(x)\}$ 平均收斂于函数 $f(x)$, 則从其中可以选出一个几乎处处收斂于 $f(x)$ 的子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$.

此定理的証明系根据函数論中的下述重要命題:

勒維(Levi)定理. 設在 $[a, b]$ 上給定了一个非負的可測函数

列
$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \cdots,\ u_k(x),\ \cdots,$$
并設
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx<+\infty,$$
則[1] 在$[a,\ b]$上几乎处处有
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0.$$

轉来証明定理 2. 选这样的 $n_1<n_2<n_3<\cdots$, 使得
$$\int_a^b p(x)\,[f_{n_k}(x)-f(x)]^2\,dx<\frac{1}{k!}.$$

那末,根据勒維定理,在$[a,\ b]$上几乎处处有
$$\lim_{k\to\infty} p(x)\,[f_{n_k}(x)-f(x)]^2=0,$$
因为 $p(x)$ 几乎处处是严格正值的. 于是定理便証明了.

定理 3. 若 $f_n\to f$, 则 $\|f_n\|\to\|f\|$.

因为
$$\|f\|\leqslant\|f_n\|+\|f-f_n\|,\ \|f_n\|\leqslant\|f\|+\|f_n-f\|,$$
所以
$$\big|\,\|f_n\|-\|f\|\,\big|\leqslant\|f_n-f\|.$$
証明的其余部分是显然的.

定义 2. 設序列 $\{f_n\}\subset L^2_{p(x)}$. 若对应于每一个 $\varepsilon>0$, 都有这样一个 N, 使得当 $n>N$, $m>N$ 时
$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon, \tag{5}$$
便称序列$\{f_n\}$自我收斂.

定理 4. 有極限的序列必为自我收斂.

事实上, 若 $f_n\to f$, 則对任意的 $\varepsilon>0$, 都能够求得这样的 N, 使得当 $n>N$ 时

---

1) 勒維定理有更为一般的形式. 参看納唐松 (И.П.Натансон) [5], 127 頁.

$$\|f_n-f\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

若取 $n>N$, $m>N$, 則有

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f-f_m\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

逆定理也成立:

定理 5 (菲謝尔 (E. Fischer) [1]). 若序列自我收斂, 則它有極限.

这个定理所表示出的空間 $L^2_{p(x)}$ 的性質, 称为空間 $L^2_{p(x)}$ 的完备性.

为証明計, 我們选这样的 n_k, 使得于 $n\geqslant n_k$ 且 $m\geqslant n_k$ 时

$$\|f_n-f_m\|<\frac{1}{k!};$$

同时可以認为 $n_1<n_2<n_3<\cdots$. 那末, 于特例,

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|<\frac{1}{k!}.$$

因而級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|$$

收斂.

若对于函数

$$f=|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}| \text{ 和 } g=1$$

应用不等式(3), 則有

$$\int_a^b p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx\leqslant\sqrt{\int_a^b p(x)\,dx}\,\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|.$$

因而, 級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx$$

也收斂. 又根据所引的勒維定理, 級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$$

几乎处处收斂，因而級数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\{f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\}$$

亦然。

这后一級数的收斂性等价于存在有有限的極限

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

我們引进一个函数 $f(x)$，在上述極限存在而且为有限时，它就等于这个極限，而在其余的点处等于零。

茲証明这个函数屬于 $L^2_{p(x)}$，并且它就是 $f_n(x)$ 的極限。为此目的，取 $\varepsilon>0$，我們求出这样的 N，使得当 $n>N$，$m>N$ 时(5)成立。然后固定 $n>N$。对于充分大的 k 將有 $n_k>N$，因而

$$\|f_n-f_{n_k}\|<\varepsilon.$$

我們要利用下面这个函数論中的定理[1]：

法都(Fatou)定理. 設 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 为定义在 $[a, b]$ 上的非負可測函数列，它几乎处处收斂于函数 $\psi(x)$，并且若对于所有 k

$$\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \leqslant A,$$

則也有

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leqslant A.$$

在所述情形下，函数 $p(x)[f_n(x)-f_{n_k}(x)]^2$ (n 是固定的!)就是 $\varphi_k(x)$，函数 $p(x)[f_n(x)-f(x)]^2$ 是 $\psi(x)$，ε^2 是 A。

这就是説，

$$\int_a^b p(x)[f_n(x)-f(x)]^2dx \leqslant \varepsilon^2. \tag{6}$$

从而便已經推得，差 $f_n(x)-f(x)$ 与函数 $f(x)$ 自己都屬于

---

1) 参看，例如 И. П. 納唐松[5]，125 頁。

$L^2_{p(x)}$. 此外，因为要想不等式（6）成立，只需 $n>N$，于是定理証明.

除了平均收斂以外，我們还得涉及到所謂“弱收斂性”. 我們說序列 $\{f_n(x)\}\subset L^2_{p(x)}$ 是弱收斂于 $L^2_{p(x)}$ 中的函数 $f(x)$，如果对于任意的函数 $g(x)\in L^2_{p(x)}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b p(x)f_n(x)g(x)dx=\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$$

据布尼亞柯夫斯基(Буняковский)不等式，

$$\left|\int_a^b pf_ng\,dx-\int_a^b pfg\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b pg^2dx}\sqrt{\int_a^b p(f_n-f)^2dx},$$

因而由某一序列的平均收斂性便推得了它的弱收斂性（都收斂于同一个極限函数）.

§4. 在 $L^2_{p(x)}$ 內稠密的函数类

設 E 是一个距离空間，而 A 是它的某一个子集. 如果 E 的每一个元素都能够表示成集合 A 中元素序列的極限的話，則說 A 是在 E 內处处稠密的集合. 显然，要想 A 在 E 內处处稠密，其充要条件便是：对任意的 $f\in E$ 和任意的 $\varepsilon>0$，都存在有这样一个元素 $g\in A$，使得

$$r(f,\ g)<\varepsilon.$$

由于我們一开始便假定权函数 $p(x)$ 是可求和的，显然，在 $L^2_{p(x)}$ 中包含有全部有界的可測函数. 其中更加是包含了全部的連續函数以及全部的阶梯函数[1].

我們規定以下的記号：M 表所有的有界可測函数，C 表所有的連續函数，S 表所有的阶梯函数（自然，指的都是定义在所考慮的閉区間 $[a,\ b]$ 上的函数），P 表所有的多項式，T 表所有的三角

---

[1] 我們說定义在 $[a,\ b]$ 上的函数 $f(x)$ 是阶梯函数，如果存在着有限个点 $a=c_1<<c_2<\cdots<c_s=b$，使得在开区間 $(c_i,\ c_{i+1})$ 內这函数是常数.

多項式.

定理. 函数类 M, C, S, P 中的每一个都是在 $L^2_{p(x)}$ 內处处稠密的. 如果基本区間$[a, b]$的長度是2π,則函数类T在$L^2_{p(x)}$內也是处处稠密的.

証明. 1) 設 $f(x)\in L^2_{p(x)}$. 取 $\varepsilon>0$ 并选这样的 $\delta>0$,使得包含在$[a, b]$中的任一个測度 $me<\delta$ 的可測集 e 都滿足不等式

$$\int_e p(x)f^2(x)dx<\varepsilon^2.$$

由于积分的絕对連續性,选取这样的 δ 是可能的.

因为函数 $f(x)$ 几乎处处有限(不然的話,它便不可能屬于 $L^2_{p(x)}$),我們便有

$$m\prod_{n=1}^{\infty} E(|f|>n)=0; \tag{7}$$

在另一方面,

$$E(|f|>1)\supset E(|f|>2)\supset\cdots. \tag{8}$$

如所知,由(7)与(8)便得

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f|>n)=0.$$

这就是說,可以指出这样的 n 来,使得

$$mE(|f|>n)<\delta.$$

固定这个 n, 并令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } |f(x)|\leqslant n,\\ 0, & \text{若 } |f(x)|>n. \end{cases}$$

显然, $g(x)\in M$, 并且

$$\|f-g\|^2=\int_a^b p(f-g)^2dx=\int_{E(f\neq g)} p(f-g)^2dx=$$

$$=\int_{E(|f|>n)} pf^2dx<\varepsilon^2.$$

于是,定理对于 M 便証明了.

2) 設 $f(x)\in L^2_{p(x)}$ 且 $\varepsilon>0$. 我們求出 M 中这样的 $g(x)$, 使

得$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 設 $|g(x)|\leqslant K$, 根据熟知的魯金(Лузин)定理,存在有这样的連續函数$\varphi_\delta(x)$,使得

$$mE(g\neq\varphi_\delta)<\delta, |\varphi_\delta(x)|\leqslant K,$$

其中的 δ 是預先任意給定的正数. 对于这个函数,有

$$\|g-\varphi_\delta\|^2=\int_{E(g\neq\varphi_\delta)}p(g-\varphi_\delta)^2dx\leqslant 4K^2\int_{E(g\neq\varphi_\delta)}p(x)dx.$$

但是, 由于积分的絕对連續性, δ 这个数可以認为如此之小, 使得末一不等式的右端小于 $\frac{\varepsilon^2}{4}$. 因此,对于所求得的 $\varphi_\delta(x)$ 有

$$\|f-\varphi_\delta\|\leqslant\|f-g\|+\|g-\varphi_\delta\|<\varepsilon.$$

这就对于函数类 C 証明了本定理.

3) 設 $f(x)\in L^2_{p(x)}$, 且 $\varepsilon>0$. 我們求出滿足不等式$\|f-\varphi\|<$ $<\frac{\varepsilon}{2}$ 的連續函数 $\varphi(x)$.

据康托(Cantor)定理,閉区間$[a, b]$可以用点

$$c_0=a<c_1<\cdots<c_n=b$$

分成这样的子区間$[c_i, c_{i+1}]$,使得在其中的每一个上,$\varphi(x)$ 的振幅都小于某一个預先取定的数 $\delta>0$. 引进函数 $h(x)$,令 $h(b)=\varphi(b)$, 而在 $c_i\leqslant x<c_{i+1}(i=0, 1,\cdots,n-1)$ 时 $h(x)=\varphi(c_i)$. 这是一个阶梯函数,它具有这样的性質:对于$[a, b]$中的所有 x, 不等式

$$|h(x)-\varphi(x)|<\delta$$

都成立. 这时

$$\|h-\varphi\|^2=\int_a^b p(x)[h(x)-\varphi(x)]^2dx\leqslant\delta^2\int_a^b p(x)dx.$$

若 δ 充分地小, 那末这个不等式的右端便小于 $\frac{\varepsilon^2}{4}$, 因而 $\|f-$ $-h\|<\varepsilon$. 定理对于函数类 S 便証明了.

4) 对于函数类 P, 定理的証明完全类似,因为根据外尔斯特拉斯第一定理,每一个 $\delta>0$ 都对应有一个多項式 $P(x)$, 它滿足不等式