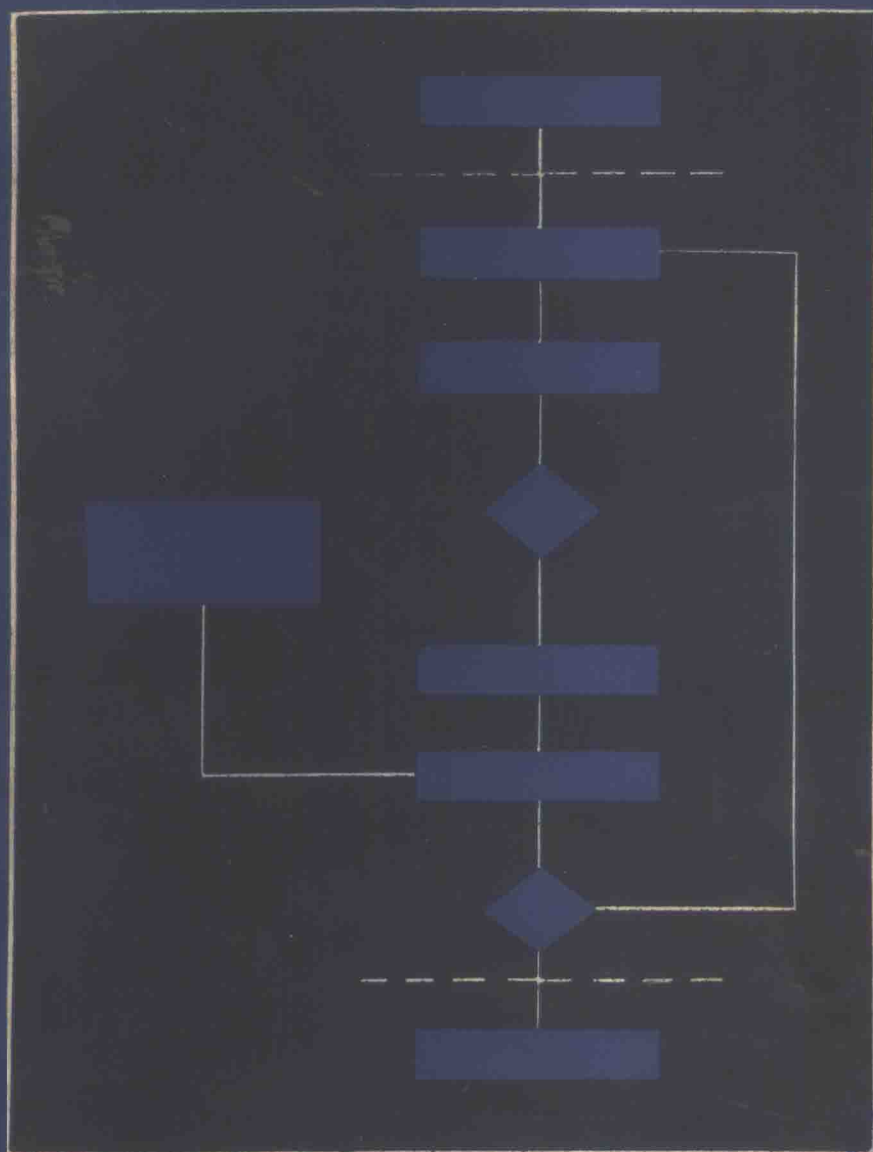
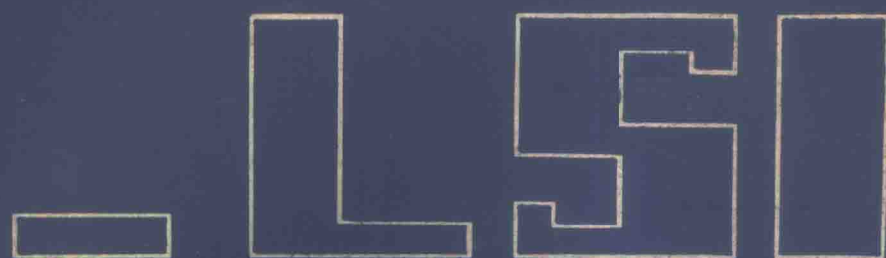


计算机辅助设计



科学技术文献出版社重庆分社

计算机辅助设计

中国科学技术情报研究所重庆分所 编辑
科学技术文献出版社重庆分社 出版
重庆市市中区胜利路 91 号

四川省新华书店重庆发行所 发行
重 庆 新 华 印 刷 厂 印刷

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{16}$ 印张：15.5 字数：50万
1979年8月第1版 1979年8月第一次印刷
印数：13000

书号：15176·364

定价：1.60元

前 言

计算机辅助设计(简称CAD)是随着当代科学技术的发展而兴起的一门新技术。采用CAD技术,既提高了设计效率和设计质量,又缩短了设计周期。CAD技术得到了日益广泛的应用,目前它已成为设计自动化和LSI电路设计的有力工具。为适应四个现代化的需要和当前LSI电路的发展,我们选编了这本《计算机辅助设计——LSI》文集。

本文集着重介绍CAD的基本原理、发展水平和动向、LSI电路设计的实用系统和实用程序(其中包括器件模型、逻辑设计、电路分析、制版和模拟等),供从事此项工作的同志参考。

本文集在编辑出版过程中,得到有关单位和从事CAD工作的专家的支持和帮助,在此一并致谢。

由于水平有限,缺点和错误在所难免,切望读者批评指正。

计算机辅助设计编辑部

1978年10月

目 录

特 约 稿

图论与网络拓扑分析.....	王春华	(1)
适合于计算机辅助设计的双极晶体管模型.....	夏武颖	(15)
MOS器件模型.....	夏永伟、付志煌、佟士峰	(28)
计算机辅助电路分析.....	孙林根等	(36)
逻辑模拟简介.....	林宗楷	(57)
计算机辅助设计制版.....	熊继光、谢雷鸣	(70)
设计自动化的进展.....		(78)
设计自动化中的图论和组合算法.....		(91)
计算机辅助电路设计的输入语言.....		(113)
能自动模拟许多集成电路的电路分析程序.....		(125)
ECAP-II——一个新的电子电路分析程序.....		(130)
不考虑辐射的电路分析程序(CANCER).....		(149)
MOS集成电路的台式计算机辅助设计.....		(157)
ASTAP网络分析程序算法.....		(166)
集成电路设计、原图和掩模制备的计算机辅助设备.....		(173)
集成电路的计算机辅助版图设计系统.....		(185)
集成电路掩模设计用的图示制版系统.....		(191)
MNFP——一种新的有效的数字故障模拟技术.....		(198)
ALMS——自动逻辑映射系统.....		(209)
不用逻辑模拟的数字系统竞态分析.....		(219)
计算机辅助逻辑设计——CALD系统.....		(227)
LSI电路设计.....		(231)
大规模集成 ¹² L逻辑电路的计算机辅助设计.....		(244)

图论与网络拓扑分析

王 春 华

计算机辅助设计(简称CAD)技术是近年来迅速发展起来的一门新技术。在设计领域广泛采用CAD技术,可以改变传统的设计方式,扩大计算机的应用范围,密切理论与实际的联系,促使基础理论的深入发展。

电子计算机作为一种强有力的工具应用于电子工业领域还只有十多年的历史,但已取得了很大的成效。就拿电子线路的设计来说,以前,一个合理的线路设计很大程度上依赖于设计师的直观感觉和经验的积累,所使用的工具是“试验电路板”加上各种仪器仪表。要得到一个最佳方案必须在试验板上反复尝试,耗费了设计师的大量时间。随着电子线路的日趋复杂,特别是大规模集成电路的出现,已难以用分离元件来模拟线路,从而使传统的设计方法面临“绝境”。正是在这种情况下,数字计算机就成了一种重要的设计工具。计算机本身相当于一个现代化“实验室”,可以用它来模拟各种电路功能而无需任何实际元件,既提高了设计效率、缩短了设计周期,又可以提高设计质量。

目前,电子电路CAD技术作为电子技术的重要分支,已广泛应用于模拟电路设计、数字电路分析、逻辑功能模拟、印刷线路板的布局布线设计以及大规模集成电路的制版设计等各个方面。

图论是电子电路CAD技术的基础。它作为数学的一个分支,近年来在物理、化学、运筹学和工程技术的各个领域均有广泛的应用。在电子工业领域中,图论应用于电路理论,产生了网络拓扑分析方法,这是近代电路分析的基础;图论应用于工程计算方面,产生了讯号流程图计算方法,这是分析和计算电子电路各种传输问题的简便方法;图论中的平面性判定及有

关理论是指导印刷线路板布局布线的重要依据。此外,在开关网络的分析和综合以及逻辑功能的模拟等方面,均可找到图论应用的“足迹”。因此,图论是CAD技术的基础,CAD技术又是应用图论解决实际问题的“桥梁”。

全面论述电子电路CAD与图论的有关内容显然不是短文所能及的。本文只限于讨论模拟电路的设计。

模拟电路设计包括电路分析、电路设计、电路综合三方面内容。电路分析是指:给定线路结构和所有元件的参数,计算电路的各种性能指标。这是模拟电路设计的基础,也是本文所讨论的重点;电路设计一般是指:给定线路结构和有关性能指标,求解线路中各元件的最佳值。这实际上就是一个反复迭代分析的过程;电路综合是指:给定各项性能指标,求解线路结构及各元件的最佳值。由于线路结构的千变万化,要综合各种线路结构还是个难题,目前只是在滤波器电路的综合方面有所进展。

本文仅介绍线性电路分析方面的有关图论基础和网络拓扑。

网络的拓扑图

电网络一般是由电阻、电容、电感以及电压源、电流源等电路元件按照一定的线路结构连接而成的。因此电网络所呈现的性质一般由元件的特性和网络的结构两方面决定。

如果我们暂且不管网络中各元件的特性,把网络中所有元件均分别代之以线段(见图1(b)),并且不

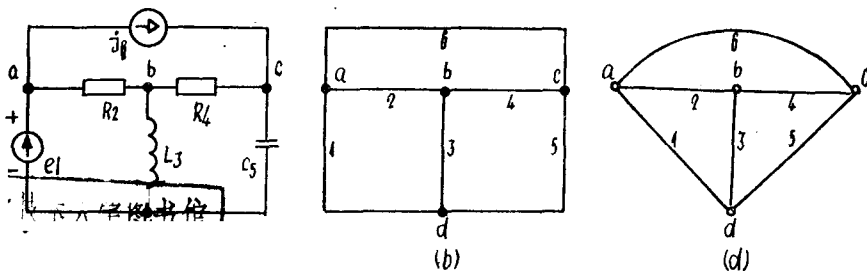


图 1

考虑图的几何性质, 把仅与网络结构有关的特性抽象成图 1 (d) 所示的图加以研究, 这就是图论所专门研究的图。在这种图中, 我们只考察点和线之间的连接关系。所以点的位置、线的长度及弯曲程度均无关紧要。例如图 2 所示的三个图, 由于它们之间的点与线的连接关系相同, 所以可视为同一个图。

为了与通常几何图区别起见, 我们把这种仅与结

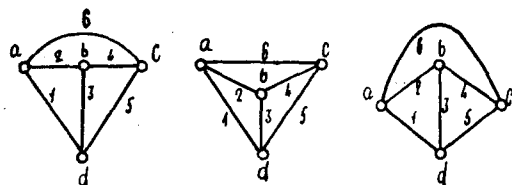


图 2

构有关的图称为拓扑图, 或简称为图 (graph); 图中代表元件的线段叫做边 (edge) 或支路 (branch); 元件的端点叫做顶点 (vertex) 或节点 (node)。为方便起见, 在支路和节点上, 都被标以与网络相同的字母或号码。

若给定一个图 G , 由图 G 中的某些节点和某些支路所构成的图 G' , 称为图 G 的子图 (subgraph)。例如图 3 (b) 所示的图 G' 便是图 3 (a) 所示图 G 的子图。

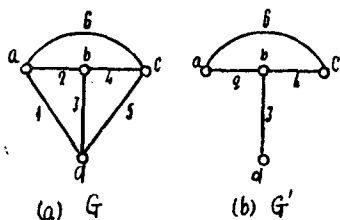


图 3

如果图中任意两节点都能沿着支路相通, 则称此图为连通图 (connected graph), 见图 4 (a), 否则称为非连通图, 见图 4 (b)。

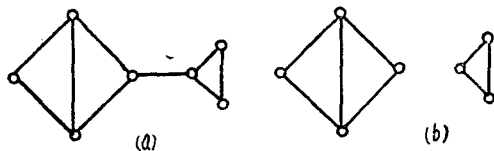


图 4

在连通图 G 中, 若存在某两个连通子图, 其间只有一个公共节点, 或只有一条支路相通, 则称 G 为可

分图 (separable), 见图 5 (a) 和 (b), 否则称为不可分图, 如图 5 (c) 所示。

在图 G 中, 若把所有支路均标以一定的方向, 则称为有向图 (oriented graph), 否则称为无向图。

本文主要讨论连通的、不可分的有向图。

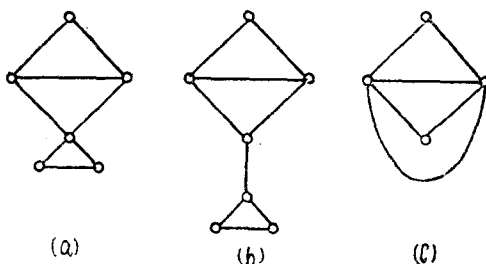


图 5

网络函数

1. 行列式值的计算

行列式值的计算是求解网络函数的关键。用代数方法求解时, 计算过程比较繁复。例如, 图 6 (a) 所示网络的导纳矩阵 Y 为

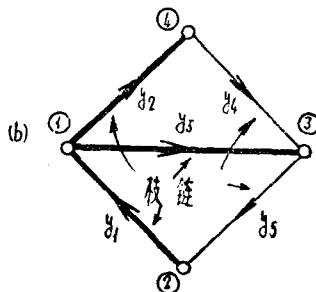
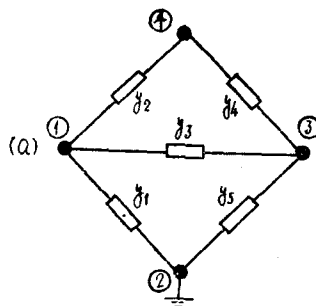


图 6

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_2 & -Y_2 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 \end{bmatrix}$$

其行列式值为

$$\begin{aligned} |Y| &= \begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_2 & -Y_2 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 \end{vmatrix} \\ &= (Y_1 + Y_2 + Y_3) \cdot \begin{vmatrix} Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_4 & Y_2 + Y_4 \end{vmatrix} + \\ &Y_3 \cdot \begin{vmatrix} -Y_2 & -Y_2 \\ -Y_4 & Y_2 + Y_4 \end{vmatrix} - Y_2 \cdot \begin{vmatrix} -Y_3 & -Y_2 \\ Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \end{vmatrix} \\ &= Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_2 Y_5 + Y_1 Y_3 Y_4 + \\ &Y_1 Y_4 Y_5 + Y_2 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_4 Y_5 + Y_2 Y_3 Y_4 \end{aligned}$$

在上述求解过程中,存在很多不必要的运算。就拿上式右边第一个行列式来看,展开后与前项相乘,共有14项之多。其中很多项与后面展开的各项互相抵消,最后只剩下8项。

仔细观察上述结果,并把它与图6(b)所示的拓扑图进行对比,便会发现上述8项分别与图7所示的8个子图的支路导纳乘积相对应,这并非是偶然的。

图7中8个子图有二个共同的特点:(1)与所有节点均连通;(2)不存在闭合回路。具有这二个特点的子图,在图论中称为树(tree),属于树的支路称为枝,见图6(b)中粗线所示。若除去构成树的所有枝,

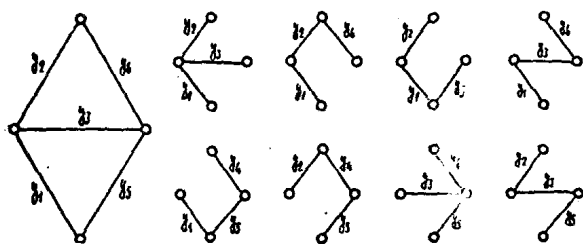


图7

剩下的子图便称为反树(cotree),属于反树的支路叫做链(link),见图6(b)中细线所示。

在一个连通图中,可以选出很多种不同的树,比如图6(b)所示的图中就有图7所示的8种树,这8种树的枝导纳乘积之和正好等于此图导纳矩阵Y的行列式值,可以证明,任一连通图的导纳矩阵Y的行列式值为

$$|Y| = \sum_{\text{所有树}} (\text{枝导纳积}) = T_g \quad \langle 1 \rangle$$

式中 T_g 为“所有枝导纳乘积之和”的缩写。

用拓扑方法计算 $|Y|$ 时,关键在于列出所有的树。拓扑方法的最大特点是,在求解过程中不存在相互抵消的项,从而简化了计算过程。

树和反树是图论中重要的基本概念之一。对于节点数为 n 的连通图 G 的任一个树,其枝数 $r = n - 1$,我们把 r 定义为 G 的秩(rank)。若图 G 的总支路数为 b ,则余下的反树中的链数 $\rho = b - r = b - n + 1$,我们把 ρ 定义为 G 的零度(nullity)。例如在图6(b)所示的连通图中,支路数 $b = 5$,节点数 $n = 4$,则此图的秩 $r = 4 - 1 = 3$,零度 $\rho = 5 - 4 + 1 = 2$ 。

2. 无源网络任意两端输入阻抗(Z_{pq})的计算

如果在无源网络中任意两个端子P、q上接有电流源 I_{pq} ,则此两端子间的电压 U_{pq} 与电流 I_{pq} 的关系是完全确定的,网络函数

$$Z_{pq} = \frac{U_{pq}}{I_{pq}}$$

称为p、q端的输入阻抗,见图8所示。

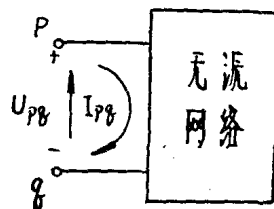


图8

在用代数方法求解任意两端的输入阻抗时,我们总可以取某一端子(比如q)作为参考点,作出导纳矩阵Y,然后在Y中,划去与另一端子(p)所对应的行和列,得到 Y_{pp} ,最后通过下式求得

$$Z_{pq} = \frac{|Y_{pp}|}{|Y|}$$

在拓扑方法中,划去对应的行和列的过程,就相当于把拓扑图中对应的两节点p和q短路。因此计算无源网络任意两端输入阻抗的拓扑公式为

$$Z_{pq} = \frac{T_g(p, q)}{T_g} \quad \langle 2 \rangle$$

其中, $T_g(p, q)$ 相当于把节点p与q短路后的 T_g 。例如,在求解图6(a)所示无源网络中节点1和节点2之间的输入阻抗时,可先由它的拓扑图(见图9(a))求得

T_g (与前面相同); 再求出把节点①和节点②短路后的 T_g (见图9(c)和图10);

$T_g(1, 2) = y_2 y_3 + y_2 y_5 + y_4 y_3 + y_4 y_5 + y_2 y_4$
最后, 利用拓扑公式求得输入阻抗函数为

$$Z_{12} = \frac{T_g(1, 2)}{T_g} = \frac{y_2 y_3 + y_2 y_5 + y_4 y_3 + y_4 y_5 + y_2 y_4}{y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_3 y_4 y_5 + y_2 y_3 y_5}$$

3. 无源网络转移阻抗 ($S_{pq,rs}$) 的计算

如果在无源网络的任意两个端子p、q上接有电流源 I_{pq} , 而在网络的另外两端r、s上得到一电压 U_{rs} , 则网络函数

$$S_{pq,rs} = \frac{U_{rs}}{I_{pq}}$$

称为从p、q端至r、s端的转移阻抗。见图11所示。

对于图12所示的多端网络, 根据基尔霍夫电压定律可得如下关系式:

$$U_{p_1 p_k} = U_{p_k - 1 p_k} + U_{p_k - 2 p_k - 1} + \dots + U_{p_1 p_{i+1}} + \dots + U_{p_1 p_2} \\ + U_{p_1 p_2} = \sum_{i=1}^{k-1} U_{p_1 p_{i+1}}$$

由此可得输入阻抗与转移阻抗之间的关系式如下:

$$Z_{p_1 p_k} = \frac{U_{p_k - 1 p_k}}{I_{p_1 p_k}} + \dots + \frac{U_{p_1 p_{i+1}}}{I_{p_1 p_k}} + \dots + \frac{U_{p_1 p_2}}{I_{p_1 p_k}} \\ = S_{p_1 p_k, p_k - 1 p_k} + \dots + S_{p_1 p_k, p_1 p_{i+1}} + \dots + S_{p_1 p_k, p_1 p_2} \\ = \sum_{i=1}^{K-1} S_{p_1 p_k, p_1 p_{i+1}}$$

式中, $p_1, p_2, \dots, p_k$ 为网络中的任意K个节点。此公式不但与网络中元件无关, 而且与网络的具体结构无关。

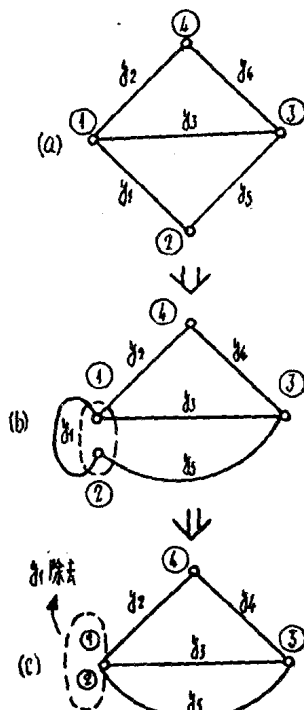


图9

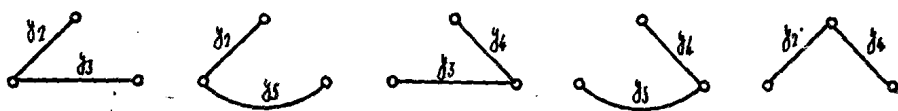


图10

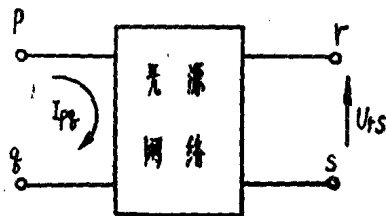


图11

对于三端网络来说, 假设三个端点为p、q、r, 如图13所示, 则上述输入阻抗与转移阻抗之间的关系式为

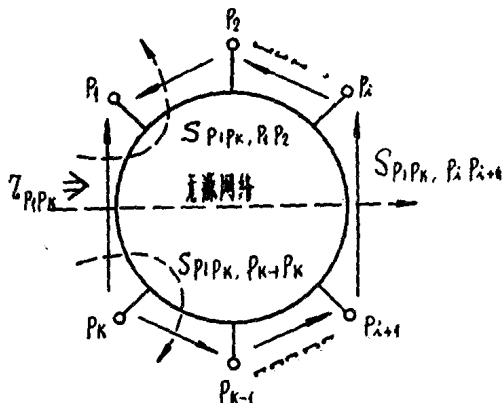


图12

$$\begin{cases} Z_{pr} = S_{pr,qr} + S_{pr,pq} \\ Z_{rq} = S_{rq,pq} + S_{rq,rp} \\ Z_{qp} = S_{qp,rp} + S_{qp,qr} \end{cases}$$

当所定义的电压、电流方向改变时,有

$$S_{pq,rs} = -S_{qp,rs} = -S_{pq,qr} = S_{qp,qr}$$

当网络为可逆时,有

$$S_{pq,rs} = S_{rs,pq}$$

由上述诸公式可求得三端网络转移阻抗的计算公式为

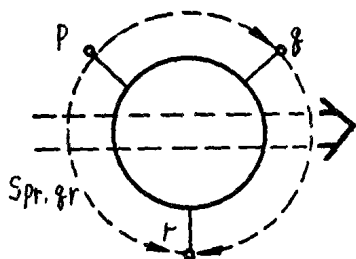


图13

$$S_{pr,qr} = \frac{1}{2} (Z_{pr} + Z_{qr} - Z_{pq}) \quad (3)$$

同理可求得四端网络转移阻抗的计算公式为 (图14)

$$S_{pq,rs} = \frac{1}{2} (Z_{ps} + Z_{qr} - Z_{pr} - Z_{qs}) \quad (4)$$

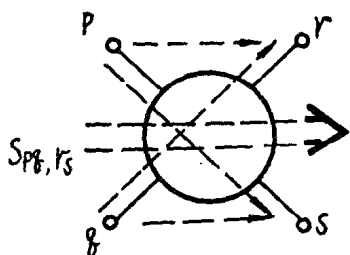


图14

例如,在求图15(a)所示四端网络的转移阻抗 $S_{12,34}$ 时,具体步骤如下:

(1) 作此网络的拓扑图如图15(b)所示,图中各支路的导纳分别为:

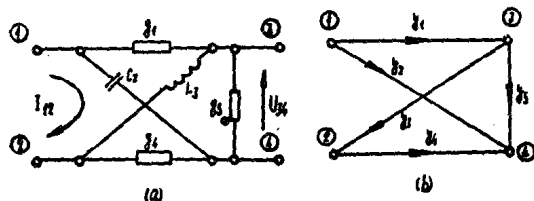


图15

$$Y_1 = g_1, Y_2 = j\omega C_2, Y_3 = \frac{1}{j\omega L_3}, Y_4 = g_4, Y_5 = g_5$$

(2) 找出拓扑图中的所有树如图16所示。为简便起见,支路的方向和支路上的标号 y 均被略去;

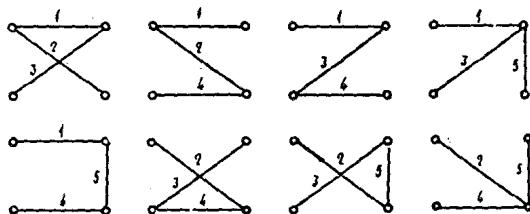


图16

(3) 分别把节点①和④、②和③、①和③、②和④短路后,找出所有的树如图17所示;

(4) 由图16求得

$$T_g = Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_4 Y_5 + Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_3 Y_5 + Y_2 Y_4 Y_5$$

(5) 由图17求得

$$T_g(1,4) = Y_4 Y_5 + Y_1 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_1 Y_3 + Y_3 Y_4$$

$$T_g(2,3) = Y_1 Y_5 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_2 Y_4 + Y_1 Y_2$$

$$T_g(1,3) = Y_4 Y_5 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_4$$

$$T_g(2,4) = Y_1 Y_5 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_5 + Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2$$

(6) 最后由下式求得转移阻抗为

$$S_{12,34} = \frac{1}{2} (Z_{14} + Z_{23} - Z_{13} - Z_{24})$$

$$= \frac{1}{2T_g} [T_g(1,4) + T_g(2,3) - T_g(1,3) - T_g(2,4)]$$

$$= (Y_1 Y_4 - Y_2 Y_3) / T_g$$

$$= (g_1 g_4 - C_2 / L_3) / T_g$$

$$\text{其中, } T_g = g_1 C_2 / L_3 + j\omega g_1 C_2 g_4 + g_1 g_4 / j\omega L_3 + g_1 g_5 / j\omega L_3 + g_1 g_4 g_5 + C_2 g_4 / L_3 + C_2 g_5 / L_3 + j\omega C_2 g_4 g_5$$

仔细观察转移阻抗的结果,便会发现它的分子项为与节点①、③不相连通的树和与节点2,4不相连通的树的二树枝导纳积之和 $T_g(13,24)$, 减去与节点1,4不相连通的树和与节点2,3不相连通的树的二树枝导纳积之和 $T_g(14,23)$, 见图18。可以证明,这一结论具有普遍的意义。因此计算转移阻抗的表达式还可进一步简化为

$$S_{12,34} = \frac{T_g(13,24) - T_g(14,23)}{T_g} \quad (5)$$

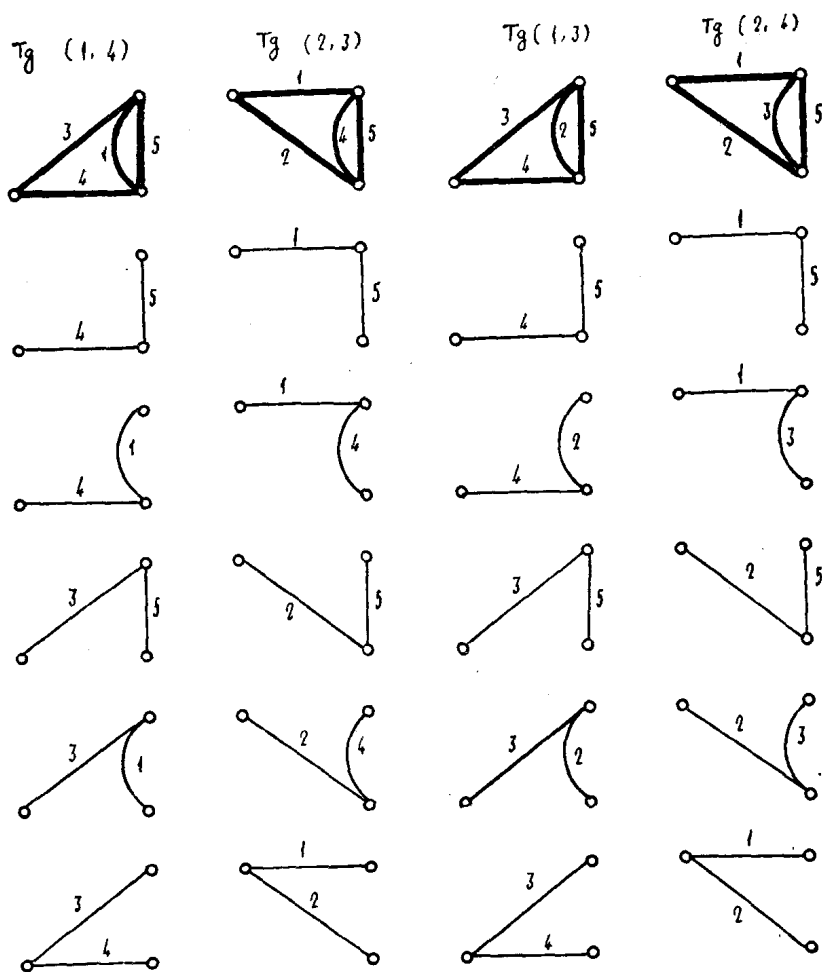


图17

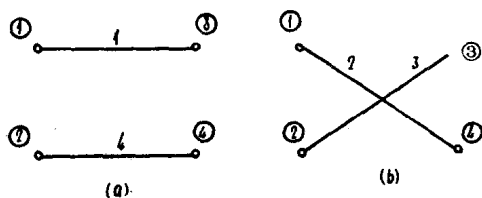


图18

例如，某网络的拓扑图如图19所示，利用简化公式<5>计算转移阻抗时，可先分别作出类似于图18(a)和(b)的二树图如图20(a)和(b)所示，然后由简化公式直接求得

$$S_{12,34} = \frac{Tg(13,24) - Tg(14,23)}{Tg} = (y_1 y_2 y_7 +$$

$$+ y_1 y_3 y_7 + y_2 y_3 y_7 + y_3 y_5 y_7 - y_1 y_4 y_6 - y_1 y_5 y_6 - y_2 y_4 y_6 - y_4 y_5 y_6) / Tg$$

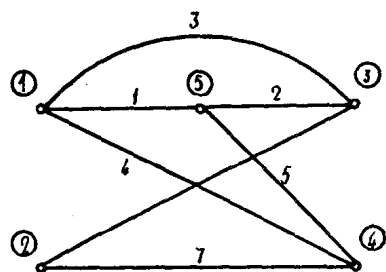
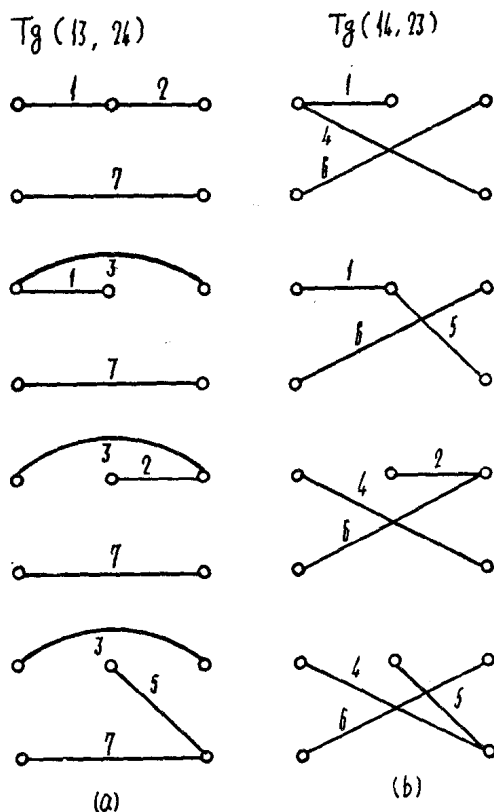


图19

利用类似的方法，还可计算输入导纳、转移导纳等网络函数，在此不再赘叙。

综上所述，计算网络函数的关键是如何寻找所有的树。目前已有若干利用计算机找树的算法。一般说

来,在节点数较少时比代数方法有效。随着节点数的增多,如何有效地利用计算机找出所有的树,乃是现代的一个研究课题。



网络拓扑

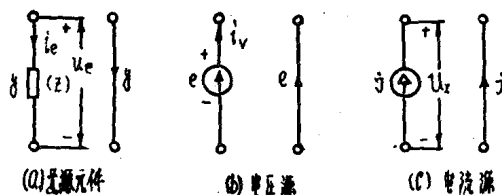
一般来讲,网络是由多种元件所组成。这里,我们暂且只讨论在正弦波电压源、电流源激励下,由L、C、R组成的网络的稳态响应。

为求出网络中各支路的电流和电压，必须适当定出各元件上电压和电流的正方向。按通常的习惯，各无源元件上的电流正方向可以任意指定，电压正方向依赖于电流正方向，对同一元件其上的电压方向与电流方向相反，见图21(a)。对电压源和电流源的正方向规定如图21(b)和(c)所示。

对于连通的不可分网络来说，每条支路有二个变量（支路电压和支路电流），共有 2 倍支路数的变量。这些变量之间都遵循欧姆定律、基尔霍夫第一定律和基尔霍夫第二定律。

1. 欧姆定律

假设网络中某支路的无源元件导纳为 y (或阻抗为 Z)，其上的电压为 U_e ，电流为 i_e ，则它们之间有如下关系：(下标 e 表示无源元件)



$$\begin{cases} i_e = y_e u_e \\ u_e = z_e i_e \end{cases} \quad \langle 6 \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{第1条支路: } i_{e1} = y_{e1} u_{e1}; \\ \text{第2条支路: } i_{e2} = y_{e2} u_{e2}; \\ \dots\dots\dots \\ \text{第}m\text{条支路: } i_{em} = y_{em} \cdot u_{em}. \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ \dots \\ i_{cm} \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{c1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{c2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ \dots \\ i_{cm} \\ U_s \end{bmatrix},$$

其中, $\mathbf{I}_e$ 和 $\mathbf{U}_e$ 分别称为元件电 流 向 量 和 元 件 电 压 向 量; $\mathbf{Y}_e$ 和 $\mathbf{Z}_e$ 分别称为元件导纳矩阵和元件阻抗矩阵。

式〈7〉所表示的方程,从形式上来看类似于欧姆定律方程式〈6〉,所不同的是:这里的 U_s 、 I_s 、 Z_s 和 Y_s 已不是某个元件的参量,而是反映整个电路的矩阵参量,这是应用于整个电路的欧姆定律方程式。

2. 基尔霍夫第一定律

基尔霍夫第一定律表示：与网络图中某一节点相连的所有支路电流的代数和为零，即：

$$\sum i_b = 0 \quad \langle 8 \rangle$$

上式是对网络中某一个节点而言。为了把(8)式推广应用至整个网络,我们引入一组反映各支路电流与各节点之间关系的系数 a_{kj} ,并定义为

$$a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{当第} j \text{条支路电流} i_j \text{背向节点} K \text{时;} \\ -1 & \text{当第} j \text{条支路电流} i_j \text{指向节点} K \text{时;} \\ 0 & \text{当第} j \text{条支路电流不流过节点} K \text{时。} \end{cases}$$

引入系数 a_{kj} 后,对第 K 个节点来说,基尔霍夫第一定律可以写成如下形式

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} i_{bj} = 0$$

例如,在图22所示的图中,对于节点①有:

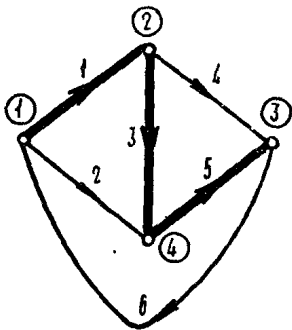


图22

$$1 \cdot i_{b1} + 1 \cdot i_{b2} + 0 \cdot i_{b3} + 0 \cdot i_{b4} + 0 \cdot i_{b5} - 1 \cdot i_{b6} = 0$$

同样,对于节点②、③、④也分别有:

$$-1 \cdot i_{b1} + 0 \cdot i_{b2} + 1 \cdot i_{b3} + 1 \cdot i_{b4} + 0 \cdot i_{b5} + 0 \cdot i_{b6} = 0$$

$$0 \cdot i_{b1} + 0 \cdot i_{b2} + 0 \cdot i_{b3} - 1 \cdot i_{b4} - 1 \cdot i_{b5} + 1 \cdot i_{b6} = 0$$

$$0 \cdot i_{b1} - 1 \cdot i_{b2} - 1 \cdot i_{b3} + 0 \cdot i_{b4} + 1 \cdot i_{b5} + 0 \cdot i_{b6} = 0$$

把上列各式写成矩阵形式为:

$$\begin{array}{c|cccccc} \text{支路} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \text{节点} \rightarrow & & & & & & \\ \text{①} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \text{②} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{③} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \text{④} & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \\ i_{b4} \\ i_{b5} \\ i_{b6} \end{bmatrix} = 0 \quad \langle 9 \rangle$$

A
 I_b

上式前面的系数矩阵反映了拓扑图中各节点与支路之间的连接关系,我们把它定义为关联矩阵(incidence matrix),用字母 A 来表示。

仔细观察上例的 A 矩阵,将会发现,每一行反映了与某一节点相关的支路及其方向,每一列表示某条支路与那两个节点相连。比如,上例 A 矩阵中第一行的三个非零元素,表明与节点①相连的三条支路分别为1、2和6,其中支路1和2的方向背向节点①,所以

取1,支路6的方向指向节点①,所以取-1,其它支路均与节点①无关,所以取0。其它行意义相同,第一列表示支路1从节点①出发指向节点②,其它列类同。

由上例可见, A 矩阵中每一列有且仅有一个1和一个-1。可以证明,上述 A 矩阵的 n 行是线性相关的。但 A 的任意 $n-1$ 行却是线性独立的。如果在 A 矩阵中去掉某一行(即把这一行的节点视为参考点),余下的矩阵我们称为去行关联矩阵(reduced incidence matrix)。

比如在上例中,我们去掉第四行(即选择节点④为参考点)后所得的去行关联矩阵为

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3 \times 6)$$

由此可见,去行关联矩阵是由 $r(=n-1)$ 行和 b (支路数)列组成。今后除特别说明外,我们所说的关联矩阵 A 都是指去行关联矩阵。

引入去行关联矩阵 A 后,根据式(9),我们可以把基尔霍夫第一定律表示成更全面更简便的形式:

$$A I_b = 0 \quad \langle 10 \rangle$$

若把上例中的 A 矩阵转置后再与节点电压向量 U_n 相乘,则可推得节点电压 U_n 与支路电压 U_b 的关系式:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n1} - u_{n2} \\ u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n2} - u_{n3} \\ -u_{n3} \\ u_{n3} - u_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \\ u_{b3} \\ u_{b4} \\ u_{b5} \\ u_{b6} \end{bmatrix}$$

A^T
 U_n
 U_b

$$\text{即} \quad U_b = A^T U_n \quad \langle 11 \rangle$$

其中,右上角的 T 表示矩阵转置。

此外,由于图可以分成树和反树两部分,见图22中粗线和细线所示,所以 A 矩阵也可分解成反映节点与枝之间关系的 A_T 和反映节点与链之间关系的 A_L 两部分,即:

$$\begin{array}{c|cccccc} \text{①} & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ \text{②} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \text{③} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{④} & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} = [A_T | A_L] \quad \langle 12 \rangle$$

A_T
 A_L

A 矩阵是节点分析法的基础,是最常用的拓扑矩

阵之一。

3. 基尔霍夫第二定律

基尔霍夫第二定律表示：在网络图中任一闭合回路上所有支路电压的代数和为零，即：

$$\sum u_k = 0 \quad (13)$$

上式只是对网络中某一个回路而言。若引入一组反映各支路电压与回路之间关系的系数 b_{kj} 的话，则基尔霍夫第二定律同样可以推广应用至整个网络。在此， b_{kj} 定义为

$$b_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{当第 } j \text{ 条支路的电流方向与假设的第 } K \text{ 个回路循行方向同向时;} \\ -1 & \text{当第 } j \text{ 条支路的电流方向与假设的第 } K \text{ 个回路循行方向反向时;} \\ 0 & \text{当第 } j \text{ 条支路与第 } K \text{ 个回路无关时。} \end{cases}$$

引入系数 b_{kj} 后，对网络中第 K 个回路来说，基尔霍夫第二定律具有如下形式

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} U_{bj} = 0$$

例如，在图23所示的图中，对于虚线所示的三个回路分别有：

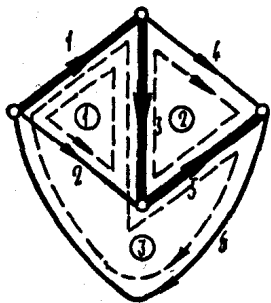


图23

$$\begin{cases} \text{①} & -1 \cdot u_{b1} + 1 \cdot u_{b2} - 1 \cdot u_{b3} + 0 \cdot u_{b4} + 0 \cdot u_{b5} + 0 \cdot u_{b6} = 0 \\ \text{②} & 0 \cdot u_{b1} + 0 \cdot u_{b2} - 1 \cdot u_{b3} + 1 \cdot u_{b4} - 1 \cdot u_{b5} + 0 \cdot u_{b6} = 0 \\ \text{③} & 1 \cdot u_{b1} + 0 \cdot u_{b2} + 1 \cdot u_{b3} + 0 \cdot u_{b4} + 1 \cdot u_{b5} + 1 \cdot u_{b6} = 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{array}{c} \text{回路} \rightarrow \\ \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array} \begin{array}{c} \text{支路} \\ \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \\ u_{b3} \\ u_{b4} \\ u_{b5} \\ u_{b6} \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

(3×6) B U_b

上式前面的系数矩阵反映了拓扑图中各基本回路与支路之间的相互关系，我们把它定义为基本回路矩阵 (fundamental loop matrix)，用字母 B 来表示。

为作出图的基本回路，我们先任意选定一个树 T (如图23中粗线所示)，设 l_i 是反树中的任一条链，把链 l_i 加入树 T 中，可以得到一个且仅仅一个回路，若分别加上反树的 $\rho (= b - n + 1)$ 个链，则可以得到 ρ 个回路 (如图23虚线所示)，这 ρ 个回路就称为对于树 T 的基本回路。

引入基本回路矩阵 B 后，根据式 (14)，我们可以把基尔霍夫第二定律表示成如下的简单形式：

$$B U_b = 0 \quad (15)$$

若把 B 矩阵转置后再与回路电流向量 I_l 相乘，则可推得回路电流 I_l 与支路电流 I_b 的关系如下：

$$I_b = B^T I_l \quad (16)$$

与 A 矩阵类似， B 矩阵也可分解为反映回路与枝之间关系的矩阵 B_T 和反映回路与链之间关系的矩阵 B_L 。当各基本回路的取向与相应各链的方向相同时 (见图23)，则 B 矩阵具有更简单的形式：

$$B = \begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [B_T \mid U] \quad (17)$$

B_T $B_L = U$

其中 U 是对角线元素为 1，其余均为零的单位矩阵 (unit matrix)。

回路矩阵 B 是回路分析法的基础。

除了关联矩阵 A 和回路矩阵 B 以外，在图论中还有一个重要矩阵——割集或切组 (cut set) 矩阵 C 。

所谓切组就是：若把连通图中的一组支路开路 (即从图中移去) 后，使图 G 分成两个连通子图，并且假设恢复这组支路中的任一条支路，即可使图成为连通的，这组支路便称为图 G 的一个切组。

对于树 T 中的任一条枝，都可以得到一个且仅仅一个切组，因此 $r (= n - 1)$ 个枝就有 r 个切组，如图24虚线所示，这样作出的切组我们称之为基本切组 (fundamental cut set)。

基本切组 C 由 r 行和 b 列组成，矩阵中的各元素定

义为

$$C_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{当构成第 } k \text{ 个切组的第 } j \text{ 条支路与该切组中枝方向同向;} \\ -1 & \text{当构成第 } k \text{ 个切组的第 } j \text{ 条支路与该切组中枝方向反向;} \\ 0 & \text{当第 } k \text{ 个切组与第 } j \text{ 条支路无关。} \end{cases}$$

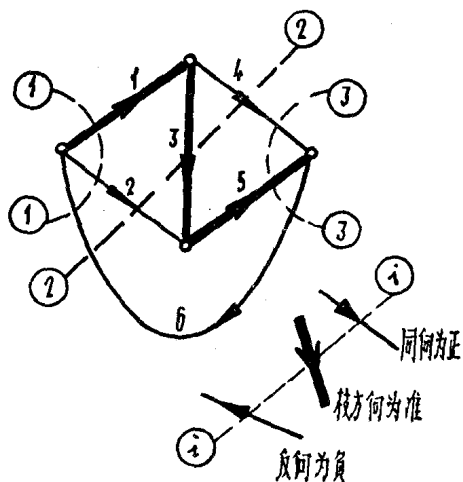


图24

例如在图24中,共有三条枝1、3、5。经过每条枝均可作一个基本切组如图中虚线所示。第一个切组由1、2、6三条支路构成,其中1是枝,作为正方向,支路2与枝1同向,取+1,支路6与枝1反向,取-1,其它所有支路与该切组无关,取0。其余切组以此类推。由此可得图24的基本切组矩阵C为

$$C = \begin{bmatrix} \text{切组} \backslash & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{①} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \text{②} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \text{③} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

若把上述矩阵C中的各条枝组成的列移到前面,则可得出更简单的表示形式:

$$C = \begin{bmatrix} \text{①} & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ \text{②} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \text{③} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ \text{④} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [U : C_L] \quad (18)$$

$$C_T = U \quad C_L$$

实际上,构成切组的一组支路,可视为与某一广义节点相联,如图25中阴影所示,对任一广义节点而言,基尔霍夫第一定律仍然成立,由此可推得如下关系式

$$C I_b = 0 \quad (19)$$

$$U_b = C^T U_n \quad (20)$$

基本切组矩阵是切组分析法的基础。

A、B、C矩阵是图论中最基本的三个拓扑矩阵,它们是拓扑图的矩阵表示,各矩阵之间存在一定的联系,可以证明,对同一个图来说,如下关系式成立(空间正交性):

$$B A^T = 0 \quad (A B^T = 0) \quad (21)$$

$$B C^T = 0 \quad (C B^T = 0) \quad (22)$$

把(17)、(12)两式代入(21)式得

$$B A^T = [B_T : U] [A_T : A_L]^T = [B_T : U] \cdot \begin{bmatrix} A_T^T \\ -A_L^T \end{bmatrix} = B_T A_T^T + U A_L^T = B_T A_T^T + A_L^T = 0;$$

由此可得回路矩阵B与关联矩阵A之间的关系为

$$B_T A_T^T = -A_L^T \quad (23)$$

把(17)、(18)两式代入(22)式得

$$B C^T = [B_T : U] [U : C_L]^T = [B_T : U] \begin{bmatrix} U^T \\ \dots \\ C_L^T \end{bmatrix} = B_T U^T + U C_L^T = B_T + C_L^T = 0; \quad (U^T = U)$$

所以,切组矩阵C与回路矩阵B之间有如下关系

$$B_T = -C_L^T \quad (24)$$

$$C_L = -B_T^T \quad (25)$$

把(23)式代入(25)式可得切组矩阵与关联矩阵之间的关系为

$$C_L = A_T^{-1} A_L \quad (26)$$

由此可见,只要列出A矩阵,便可通过(23)式和(26)式分别求得相应的回路矩阵B和切组矩阵C。

例如,图26所示的关联矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{①} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{②} & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{③} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为求出相应的基本回路矩阵B和切组矩阵C,我们先选定一组支路2、3、5为树的枝,将关联矩阵A按照树——反树的顺序重新排列

$$A = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ \text{①} & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ \text{②} & -1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \text{③} & 0 & -1 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_T} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_L}$$

因为

$$A_T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$C_L = A_T^{-1} A_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$C = [u : C_L] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

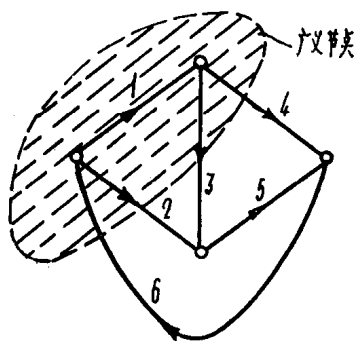
C_L

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

再由式(24)得

$$B_T = -C_L^T = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$i_2 + i_3 + i_4 - i_6 = 0$$

图 25

因此

$$B = [B_T : U] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

B_T

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

上述结果与直接由图26作出的C和B完全一致。

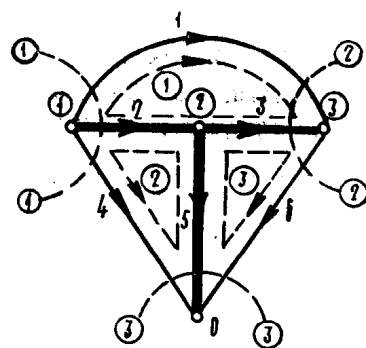


图 26

网络分析

1. 网络方程

构成网络拓扑图的支路大致可分为三种：无源支路、电流源支路和电压源支路，各支路电压和支路电流向量可分解为

$$U_b = [U_e \quad U_l \quad E]$$

$$I_b = [I_e \quad J \quad I_v]$$

其中，下标 e、l、v 分别表示无源、电流源和电压源支路，E 和 J 表示电压源支路的激励电压和电流源支路的激励电流。

对于拓扑图中的某个树，基本回路矩阵 B 和基本切组矩阵 C 也可按无源、电流源和电压源支路分解为

$$B = [B_e \quad B_l \quad B_v]$$

$$C = [C_e \quad C_l \quad C_v]$$

经这样分解后，基尔霍夫第一、第二定律和欧姆定律的矩阵表达式可合并为

$$\begin{bmatrix} B_e & B_l & B_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_e & C_l & C_v \\ Y_e & 0 & 0 & U & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -U_e \\ U_l \\ E \\ I_e \\ J \\ I_v \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

在网络分析中，通常电压源 E 和电流源 J 都是给定的，而要求解的是表示网络状态的向量 U_e 、 I_e 、 U_l 、 I_v 。在这种情况下，(27)式可改写为

$$\begin{bmatrix} B_e & B_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_e & C_v \\ Y_e & 0 & U & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -U_e \\ U_l \\ I_e \\ I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_v E \\ -C_l J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$D \qquad X \qquad F$

或

$$DX = F \quad (29)$$

为使上式有唯一的解，仅由电压源的支路不能形成回路，仅由电流源的支路不能构成切组。

在具体求解网络方程时，为简便起见，往往根据不同情况，采用各种不同的分析方法。常用的有切组分析法、节点分析法、回路分析法和混合分析法。

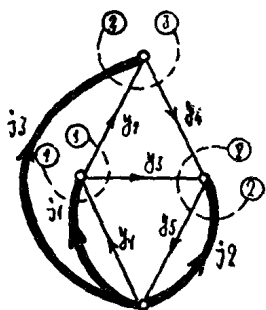


图 27

2. 切组分析法

为简便起见，假定网络中不含有电压源，即 $E = 0$, $I_v = 0$, $B_v = 0$, $C_v = 0$ 。且假定电流源为星状的树；见图27中粗线所示，对应于这种树的基本切组矩阵和基本回路矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} ① & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ② & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ ③ & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_s = U \quad C_t = U$

$$B = \begin{bmatrix} ① & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ ② & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ ③ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ ④ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ ⑤ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$B_s = U \quad B_t = U$

在这种情况下，网络方程(28)式可简化为

$$\begin{bmatrix} U & B_t & 0 \\ 0 & 0 & C_s \\ Y_s & 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U_s \\ U_t \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

展开(30)式得

$$\begin{cases} -U_s + B_t \cdot U_t = 0 \\ C_s I_s = -J \\ -Y_s U_s + I_s = 0 \end{cases} \quad (31)$$

解(31)式得

$$C_s Y_s B_t U_t = -J \quad (32)$$

由(24)式可知

$$B_t = -C_s^T$$

代入(32)式得切组方程式：

$$C_s Y_s C_s^T U_t = J \quad (33)$$

其中 $C_s Y_s C_s^T$ 即为原始导纳矩阵，用 Y 表示

$$Y = C_s Y_s C_s^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 & -y_3 & -y_2 \\ -y_4 & y_3 + y_4 + y_5 & -y_4 \\ -y_2 & -y_4 & y_2 + y_4 \end{bmatrix}$$

此结果就是前面图6(a)所示网络的导纳矩阵。

3. 节点分析法

类似于切组分析法的推导过程，同样可以推出节点方程式。在此，我们将讨论更一般的情况。

当网络中同时存在电压源和电流源时，我们可以把支路的定义扩充一下，一条支路除了必需包含无源元件外，还可同时包含电压源和电流源，如图28所示，它们之间的关系为（注意电压、电流的正方向）。

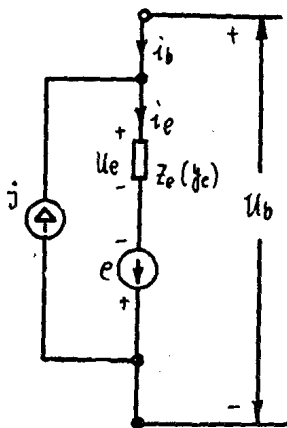


图 28

$$\begin{cases} U_b = U_s - e \\ i_b = i_s - j \end{cases}$$

上式对于图中的所有支路均成立，因此可写成如下的矩阵形式：

$$\begin{cases} U_b = U_s - E \\ I_b = I_s - J \end{cases} \quad \begin{matrix} \langle 34 \rangle \\ \langle 35 \rangle \end{matrix}$$

其中E为独立电压源向量，J为独立电流源向量，根据欧姆定律(7)式有：

$$I_s = Y_s U_s$$

由式(34)与式(11)得

$$U_s = U_b + E = A^T U_n + E$$

再由式(35)得

$$I_b = I_s - J = Y_s U_s - J = Y_s (A^T U_n + E) - J$$

根据基尔霍夫第一定律(10)式有

$$A I_b = 0,$$

即 $A Y_s (A^T U_n + E) - A J = 0$

经整理后得节点方程式如下：

$$A Y_s A^T U_n = A (J - Y_s E) \quad \langle 36 \rangle$$

由上式解出节点电压 U_n 后，代入(11)式即可求得 U_b ，再通过(34)、(7)和(35)等式可分别求得 U_s 、 I_s 及 I_b 等变量

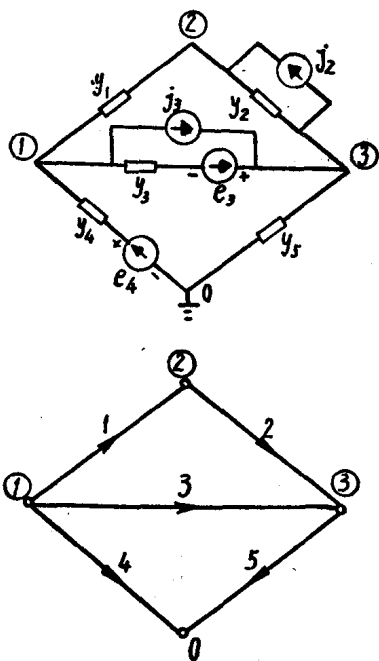


图 29

例如，图29所示的关联矩阵为

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

元件导纳矩阵及电压源、电流源向量为

$$Y_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_3 \\ -e_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ -j_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

把以上各式代入(36)式，即可求得 u_n ，具体求介过程纯属矩阵运算，在此不再赘叙。

对于切组矩阵同样可推得切组方程式为

$$C Y_s C^T U_T = C (J - Y_s E) \quad \langle 37 \rangle$$

其中， U_T 为枝电压变量。

4. 回路分析法

由以下五个关系式可直接求解 I_1 、 I_b 、 I_s 、 U_b 及 u_s 五个变量。

$$\begin{cases} U_s = Z_s \cdot I_s & \text{(欧姆定律)} \\ B U_b = 0 & \text{(基尔霍夫第二定律)} \\ I_b = B^T I_1 \\ U_b = U_s - E \\ I_b = I_s - J \end{cases}$$

上述关系式可合并为如下矩阵

$$\begin{matrix} U_s - Z_s \cdot I_s = 0 \\ B U_b = 0 \\ I_b - B^T I_1 = 0 \\ U_b - U_s = E \\ I_s - I_b = J \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} I_1 & I_b & I_s & U_b & U_s \\ 0 & 0 & -Z_s & 0 & U \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ -B^T & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -U & U \\ 0 & -U & U & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_b \\ I_s \\ U_b \\ U_s \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ J \\ N \end{bmatrix}$$

即 $MX = N \quad \langle 38 \rangle$

上述方程中，M、N均为已知，故X可直接求解得出。当然，要求解(38)式的大型矩阵，即使用电子计算机求解也得采用一些稀疏矩阵处理方法，否则内存容量和运算速度均会成问题。为简便起见，当然也可以仿照节点方程式的推导过程，由上面五个关系式推出回路方程式如下：