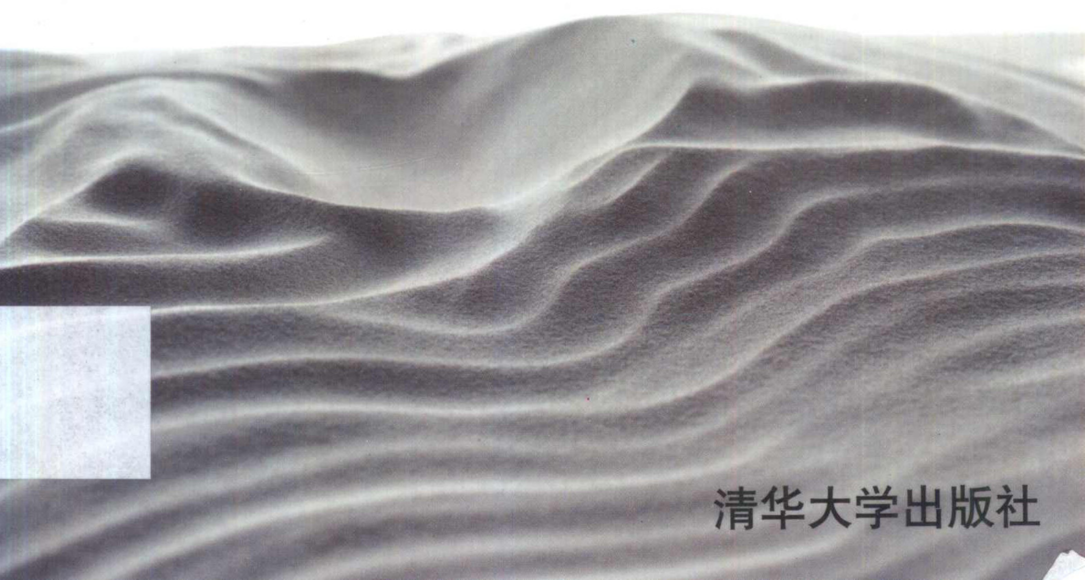
钱绍圣 编著

测量不确定度

实验数据的处理与表示

$$U = ku_c(y)$$



清华大学出版社

483

测量不确定度

实验数据的处理与表示

钱绍圣 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

测量不确定度表示测量结果的可信任度，它适用于给出和使用测量结果的各个领域。本书介绍如何应用《测量不确定度表示导则》(国际标准化组织1993年出版)进行实验数据的处理并正确、完整地给出测量不确定度。基本内容包括标准不确定度的评定，合成标准不确定度，不确定度的传递律，扩展不确定度及包含因子与自由度。为了使读者易于理解和应用《测量不确定度表示导则》，并能掌握实验数据的处理和表示的方法，本书还介绍了概率统计的基本知识，以及误差、异常值、系统误差、随机误差、权与不等权测量和最小二乘法。本书通俗易懂，便于自学。书中有较多例题，书末附有思考与练习题。

本书可作为大专院校测试及仪器类专业的教材，也可作为理工类相关专业的教材或参考书，对从事实验工作的科研、教学人员和生产部门有关人员具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

测量不确定度：实验数据的处理与表示/钱绍圣编著．—北京：清华大学出版社，2002.6

ISBN 7-302-05356-1

Ⅰ．测…　Ⅱ．钱…　Ⅲ．测量—不确定度　Ⅳ．TB 9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 016118 号

出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编：100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：王仁康
版式设计：韩爱军
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：5.375　**字数**：132 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-05356-1/TB・41
印　　数：0001～4000
定　　价：9.50 元

前　言

工农业生产、商业贸易、科学和工程等各个领域都需要提供测量结果及其可信任度的数据。以往习惯于用误差来表示测量结果的可信任度。由于误差是测量结果与被测量(真)值之差，而被测量(真)值在大多数情况下是未知量，从而使得这种表示方法受到质疑。1993年国际标准化组织(ISO)在国际计量局、国际电工委员会、国际理论物理与应用物理联合会、国际理论化学与应用化学联合会、国际临床化学联合会等7个国际组织的支持下出版了《测量不确定度表示导则》(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement，本书简称为"导则")，目的是促进表示的不确定度具有足够完整的信息，为测量结果的国际比对(也称为国际比较)提供基础。该导则适用于一切给出和使用测量结果的领域，比如工业、农业、商业以及科学和工程领域，包括基础研究、应用研究和开发工作。世界各国正在推广应用"导则"。

笔者近年来在对多届研究生、本科生讲授"测量不确定度"和"近代物理测试"课程的过程中，在阅读、审查各类学位论文及各种实验报告、文献等时，深感理工类学生、科技研究人员、有关教师需要一本通俗易懂、便于自学的测量不确定度的书籍，因此笔者遵循"导则"的原则，在原讲稿的基础上，总结了科学研究工作中的经验与体会，撰写了本书，以方便读者应用"导则"，规范实验数据的处理与表示方法。本书共分8章，第1章介绍测量不确定度的概念及其与测量误差的不同之处，第2章介绍概率统计的基础知识，已熟悉这方面知识的读者可直接阅读后面的章节，第3章介绍标准不确定度的评定，第4章介绍异常值和系统误差，以便对实验数据预先剔除异常值及进行系统误差的修正，第5章和第6章介绍合

成标准不确定度和扩展不确定度，第 7 章介绍权与不等权测量，第 8 章介绍最小二乘法。前 6 章是本书的基本内容，掌握了这些内容就能对实验观测值进行处理，在完成实验报告、科学研究报告和撰写各种论文时，能正确给出测量结果及其不确定度，后 2 章供有兴趣的读者进一步学习用。

由于编著者水平有限，错误和不妥之处恳请专家及读者指正。

钱绍圣

2002 年 3 月于清华园

测量不确定度所用基本符号汇编

a	(1)被测量(真)值; (2)输入量 X 的可能值均匀分布的半宽度。
c_i	偏导数或灵敏系数,$c_i \equiv \partial f/\partial x_i$。
f	被测量 Y 与和 Y 有关的输入量 X_i 之间的函数关系,以及输出估计值 y 与和 y 有关的输入估计值 x_i 之间的函数关系。
$f(x)$	随机变量 ξ 的分布密度函数。
$\partial f/\partial x_i$	被测量 Y 与和 Y 有关的输入量 X_i 之间的函数对于输入量 X_i 的偏导数,对 X_i 用估计值 x_i 评定:$\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i \|_{x_1,x_2,\cdots,x_N}$。
k	用于由合成标准不确定度 $u_c(y)$ 计算输出估计值 y 的扩展不确定度 $U=ku_c(y)$ 的包含因子,其中 U 定义为一个具有高置信水平的区间,$Y=y\pm U$。
k_p	用于由合成标准不确定度 $u_c(y)$ 计算输出估计值 y 的扩展不确定度 $U_p=k_pu_c(y)$ 的包含因子,其中 U_p 定义为一个具有高的规定置信水平为 p 的区间,$Y=y\pm U_p$。
n	重复观测的次数。
N	与被测量 Y 有关的输入量 X_i 的个数。
p	置信水平,$0\leqslant p\leqslant 1$。
$r(x_i,x_j)$	x_i 和 x_j 的估计相关系数,$r(x_i,x_j)=u(x_i,x_j)/u(x_i)u(x_j)$,$r(x_i,x_j)=r(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$。
$r(X_i,X_j)$	X_i 和 X_j 的估计相关系数。
$s^2(X_k)$	(1) X 的 n 次独立重复观测值 X_k 决定的实验方差; (2) X 的概率分布的方差 $\sigma^2(X)$ 的估计值。
$s^2(\overline{X})$	(1) 输入量 X 的算术平均值 $\overline{X}$ 的实验方差,即 $\overline{X}$ 的方差的最佳估计值 $s^2(\overline{X})=s^2(X_k)/n$; (2) 由 A 类评定得到的估计方差。

$s(\overline{X})$ (1) 输入量 X 的算术平均值 $\overline{X}$ 的实验标准偏差，等于 $s^2(\overline{X})$ 的正平方根；

(2) 由 A 类评定得到的标准不确定度。

$s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$ (1) $\overline{X}_i$ 和 $\overline{X}_j$ 的协方差估计值；

(2) 由 A 类评定得到的估计协方差。

$t_p(\nu)$ 相应于置信水平 p 和自由度为 ν 时由 t 分布得到的 t 因子，查 t 分布的 $t_p(\nu)$ 值表可得。

$t_p(\nu_{\text{eff}})$ 相应于置信水平 p 和自由度为 ν_{eff} 时由 t 分布得到的 t 因子，查 t 分布的 $t_p(\nu)$ 值表可得，用于计算扩展不确定度 U_p。

$u^2(x)$ x 的估计方差。当 x 由 n 次独立重复观测的算术平均值确定时，$u^2(x)=s^2(\overline{X})$，是由 A 类评定得到的估计方差。

$u(x)$ x 的标准不确定度，等于 $u^2(x)$ 的正平方根。当 x 是由 n 次独立重复观测的算术平均值确定时，$u(x)=s(\overline{X})$，是由 A 类评定得到的标准不确定度。

$u(x_i,x_j)$ x_i 和 x_j 的估计协方差。当 x_i 和 x_j 是由 n 次独立重复观测的算术平均值确定时，$u(x_i,x_j)=s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$，是由 A 类评定得到的标准不确定度。

$u_c^2(y)$ 输出估计值 y 的合成方差，在不易被混淆时可简写为 u_c^2。

$u_c(y)$ 输出估计值 y 的合成标准不确定度，等于 $u_c^2(y)$ 的正平方根。

$u_{cA}(y)$ 由 A 类评定获得的标准不确定度和估计协方差所确定的输出估计值 y 的合成标准不确定度。

$u_{cB}(y)$ 由 B 类评定获得的标准不确定度和估计方差所确定的输出估计值 y 的合成标准不确定度。

$u_i^2(y)$ 由输入估计值 x_i 的估计方差 $u^2(x_i)$ 产生的输出估计值 y 的合成方差 $u_c^2(y)$ 的分量，$u_i^2(y)\equiv[c_iu(x_i)]^2$。

$u_i(y)$ 由输入估计值 x_i 的标准不确定度产生的输出估计值 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的分量，$u_i(y)\equiv|c_i|u(x_i)$。

$u(x_i)/|x_i|$ 输入估计值 x_i 的相对标准不确定度。

$u_c(y)/|y|$ 输出估计值 y 的相对合成标准不确定度。

$[u(x_i)/x_i]^2$ 输入估计值 x_i 的估计相对方差。

$[u_c(y)/y]^2$	输出估计值 y 的相对合成方差。
$\dfrac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$ 的估计相对不确定度。
U	输出估计值 y 的扩展不确定度。它确定了具有高置信水平的一个区间 $Y=y\pm U$,等于包含因子 k 乘 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$,$U=ku_c(y)$。
U_p	输出估计值 y 的扩展不确定度。它确定了具有高的规定的置信水平 p 的区间 $Y=y\pm U_p$,等于包含因子 k_p 乘 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$,$U_p=k_pu_c(y)$。
w_k	X_k 的权重。
x	输入量 X 的估计值,当 x 由 n 次独立重复观测的算术平均值确定时,$x=\overline{X}$。
x_i	输入量 X_i 的估计值,当输入量超过一个时,用下标 i 表示第 i 个输入量。
X_i	与被测量 Y 有关的第 i 个输入量,X_i 可以是物理量或随机变量。
X_k	X 的第 k 次独立重复观测值。
$\overline{X}_i$	输入量 X_i 的估计值,等于 X_i 的 n 次独立重复观测值 X_{ik} 的算术平均值。
X_{ik}	X_i 的第 k 次独立重复观测值,也用来表示 X 的 i 组第 k 次独立重复观测值。
$\hat{X}$	不等权测量中被测量(真)值的最佳估计值,又称为加权算术平均值。
y	(1) 被测量 Y 的估计值; (2) 测量结果; (3) 输出估计值。
Y	被测量。
δ	测量误差,也称绝对误差。
δ_R	相对误差。
δ_r	随机误差。
δ_{rk}	X_k 的随机误差。

δ_s　系统误差。

δ_{sk}　X_k 的系统误差。

δX_i　X_i 的误差。

δX_{ik}　X_i 的第 k 次观测值 X_{ik} 的误差。

δY　Y 的误差。

μ　(1) 随机变量 ξ 的概率分布的期望；

(2) 同一被测量实行无限多次测量结果的平均值。

ν　自由度。

$\nu[s(X_k)]$　$s(X_k)$的自由度。

$\nu[s(\overline{X})]$　$s(\overline{X})$或 $s(x)$的自由度,也可表示为 $\nu[s(x)]$。

$\nu[u(x)]$　$u(x)$的自由度。

ν_i　输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$的自由度或有效自由度,也可表示为 $\nu[u(x_i)]$。

ν_{eff}　$u_c(y)$的有效自由度,在计算扩展不确定度 U_p 时用于获得 $t_p(\nu_{eff})$。

ν_{effA}　仅由 A 类评定获得的标准不确定度所确定的合成标准不确定度的有效自由度。

ν_{effB}　仅由 B 类评定获得的标准不确定度所确定的合成标准不确定度的有效自由度。

σ^2　(1) ξ 的方差；

(2) 表示被测量 Y 或输入量 X 的方差；

(3) 单位权方差。

σ　一个概率分布的标准偏差,等于 σ^2 的正平方根,$s(X_k)$是 σ 的有偏估计。

$\sigma^2(\overline{X})$　$\overline{X}$的方差,等于 σ^2/n,用 $s^2(\overline{X})=s^2(X_k)/n$ 估计。

$\sigma(\overline{X})$　$\overline{X}$的标准偏差,等于$\sigma^2(\overline{X})$的正平方根,$s(\overline{X})$是 $\sigma(\overline{X})$的有偏估计。

$\sigma^2[s(\overline{X})]$　$\overline{X}$的实验标准偏差$s(\overline{X})$的方差。

$\sigma[s(\overline{X})]$　$\overline{X}$的实验标准偏差 $s(\overline{X})$的标准偏差,等于 $\sigma^2[s(\overline{X})]$的正平方根。

v_k　残(余误)差。

目　录

第1章　测量不确定度　误差

1.1　概　　述

在科学实验、产品生产、商业贸易及日常生活的各个领域，我们都要进行测量工作。测量的目的是确定被测量(measurand)的值，测量不确定度表示测量结果的不确定或不肯定的程度，也就是不可信度。

下面我们举例说明测量不确定度的含义。对气体温度用一仪表进行了多次测量，测量结果为(835.5±3.6)℃，其中835.5℃是多次测量的算术平均值，正负号后面的数字为扩展不确定度 U，它是合成标准不确定度 u_c 和包含因子 k 的乘积，即 $U=ku_c$。在此例中，$u_c=1.8$℃，$k=2$，得 $U=3.6$℃，k 值是基于自由度 $\nu=12$ 用简便方法得到的，±3.6℃确定了一个估计具有约95%置信水平的区间。该例表示了被测量的值落在(831.9～839.1)℃区间的置信水平约为95%，或测量结果835.5℃在置信水平为95%时的不可信度为±3.6℃。合成标准不确定度 u_c 由A类标准不确定度和B类标准不确定度合成而得。A类标准不确定度的评定是基于对气体温度多次测量得到的实验数据，B类标准不确定度的评定是基于测量用仪表的性能、测量环境对测量结果的影响、测量方法的近似性等。置信水平取多大的值由测量工作的要求所决定。如果要求置信水平为99%，在上例中，采用简便方法得到 $k=3$，扩展不确定度 $U=ku_c=5.4$℃，±5.4℃确定了一个估计具有约99%置信水平的区间。

上例中还有一点要说明一下，k 值是基于自由度 $\nu=12$ 用简便方法得到的，要确切理解这句话，就要了解自由度的含义及 k 值和自由度的关系，还要了解什么是简便方法及采用简便方法的条件。这些内容将在后面章节阐述，这里我们只简单介绍自由度的含义。自由度是方差之不确定度的度量，由于测量不确定度用标准偏差(方差的正平方根)表示，自由度也就是"测量不确定度的不确定度"。自由度大表示测量不确定度的不确定度小，即测量结果之不确定度的可信度高，反之亦然。还是用上例来说明，当自由度很大时，表示"被测量的值落在 831.9℃～839.1℃区间的置信水平约为 95%"的可信度高，对于自由度 $\nu=12$，3.6℃的不可信度大约是 21%。上例包括了测量不确定度表达的最基本内容，详见第 3 章至第 8 章。

1.2 误　差

测量不确定度表示测量结果的不可信度，或者说表示测量的质量。测量准确度(accuracy of measurement)表示测量结果与被测量(真)值之间的一致程度。在相当长的时间里，测量准确度用测量误差表示。测量误差 δ 是测量结果 X_k 减去被测量的(真)值 a，即

$$\delta=X_k-a \tag{1.1}$$

例如测量平面三角形的三个内角，测得其和是 $180°00'03''$，而三个内角和具有理论真值 $180°$，则误差 δ 为 $180°00'03''-180°=3''$。

被测量的(真)值有时也称为(量的)真值，是通过完善的测量所得到的值，或者说是在某一时刻和某一位置或状态下某量的效应体现出的客观值。由于要做到"完善的测量"是极其困难的，所以在大多数场合被测量的(真)值是未知的，(量的)真值是理想概念。事实上，量子效应排除惟一真值的存在。只有下述几种情况，

被测量的(真)值是可知的。

1. 理论真值

例如,平面三角形内角之和恒为180°,同一量值自身之差为0而自身之比为1。

2. 计量学的约定真值

例如,长度单位1m是光在真空中在(1/299 792 458)s时间间隔内所行进的路程。光速的数值及不确定度在历史上有过几次变动,但随着科学技术的进步,总的趋势是逐步逼近真值的。在1975年第15届国际计量大会上,光速的推荐值是299 792 458$m \cdot s^{-1}$,其(标准)不确定度为$\pm 4 \times 10^{-9} m \cdot s^{-1}$。长度单位1m是计量学的一种约定真值。常数委员会1986年推荐的阿伏伽德罗常数$6.022\,136\,7 \times 10^{23} mol^{-1}$,其标准不确定度为$0.000\,003\,6 \times 10^{23} mol^{-1}$,也是计量学的约定真值。约定真值都具有一定的不确定度,但就所要达到的目的而言,其本身的不确定度可以忽略不计。

3. 标准器具的约定真值

此约定真值指在给定地点,由参考标准(即具有所能得到的最高计量特性的计量标准)复现的量值。例如,作为参考标准(标准砝码、标准物质、标准测量仪器等)在其证书中所给出的值、市场上公平秤给出的值也作为市场上的约定真值。

1.2.1 误差按表示方式分类

误差按其表示方式,可分为(绝对)误差和相对误差,两者都是代数量,可正可负。相对误差是(绝对)误差与被测量的(真)值之比,即

$$\delta_R = \delta / a \tag{1.2}$$

由于a在大多数场合是未知的,因此,往往以测量结果代替被测量(真)值。误差的绝对值$|\delta|$恒为正值,不要和作为代数量的(绝