全日制普通高级中学教科书（试验修订本）

数学

第三册　（选修 II）

人民教育出版社中学数学室　编著

SHUXUE

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（试验修订本）

数　　学

第三册（选修Ⅱ）

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（试验修订本）

数 学

第二册（选修Ⅱ）

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社 出版发行

（北京沙滩后街55号 邮编：100009）

网址：http://www.pep.com.cn

山东新华印刷厂德州厂印装 全国新华书店经销

*

开本：890毫米×1 194毫米 1/16 印张：15.25 字数：237 000

2001年12月第2版 2002年6月第1次印刷

印数：00 001～40 000

ISBN 7-107-15553-9 / G·8643（课） 定价：13.90元

说明

《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》（以下简称《数学》）是根据教育部2000年颁布的《全日制普通高级中学课程计划（试验修订稿）》和《全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订版）》的规定，遵照1999年全国教育工作会议的精神，在两省一市进行试验的《全日制普通高级中学教科书（试验本）·数学》的基础上进行修订的．此次修订的指导思想是：遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的战略思想，贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务，必须与生产劳动相结合，培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针，以全面推进素质教育为宗旨，全面提高普通高中教育质量．

普通高中教育，是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育．高中教材的编写，旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力，促进学生的全面发展，为高一级学校和社会输送素质良好的合格毕业生．

《数学》包括三册，其中第一册、第二册是必修课本，分别在高一、高二学习，每周4课时；第三册是选修课本，在高三学习，它又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ两种，每周分别为2课时和4课时，供高中三年级全学年使用．本书是《数学》第三册（选修Ⅱ），内容包括概率与统计、极限、导数与微分、积分、复数五章．

全套书在体例上有下列特点：

1. 每章均配有章头图和引言，作为全章内容的导人，使学生初步了解学习这一章的必要性．

2. 书中习题共分三类：练习、习题、复习参考题．

练习　以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用．

习题　每小节后一般配有习题，供课内、外作业选用，少数标有＊号的题在难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用．

复习参考题　每章最后配有复习参考题，分A、B两组，A组题是属于基本要求范围的，供复习全章使用；B组题带有一定的灵活性，难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用．

3. 每章在内容后面均安排有小结与复习，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分，供复习全章时参考．

4. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识．

本套书由人民教育出版社中学数学室编写．其中《数学》第三册（限选·理科）原试验本的编写工作由薛彬主持，参加编写工作的有俞求是、饶汉昌、田载今、李海东、袁明德、方明一、张劲松、颜其鹏、蔡上鹤等．责任编辑为袁明德、张劲松，审稿为蔡上鹤．

《数学》第三册（限选·理科）原试验本在编写过程中蒙孔令颐、蒋佩锦、储瑞年、戴佳珉、李果民、王华等同志提出宝贵意见，在此表示衷心感谢．

参加本次修订的有俞求是、饶汉昌、田载今、李海东、袁明德、方明一、张劲松、颜其鹏、蔡上鹤等，责任编辑为张劲松，审稿为蔡上鹤．

人民教育出版社中学数学室

2001年12月

目 录

第三章　导数与微分

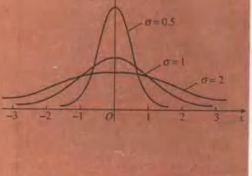
第四章　积分

第五章　复数

本书部分常用符号

μ	总体平均数
x	样本平均数
σ^2	总体方差
σ	总体标准差
$N(\mu,\ \sigma^2)$	呈正态分布的总体
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	当 n 趋向于无穷大时，数列$\{a_n\}$ 的极限
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	当 x 趋向于无穷大时，函数 $f(x)$的极限
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	当 x 趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$的极限
Δx	自变量 x 的增量
Δy	函数 y 的增量
$f'(x_0)$	函数 $f(x)$在 x_0 处的导数
$y' \mid x=x_0$	函数 y 在 x_0 处的导数
$f'(x)$	函数 $f(x)$的导函数
y'	函数 y 的导函数
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	函数 $y=f(x)$的微分
$\int f(x)\mathrm{d}x$	函数 $f(x)$的不定积分
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	函数 $f(x)$由 a 至 b 的定积分
i	虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$
$\mathbf{C}$	复数集
z，$a+b\mathrm{i}$	复数 z，实部为 a，虚部为 b 的复数
$\bar{z}$	复数 z 的共轭复数
$\lvert z \rvert$，$\lvert a+b\mathrm{i} \rvert$	复数 z 的模，$a+b\mathrm{i}$ 的模
$\arg z$	复数 z 的辐角主值

第一章 概率与统计



我们来看下面的两个问题.

某商场要根据天气预报来决定节日是在商场内还是在商场外开展促销活动. 统计资料表明，每年国庆节商场内的促销活动可获得经济效益 2 万元；商场外的促销活动如果不遇到有雨天气可获得经济效益 10 万元，如果促销活动中遇到有雨天气则带来经济损失 4 万元. 9 月 30 日气象台预报国庆节当地有雨的概率是 40%，商场应该选择哪种促销方式?

在当今社会中，抽样调查已成为社会研究的常用方法. 例如，有关部门要通过了解某地区小学入学新生的体重、身高情况来分析这些学生的身体发育状况，需要从这些学生中抽取部分学生，对他们的体重、身高的数据进行统计处理. 怎样抽取一部分学生才能较好地反映全体学生的情况? 怎样估计学生身体发育状况的平均水平? 怎样估计学生身体发育的总体分布状况?

以上问题涉及将要在本章学习的随机变量和统计的知识. 本章将在初中“统计初步”和高中必修课“概率”的基础上，学习随机变量和统计的一些知识，其中重点研究离散型随机变量的分布列、期望与方差，抽样方法，总体分布的估计，正态分布和线性回归.

一　随机变量

1.1　离散型随机变量的分布列

1. 随机变量

先看下面的问题.

某人射击一次，可能出现命中 0 环，命中 1 环，…，命中 10 环等结果，即可能出现的结果可以由 0，1，…，10 这 11 个数表示.

某次产品检验，在可能含有次品的 100 件产品中任意抽取 4 件，那么其中含有的次品可能是 0 件，1 件，2 件，3 件，4 件，即可能出现的结果可以由 0，1，2，3，4 这 5 个数表示.

在上面射击的随机试验中，可能出现的结果都可以用一个数即“环数”来表示，这个数在随机试验前是无法预先确定的，在不同的随机试验中，结果可能有变化，就是说，这种随机试验的结果可以用一个变量来表示. 在产品检验的随机试验中，结果也可以用“次品数”这个变量来表示.

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做**随机变量**. 随机变量常用希腊字母 ξ、η ❶等表示.

❶ ξ的国际音标为[ksi:]，η的国际音标为['eitə]

例如，上面射击的命中环数 ξ 是一个随机变量：

$\xi=0$，表示命中 0 环；

$\xi=1$，表示命中 1 环；

……

$\xi=10$，表示命中 10 环.

上面产品检验所取 4 件产品中含有的次品数 η 也是一个随机变量：

$\eta=0$，表示含有 0 个次品；

$\eta=1$，表示含有 1 个次品；

$\eta=2$，表示含有 2 个次品；

$\eta=3$，表示含有 3 个次品；

$\eta=4$，表示含有 4 个次品.

在上面的射击、产品检验等例子中，对于随机变量可能取的值，我们可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做**离散型随机变量**.

有的随机变量，它可以取某一区间内的一切值，看下面的例子.

某一自动装置无故障运转的时间 ξ 是一个随机变量，它可以取区间 $(0, +\infty)$ 内的一切值.

某林场树木最高达 30 m，则此林场树木的高度 η 是一个随机变量，它可以取 $(0, 30]$ 内的一切值.

在上面的无故障运转时间、树木高度等例子中，随机变量可以取某一区间内的一切值，这样的随机变量叫做**连续型随机变量**.

再看下面的例子.

任意掷一枚硬币，可能出现正面向上、反面向上这两种结果，虽然这个随机试验的结果不具有数量性质，但仍可以用数量来表示它. 我们用变量 ξ 来表示这个随机试验的结果：

$\xi=0$，表示正面向上；

$\xi=1$，表示反面向上.

此外，若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi-b$，其中 a、b 是常数，则 η 也是随机变量.

例如，某城市出租汽车的起步价为 10 元，行驶路程不超出 4 km时租车费为 10 元，若行驶路程超出 4 km，则按每超出 1 km 收费 2 元计费（超出不足1 km的部分按 1 km 计）. 从这个城市的民航机场到某宾馆的路程为 15 km. 某司机常驾车在机场与此宾馆之间接送旅客，由于行车路线的不同以及中途停车时间要转换成行车路程（这个城市规定，每停车 5 分时间按 1 km 路程计费），这个司机一次接送旅客的实际行车路程 ξ 是一个随机变量. 设他所收租车费为 η，则

$$\begin{aligned}\eta &= 2(\xi-4)+10 \\ &= 2\xi+2.\end{aligned}$$

显然，η 也是随机变量.

练　习

1. 写出下列各随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果：

   (1) 从 10 张已编号的卡片（从 1 号到 10 号）中任取 1 张，被取出的卡片的号数 ξ；

(2) 一个袋中装有5个白球和5个黑球，从中任取3个，其中所含白球的个数ξ；

(3) 抛掷两个骰子，所得点数之和ξ；

(4) 接连不断地射击，首次命中目标需要的射击次数η；

(5) 某厂加工的某种钢管的外径与规定的外径尺寸之差η.

2. 举出一些随机变量的例子，并指出是离散型随机变量，还是连续型随机变量.

2. 离散型随机变量的分布列

抛掷一个骰子，设得到的点数为ξ，则ξ可能取的值有

$$1，2，3，4，5，6.$$

虽然在抛掷骰子之前，我们不能确定随机变量ξ会取哪一个值，但是却知道ξ取各值的概率都等于$\frac{1}{6}$（见下表）.

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

表中指出了随机变量ξ可能取的值，以及ξ取这些值的概率.此表从概率的角度指出了随机变量在随机试验中取值的分布状况，称为随机变量ξ的概率分布.

一般地，设离散型随机变量ξ可能取的值为

$$x_1，x_2，\cdots，x_i，\cdots，$$

ξ取每一个值$x_i(i=1，2，\cdots)$的概率$P(\xi=x_i)=p_i$，则称表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

为随机变量ξ的**概率分布**，简称为ξ的**分布列**.

由概率的性质可知，任一离散型随机变量的分布列都具有下面两个性质：

(1) $p_i\geqslant 0$，$i=1，2，\cdots$；

(2) $p_1+p_2+\cdots=1$.

例　某一射手射击所得环数ξ的分布列如下：

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

求此射手“射击一次命中环数$\geqslant 7$”的概率.

分析：“射击一次命中环数$\geqslant 7$”是指互斥事件“$\xi=7$”“$\xi=8$”“$\xi=9$”“$\xi=10$”的和，根据互斥事件的概率加法公式，可以求得此射手“射击一次命中环数$\geqslant 7$”的概率.

解：根据射手射击所得环数ξ的分布列，有

$$P(\xi=7)=0.09,$$
$$P(\xi=8)=0.28,$$
$$P(\xi=9)=0.29,$$
$$P(\xi=10)=0.22.$$

所求的概率为

$$\begin{aligned}P(\xi\geqslant 7)&=0.09+0.28+0.29+0.22\\&=0.88.\end{aligned}$$

一般地，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

在一次随机试验中，某事件可能发生也可能不发生，在n次独立重复试验中这个事件发生的次数ξ是一个随机变量. 我们知道，如果在一次试验中某事件发生的概率是p，那么在n次独立重复试验中这个事件恰好发生k次的概率是

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

其中$k=0$，1，…，n，$q=1-p$. 于是得到随机变量ξ的概率分布如下：

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

由于$C_n^kp^kq^{n-k}$恰好是二项展开式

$$(q+p)^n=C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}+\cdots+C_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+C_n^np^nq^0$$

中的第$k+1$项（这里k可取0，1，…，n）中的各个值，所以，称这样的随机变量ξ服从**二项分布**，记作$\xi\sim B(n,p)$，其中n，p为参数，并记

$$C_n^kp^kq^{n-k}=b(k;n,p).$$

例如，抛掷一个骰子，得到任一确定点数（比如2点）的概率是$\frac{1}{6}$. 重复抛掷骰子n次，得到此确定点数的次数ξ服从二项分布，

$\xi\sim B\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$.

又如，重复抛掷一枚硬币 n 次，得到正面向上的次数 ξ 服从二项分布，$\xi\sim B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$.

二项分布是一种常见的离散型随机变量的分布.

练　习

1. 篮球运动员在比赛中每次罚球命中得 1 分，罚不中得0 分. 已知某运动员罚球命中的概率为 0.7，求他罚球 1 次的得分的分布列.
2. 袋中共有 50 个大小相同的球，其中记上 0 号的 5 个，记上 n 号的有 n 个($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$). 现从袋中任取一球，求所取球的号数的分布列以及取出的球的号数是偶数的概率.
3. 举出一些服从二项分布的随机变量的例子.
4. 抛掷 5 枚硬币，求出得到正面向上的次数 ξ 的分布列.

习　题　1.1

1. 写出下列随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果：
   (1) 袋中有大小相同的红球 10 个，白球 5 个. 从袋中每次任意取出 1 个球，直到取出的球是白球为止所需要的取球次数；
   (2) 袋中有大小完全相同的红球 10 个，白球 5 个. 从袋中每次任意取出一个球，若取出一个白球则结束，若取出一个红球则放回袋中继续从袋中任意取出一球，直到取出的球是白球为止所需要的取球次数 ξ；
   (3) 从标有 1，2，3，4，5，6 的 6 张卡片中任取 2 张，所取卡片上的数之和；
   (4) 某人每天早晨在某公共汽车站等某一路车的时间.
2. 从编号为 1，2，…，20 的 20 个大小完全相同的球中任取一个球，求所取球的号数的分布列.
3. 某射手射击击中目标的概率为 0.9，求从开始射击到击中目标所需要的射击次数 ξ 的概率分布.
4. 连续抛掷两个骰子，求所得的两个骰子的点数之和的概率分布.

5. 已知随机变量 ξ 所有可能取的值是 1，2，…，n，且取这些值的概率依次是 k，$2k$，…，nk，求常数 k 的值.

6. 某批数量较大的商品的次品率为 10%，从中任意地连续取出 5 件，求其中次品数 ξ 的分布列.

*7. 如果 $\xi \sim B\left(20,\ \frac{1}{3}\right)$，求使 $P(\xi=k)$ 取最大值的 k 的值. 一般地，如果 $\xi \sim B(n,\ p)$，其中 $0<p<1$，讨论当 k 由 0 增加到 n 时，$P(\xi=k)$ 的变化情况. k 取什么值时，$P(\xi=k)$ 取最大值?

1.2 离散型随机变量的期望与方差

对于离散型随机变量，确定了它的分布列，就掌握了随机变量取值的统计规律. 在实际问题中，我们还常常希望通过数字来反映随机变量的某个方面的特征，最常用的有期望与方差.

1. 期望

某射手射击所得环数 ξ 的分布列如下：

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

在 n 次射击之前，虽然不能确定各次射击所得的环数，但可以根据已知的分布列估计 n 次射击的平均环数.

根据这个射手射击所得环数 ξ 的分布列，在 n 次射击中，预计有大约

$$P(\xi=4)\times n=0.02n \quad \text{次得 4 环，}$$
$$P(\xi=5)\times n=0.04n \quad \text{次得 5 环，}$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(\xi=10)\times n=0.22n \quad \text{次得 10 环.}$$

n 次射击的总环数约等于

$$4\times0.02\times n+5\times0.04\times n+\cdots+10\times0.22\times n$$
$$=(4\times0.02+5\times0.04+\cdots+10\times0.22)\times n,$$

从而，n 次射击的平均环数约等于

$$4\times0.02+5\times0.04+\cdots+10\times0.22=8.32.$$

类似地，对任一射手，若已知其射击所得环数 ξ 的分布列，即已知各个 $P(\xi=i)(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$，则可预计他任意 n 次射击的平均环数是

$$E\xi=0\times P(\xi=0)+1\times P(\xi=1)+\cdots+10\times P(\xi=10).$$

我们称 $E\xi$ 为此射手射击所得环数 ξ 的期望，它刻划了随机变量 ξ 所取的平均值，从一个方面反映了射手的射击水平.

一般地，若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

则称

$$E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$$

为 ξ 的**数学期望**或平均数、均值，数学期望又简称为**期望**. 它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

若 $\eta=a\xi+b$，其中 a，b 为常数，则 η 也是随机变量. 因为

$$P(\eta=ax_i+b)=P(\xi=x_i)，i=1，2，3，\cdots$$

所以，η 的分布列为

η	ax_1+b	ax_2+b	…	ax_n+b	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

于是

$$\begin{aligned}E\eta&=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\cdots+(ax_n+b)p_n+\cdots\\&=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots)\\&\quad+b(p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots)\\&=aE\xi+b,\end{aligned}$$

即

$$\boxed{E(a\xi+b)=aE\xi+b.}$$

例 1 篮球运动员在比赛中每次罚球命中得 1 分，罚不中得 0 分. 已知某运动员罚球命中的概率为 0.7，求他罚球 1 次的得分 ξ 的期望.

解：因为 $P(\xi=1)=0.7$，$P(\xi=0)=0.3$，所以

$$\begin{aligned}E\xi&=1\times P(\xi=1)+0\times P(\xi=0)\\&=1\times 0.7+0\times 0.3\\&=0.7.\end{aligned}$$

例 2 随机抛掷一个骰子，求所得骰子的点数 ξ 的期望.

解：抛掷骰子所得点数 ξ 的概率分布为