一元微积分基础训练和练习

周世武　刘贵和　编著

四川大学出版社

内容提要

本书紧扣工科院校现行高等数学教材，为提高学生作业质量而编写．是作业改革的一种尝试．

全书共分七章，每章的每一节，有目的、要求及内容提要．有两种类型的练习题：一种是供学生独立完成的基本练习题；一种是给出了解题的一般方法和步骤，以及解题思路的填空题与按解题步骤选择正确答案的选择题．

本书注重基本知识和基本运算技能的培养和训练，可供某些工科院校、电大、职大、中专学生以及自学高等数学者作为一元微积分部分的基本训练和练习用书．

一元微积分基础训练和练习

周世武　刘贵和　编著

责任编辑　谭同余

封面设计　蒋仲文

四川大学出版社出版发行

四川省新华书店经销　成都银河印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张13.375　字数285千

1989年 6 月第一版　1989年 6 月第一次印刷

印数1—5000册

ISBN 7-5614-0187-6/O·35　定价：3.70元

序

二千年前，文翁教化惊震京师，汉武下令效行，天下学校乃兴。阅八百年，王维诗云："文翁翻教授，不敢倚先贤。"教育改革已议。

而今世界，科学技术日新月异，教育改革更不容缓。现代教育既须寓独立思维解题能力之增益于传道、授业、解惑，于是，习题之编制集粹，解法之分析诱导，极待熟虑深思，精心从事。

周君世武，积平素教学之经验，许锐意改革之宿愿，编著此书。雄心盛举，义当臂助。

老马识途歧可辨，教师当烟海指津；全牛分理窍先知，解法贵画龙点睛，然则时省而效宏。扣学生实际，登高自卑；不教材是囿，怀远拓新。斯能源远而流长。

编著体裁应是不拘一格。盘根错节、晦涩难明之论，尚需耐心扶将剖析，因势利导；望尘莫及、棘手难策之题，固宜分程接力进行，拾级而登。

本书将一题分(1)、(2)、……等层，各层列a)、b)、……等条。编成客观性选择题，用凭逐层取道，迭上层楼。甚善！不仅层次分明、步步为营，复盖面大、工作量轻；且因所列各条，有初易蹈之歧途，有浅尝即止之残局，从而得知：何往不利，以免徒劳面壁，何者未竟、而知待毕其功。凡此若皆教学实践中来，则批阅即获教学之信息反馈，俾改革有据。

习题集之杰作不逊于名著问世．善成其事确乎难能可贵．寄望关注此举者，集思广益，协力为之，荟成佳作．

鉴于扬传统之长，唱撮新之局，乃副现代教育之真谛．何妨写成《数学分析现代习题集》？！愿勉，乐观厥成．

叶乃膺

1987年7月15日于成都

前　　言

多年的数学教学实践，我们对教学中的种种弊病深有感触．长期来，学生忙于做作业，教师忙于批阅作业，似乎成了数学教学的常规．相当数量的学生听完课后，没有认真搞清书上的内容就做作业，因而，作业中错误甚多，没有达到练习的目的，影响了学习质量；教师忙于批改作业，被批改作业困扰，无暇顾及教学内容和教学方法的研究，影响了教学质量．为了提高学生作业质量，减轻教师批改作业的负担，让教师有更多的时间从事教学内容和教学方法的研究，笔者取其程序的实质，在这方面作了些改进，即作业改革的尝试．两年前，我们写了《一元微积分练习》的初稿，征求成都地区和省内部分数学教师的意见后，对全稿的结构和内容进行了较大的修改，写成试用稿，在几所学校试用．根据试用教师意见，我们又易稿，最后写成《一元微积分基础训练和练习》一书．

本书欲达以下几个目的：一、帮助学生复习功课，掌握要点；二、正确理解基本概念，熟悉基本公式，学会解题方法；三、作学生练习用书；四、通过一题多解，开拓学生视野．

全书共七章，每节都有明确的目的，具体的要求和简明的内容提要．每节的练习题分为两类：一类是要学生给出解题全过程的基本练习题；一类是选择与填空练习题．

选择练习题，有只按最后结果选择或按解题步骤选择两类。前者，供选择的答案中，只有一个是正确的；后者，有的，每个步骤中供选择的答案只有一个是正确的；有的，每个步骤中供选择的答案却有多个是正确的，这是因为解题方法不同所至。对于同一题，如果解法不止一种，对每一种解法，都应按解题步骤，用同一记号如："√"、"——"等等选择出正确的答案。

学生在做练习时，最好先做选择与填空练习题，然后再做基本练习题。因为选择与填空练习题中给出了解题的一般方法和步骤，以及解题思路。同时，还指出了初学者在解题中易发生错误的地方。这样做有利于学生对所学知识的正确理解和掌握，有利于学生独立完成作业，提高学生的作业质量。

在作选择与填空题时，不能凭空臆断，必须亲自做一遍，才能获得正确的答案。

此外，对于练习题，教师可根据所选用的教材，适当选择，酌量布置。一、二、四章末还各附有1—2篇教学心得，供学生复习本章内容时参考。

本书由周世武同志主编，其中五、六、七章由刘贵和同志编著，任崇善同志参加了本书的部分工作。四川省数学会副理事长叶乃膺教授审阅了初稿，提出了不少宝贵意见，并为之写了序言。韩梅生同志仔细审阅了全稿，提出了不少改进意见。廖远芳同志校阅了部分答案。胥开封、黎介忠、蒲廷炳、文多成等同志，以及使用过此书的学生们对试用稿提出了不少建议。四川大学出版社对本书的出版给予了很大的帮助与支持。在此，我们谨向支持、鼓励和帮助过我们的同

志致谢。

本书可作为某些大专院校、职大、电大、中专师生的教学参考书和练习用书。由于时间仓促，水平有限，不当之处请老师们和同学们批评指正。

周世武　刘贵和

一九八八年二月十五日于成都

目　录

第一章　极限与连续

极限是高等数学最基本的概念之一，它是微积分的重要基础．连续也是微积分的重要概念之一．通过本章各节习题练习，掌握极限概念和极限运算，函数连续性的概念和闭区间上连续函数的性质．

§1　初等函数

一、目的、要求和内容提要

通过本节习题的练习，掌握函数的定义域、复合函数、分段函数、反函数、初等函数的概念，以及函数基本性质．

值得注意的是，分段函数一般不是初等函数．由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称作初等函数，否则便不是初等函数．

二、基本练习题

（一）　设函数$f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 2^x, & x\geq 0.\end{cases}$ 求$f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，$f(1)\cdot f(-2)$．

（二）求下列函数的定义域：

1．　$y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg(1-x)}$．　　　　2．　$y=\dfrac{x}{1-\log_3 x}$．

3. $y=\ln\sin x$　　4. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<-1, \\ x+1, & -1<x<1, \\ x^2-1, & x\geqslant 1. \end{cases}$

（三） 下列函数相同吗？为什么？

1. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $\varphi(x)=1$.

2. $f(x)=x+2$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}+2$.

（四） 求下列函数的反函数：

1. $y=a^{2x-1}$ $(a>0, a\neq 1)$. 2. $y=1+\lg(x+3)$.

（五） 按照复合过程，将下列各复合函数拆成简单函数的形式：

1. $y=\arccos\lg\sqrt{x^2-1}$. 2. $y=2^{\sin^2(1/x)}$.

（六） 设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=2^x$. 求

1. $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f(\frac{1}{x})$, $\dfrac{1}{f(x)}$, $f(0)\varphi(0)$.

2. $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$, $\varphi(\psi(x))$, $\psi(\varphi(x))$, $\psi(\psi(x))$, $f(\varphi(\psi(x)))$.

三、选择、填空练习题

（一） 求下列函数的定义域（按步骤在括号内填入相应的内容）：

1. $y=\sqrt{2-|x|}$.

(1) 要使y有定义，只须（　　）. a) $2-|x|\geqslant 0$; b) $2-|x|>0$; c) $2-x\geqslant 0$.

(2) y的定义域为（ ）. a) $(-\infty, +\infty)$; b) $[-2, 2]$; c) $(-2, 2)$; d) $(-\infty, 2]$; e) $[2, +\infty)$.

2. $y=\sqrt{2+x}+2[\lg(1+x)]^{-1}$.

(1) 要使y有定义，只须（ ）. a) $2+x>0$, $1+x\geqslant 0$; b) $2+x\geqslant 0$, $1+x\geqslant 0$; c) $2+x\geqslant 0$, $1+x>0$; d) $2+x\geqslant 0$, $1+x>0$, $\lg(1+x)\neq 0$.

(2) y的定义域是（ ）. a) $(2, +\infty)$; b) $[2, +\infty)$; c) $[-1, +\infty)$; d) $(-1, +\infty)$; e) $(-1, 2]$; f) $(-1, 0)\cup(0, +\infty)$; g) $[-1, 0)\cup(0, +\infty)$.

3. $y=\dfrac{2x}{\operatorname{tg}x}$.

(1) 要使y 有定义，只须（ ）. a) $\operatorname{tg} x\neq 0$, b) $\operatorname{tg} x\neq 0, 2x\neq 0$; c) $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}x\neq 0$; d) $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $x\neq 0$. （k为整数）

(2) y的定义域是（ ）. a) $x\neq k\pi$; b) $x\neq k\pi$, $x\neq 0$; c) $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $x\neq 0$; d) $x\neq k\pi$, $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$; e) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\pi\right)\cup\left(k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{2x}}{x^2+x+1}$.

(1) 要使y有定义只须（ ）. a) $x^2+x+1>0$, $\sqrt{2x}\geqslant 0$, b) $x^2+x+1\neq 0, \sqrt{2x}>0$; c) x^2+x+1

>0， $0\leqslant 2x\leqslant 1$.

（2） y的定义域是（　　）. a） $[0,+\infty)$；b）$(0,+\infty)$； c）$[0,\frac{1}{2}]$.

（二） 下列各题中，所给的两个函数是否恒等？为什么？（注：你认为对就在“　　”打上记号“√”；否则打上记号“×”，并说明其理由）.

1． $f(x)=x$和$g(x)=\sqrt{x^2}$.

（1） 由于a） 定义域相同______；b） 对应法则相同______；c） 定义域和对应法则都相同______.

（2） 因此；a） $f(x)$和$g(x)$恒等______；b） $f(x)$和$g(x)$不恒等______.

2． $\varphi(x)=\arcsin x$与$\psi(x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$.

（1） 由于a） 定义域相同______，b） 对应法则相同______，c） 定义域和对应法则都相同______.

（2） 因此，a） $f(x)$和$g(x)$恒等______，b） $f(x)$与$g(x)$不恒等______.

（三） 求下列函数的反函数：

1． $y=2^{x+3}$：

（1） y的定义域是（　　）. a） $(-3,+\infty)$； b）$[-3,+\infty)$； c） $(0,+\infty)$； d） $(-\infty,+\infty)$.

（2） y的值域是（　　）. a） $(-\infty,+\infty)$；b）$[0,+\infty)$； c）$(0,+\infty)$.

（3） 在定义域内（　　）. a） y单增；b） y单减.

（4） y的反函数（　　）. a） 存在；b)不存在.

(5) 其反函数是（　　）. a) $y=\log_2 x+3$;
b) $y=-3\log_2 x$; c) $y=\log_2 x-3$.

2. $y=\dfrac{3+x}{2-x}$.

(1) y的定义域是（　　）: a) $(-\infty, +\infty)$; b) $(2, +\infty)$; c) $(-\infty, 2)$; d) $(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$.

(2) y的值域是（　　）. a) $(0, +\infty)$;
b) $(-\infty, +\infty)$; c) $(-2, +\infty)$;
d) $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$.

(3) 在定义域内（　　）. a) y单增; b) y单减.

(4) y的反函数（　　）. a)存在; b) 不存在.

(5) 其反函数是（　　）. a) $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$;
b) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$; c) $y=2-\dfrac{5}{x+1}$.

(四) 指出下列复合函数的复合过程（注：若你认为(*)是对的，就在(*)的前面打上"√"）:

1. $y=\sqrt{\sin(x^2+1)}$,

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin(x^2+1)$;

(2) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=x^2+1$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=w+1$, $w=x^2$.

2. $y=(\mathrm{arc\,tg}\dfrac{x+1}{3})^2$.

(1) $y=\mathrm{arctg}\,u$, $u=v^2$, $v=\dfrac{x+1}{3}$;

(2) $y=u^2, u=\mathrm{arctg}\dfrac{x+1}{3}$;

(3) $y=u^2$, $u=\operatorname{arc\,tg} v$, $v=\frac{x+1}{3}$

3. $y=\ln\sqrt{\sin^2x+1}$.

(1) $y=\ln u$, $u=\sqrt{\sin^2x+1}$;

(2) $y=\frac{1}{2}\ln u$, $u=\sin^2x+1$;

(3) $y=\ln u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\sin^2x+1$;

(4) $y=\ln u$, $u=\sqrt{v}$, $v=w+1$, $w=s^2$, $s=\sin x$.

(五) 设f(x)是奇函数，g(x)是偶函数，判断下列函数的奇偶性，将正确的填在（ ）内：

1. $F(x)=f[g(x)]$.

解：$F(-x)=f[g(-x)]=f[g(x)]$，于是有（ ）.

a) $F(-x)=F(x)$；b) $F(-x)=-F(x)$.

2. $G(x)=g[f(x)]$.

解：$G(-x)=g[f(-x)]=g[-f(x)]$；于是有（ ）.

a) $G(-x)=G(x)$； b) $G(-x)=-G(x)$.

3. $H(x)=f[f(x)]$.

解：$H(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]$，于是有（ ）.

a) $H(-x)=-H(x)$；b) $H(-x)=H(x)$.

(六) 证明$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数（学生自证）.

§2 数列的极限

一、目的、要求和内容提要

（一） 极限是高等数学最基本的概念，它是高等数学的理论基础．本节重点是数列极限的概念和计算方法．通过练习，掌握用“ε—N”语言验证简单数列的极限的方法，以及数列极限的计算方法．关于前者，请参看附在本章末的《关于用极限（无穷大）的定义证明函数的极限（无穷大）的教学体会》一文．

（二） 基本内容

1．数列极限的定义：

设$\{x_n\}$为一个数列，如果对于任给的$\varepsilon>0$，总存在一个自然数N，当$n>N$时，就有$|x_n-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数A为数列$\{x_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\quad 或x_n\to A\ (n\to\infty).$$

2．数列极限的四则运算法则：

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n=A\pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n=A\cdot B;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n/\lim_{n\to\infty}y_n=A/B,\quad (B\neq 0)$$

二、基本练习题