高等学校教材

# 线性代数与解析几何学习指导

Linear Algebra And Analytic Geometry Learner's Guide

邱中华　王雪红　张春跃　编



人民邮电出版社
POSTS & TELECOMMUNICATIONS PRESS

高等学校教材

# 线性代数与解析几何学习指导

邱中华　王雪红　张春跃　编

人民邮电出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与解析几何学习指导/邱中华,王雪红,张春跃编.
—北京:人民邮电出版社,2002.9
高等学校教材
ISBN 7-115-10562-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①邱…②王…③张… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材
②解析几何—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第061489号

## 内容提要

本书以讲述基本概念和题目分析、说明的形式,对每一章中的重点、难点与解题方法进行了阐述.全书共分七章,内容包括行列式、矩阵、几何空间中的向量、$n$维向量及线性方程组、向量空间、矩阵的特征与特征向量,以及二次型与二次曲面.

本书为《线性代数与解析几何》的配套教材,可供工科类大学一年级学生使用.

高等学校教材
**线性代数与解析几何学习指导**

◆ 编　　　邱中华　王雪红　张春跃
策划编辑　滑　玉
责任编辑　须春美

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
读者热线　010-67180876
北京汉魂图文设计有限公司制作
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本:787×1092　1/16
印张:10
字数:239千字　　2002年9月第1版
印数:1-6 000册　　2002年9月北京第1次印刷

ISBN 7-115-10562-6/TP·3042

定价:14.00元

**本书如有印装质量问题,请与本社联系 电话:(010)67129223**

# 编者的话

本书是依据工科类《大学数学》教学基本要求和教育部《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，并结合我们多年来的教学经验编写的. 全书共分 7 章，内容包括行列式、矩阵、几何空间的向量、$n$ 维向量及线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量，以及二次型与二次曲面. 每一章均安排有教学基本要求，基本概念与主要内容，重点、难点与方法，概念题分析，典型例题分析五个部分. 通过对基本概念和主要内容的总结归纳，对重点、难点和基本方法的讲述，以及对 100 道概念题和 130 余道典型例题的分析，帮助大学一年级学生学习和掌握线性代数与解析几何的基本概念、基本理论和基本方法，提高分析问题能力和解题能力. 本书在南京邮电学院《线性代数与解析几何》课程中使用，部分内容曾在 1999、2000、2001、2002 年硕士研究生入学考试数学辅导班上讲授.

本书由邱中华主编，第一、三章由王雪红编写；第二、四章由张春跃编写；第四章部分内容及第五、六、七章由邱中华编写，在编写过程中南京邮电学院代数与几何教学组的全体教师给予大力支持和帮助，并在使用过程中提出许多建设性的意见，在此表示衷心的感谢.

**编　者**

**2002 年 6 月**

KAf 18/9

# 目　录

# 第一章 行列式

## 一、教学基本要求

1．理解行列式的定义，并会用定义计算简单的行列式．

2．掌握行列式的性质，并会利用这些性质计算行列式．

3．掌握余子式和代数余子式的概念及行列式按一行(列)展开定理，会利用展开定理计算行列式．

4．掌握克莱姆(Cramer)法则及齐次线性方程组有非零解的条件，会用克莱姆法则解线性方程组．

## 二、基本概念与主要内容

1．$n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 阶排列求和．

2．行列式的性质

(1) 行列互换，行列式的值不变．

(2) 交换行列式的两行(列)，行列式改变符号．

(3) 行列式中某行(列)有公因子，可以提到行列式符号外面来，即用一个数乘以行列式的某一行(列)等于用这个数乘该行列式．

(4) 若行列式中有两行(列)完全相同，或有一行(列)的元素为零，或有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零．

(5) 若行列式中某一行(列)是两组数的和,则这个行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组数作为该行(列),而其余各行(列)与原行列式对应各行(列)相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 把行列式的某一行(列)的元素同乘一个数后加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

3. 余子式与代数余子式

$n$ 阶行列式划去第 $i$ 行和第 $j$ 列,即划去元素 $a_{ij}$ 所在的行和列的所有元素,其余元素按原来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式记为 $M_{ij}$, $M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的余子式,称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式.

4. 行列式展开定理

(1) $n$ 阶行列式等于它的任一行(列)的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和.

(2) $n$ 阶行列式中某一行(列)的每个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \text{或} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

5. 克莱姆(Cramer)法则

(1) 非齐次线性方程组

如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有惟一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j$ 为 $D$ 中的第 $j$ 列元素用线性方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换而得到的行列式($j=1,2,\cdots,n$).

(2) 齐次线性方程组

齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

有非零解的充要条件是其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

# 三、重点、难点与方法

本章的重点是行列式的计算,在理解和掌握行列式定义和性质以及行列式展开定理的基础上,把握行列式的特点,灵活地选用计算方法是学好这一章的关键.

1. 四类基本形行列式

(1) $$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\boldsymbol{O}\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\ *&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&*\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\\boldsymbol{O}&&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&\\&\begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix}&&\\a_{n-1,2}&&&*\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}*&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&\\&\begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix}&&\\a_{n-1,2}&&&\boldsymbol{O}\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}$$

(3) $$\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1r} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{r1}\cdots a_{rr} \end{matrix} & O \\ * & \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1s} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{s1}\cdots b_{ss} \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1r} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{r1}\cdots a_{rr} \end{matrix} & * \\ O & \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1s} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{s1}\cdots b_{ss} \end{matrix} \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} O & \begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1r} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{r1}\cdots a_{rr} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1s} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{s1}\cdots b_{ss} \end{matrix} & * \end{vmatrix} = (-1)^{rs} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1r} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{r1}\cdots a_{rr} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1s} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{s1}\cdots b_{ss} \end{matrix} & O \end{vmatrix}$$

2. 行列式计算的基本思路

(1) 利用行列式的性质将行列式化为上述四类基本形,用基本形的结果求得;

(2) 利用行列式的展开定理,将高阶行列式逐次降阶,得到递推式,由二、三阶行列式的结果递推出高阶行列式;

(3) 先用行列式的性质将行列式的某一行(列)化为有尽可能多的零,再用行列式的展开定理,按这一行(列)展开,逐次降阶求得;

(4) 利用已知行列式(如范得蒙行列式)的结果进行计算.

# 四、概念题分析

1. 在五阶行列式中项 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$应带符号为________.

**分析** 将这一项五个元素按行下标自然顺序排列,即 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$,则所带符号由列下标的排列的逆序数的奇偶性决定,因为 $\tau(41235)=3$ 为奇数,应填负号.

2. 行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} =$________.

**分析** 由于行列式中不为零的元素只有 $1,2,\cdots,n-1,n$,则由行列式的定义得 $D_n=(-1)^{\tau(n-1\,n-2\cdots 21n)}n! = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

3. $n$ 阶行列式 $D_n$ 中等于零的元素个数多于 $n^2-n$，则 $D_n=$ ________.

**分析**　$n$ 阶行列式每一项都是取自不同行、列的 $n$ 个元素的乘积，而 $n$ 阶行列式共有 $n^2$ 个元素，则当零的个数多于 $n^2-n$ 时，非零元素的个数少于 $n^2-(n^2-n)=n$，所以行列式 $D_n$ 的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中都有零，因此，$D_n=0$.

4. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=M\neq 0$，则 $D_1=\begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11}-a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21}-a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31}-a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}=$ ________.

**分析**　$D_1=\begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31} & -a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$

$$=0+3\times(-1)\times(-1)\cdot M=3M$$

5. 四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=$ ________.

**分析**　按第一行展开，有

$$D=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)\cdot(a_2a_3-b_2b_3)$$

6. $\begin{vmatrix} 2x & -x & 1 & 3 \\ 2 & 3x & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ 中 $x^3$ 的系数为________.

**分析**　这一行列式是关于 $x^4$ 的多项式，四个对角线上的元素均含 $x$，除此只有 $a_{12}$ 中含 $x$，故按第一行展开，只有 $a_{12}$ 乘它的代数余子式这一项会产生 $x^3$，即

$$a_{12}A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-x)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}$$

由此可以看出 $x^3$ 的系数为 $-2$.

7. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$，则第三行各元素代数余子式和 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$ ________；$A_{31}+A_{32}-A_{33}=$ ________.

**分析** $A_{31}+A_{32}+A_{33}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}=a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0$;
而

$$A_{31}+A_{32}-A_{33}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-2$$

8. 已知行列式 $\begin{vmatrix}3&0&4&2\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$,则第四行各元素余子式和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$
________.

**分析** $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&2\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{3+2}\times(-7)\times2\cdot\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=14\times(-1)^{2+3}\times2\cdot\begin{vmatrix}3&4\\-1&-1\end{vmatrix}=-28$$

另解:注意到 $2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}=2\cdot(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44})=0$,
所以 $-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44}=0$,而 $M_{42}=0$,故有 $M_{41}+M_{43}=M_{44}$

于是 $$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=2M_{44}=2\cdot\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-28$$

9. 已知三阶行列式 $|A|=2,|B|=-1$,则六阶行列式 $\begin{vmatrix}0&2A\\-B&AB\end{vmatrix}=$________.

**分析** $\begin{vmatrix}0&2A\\-B&AB\end{vmatrix}=(-1)^{3\times3}|2A|\cdot|-B|=(-1)^{3\times3}\times2^3\times(-1)^3|A|\cdot|B|=-16$

10. 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

只有零解,则 $\lambda$ 应满足的条件是________.

**分析** 由克莱姆法则的推论知,齐次线性方程组只有零解的充要条件是系数行列式不为零,即

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\lambda\neq1$$

## 五、典型例题分析

**例 1** 计算

$$D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

**解** 将 $D_5$ 的第 2,3,4,5 诸列加至第 1 列，并按第 1 列展开，得

$$D_5=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=D_4+(-a)\cdot(-1)^6a^4=D_4-a^5$$

依上，有

$$D_4=D_3+(-a)\cdot(-1)^5a^3=D_3+a^4$$

$$D_3=D_2+(-a)\cdot(-1)^4a^2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}-a^3$$

$$=(1-a)^2+a-a^3=1-a+a^2-a^3$$

所以

$$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$$

**例 2** 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

**解** 法一 利用行列式性质把 $D_4$ 化为上三角行列式

$$D_4\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_3}-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ -1 & 7 & -3 & 4\\ 2 & -9 & 5 & 7\\ 1 & -6 & 4 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1\to r_4]{\substack{r_1+r_2\to r_2\\ r_3-2r_1\to r_3}}-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2\to r_4]{r_3-2r_2\to r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3\to r_4}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=1\times1\times(-3)\times3=-9$$

法二　采用“降阶法”

$$D_4\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\to r_3\\ r_4-r_1\to r_4}]{r_2+r_1\to r_2}\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&2&0&6\\1&1&0&3\\2&-1&0&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&2&6\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2\to c_1}\begin{vmatrix}3&2&6\\3&1&3\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&6\\3&3\end{vmatrix}$$

$$=9\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=9(1-2)=-9$$

**例 3**　计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$

**解**　考察该行列式各行(列)的元素之和是相同的,为 $a+(n-1)b$,可把各列都加到第 1 列上然后提取公因式 $a+(n-1)b$,再消元化简为上三角行列式.

$$D_n\xlongequal{\text{各列都加到第一列}}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b&b\\a+(n-1)b&a&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a+(n-1)b&b&\cdots&b&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&\cdots&b&b\\1&a&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&b&\cdots&b&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行都减去第一行}} \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} [a+(n-1)b]$$

$$= [a(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

**例 4** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

其中 $x_i \neq a_i, i = 1,2,\cdots,n$.

**解** 考察该行列式,同一列中均有$(n-1)$个元素相同,采用行的加减,可以将行列式的许多元素化为零,再进一步化简行列式为上三角行列式而求出结果.

$$D_n \xlongequal{\text{各行都减去第一行}} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_n - a_n) \begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1 - a_1} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列都加到第一列}} \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i) \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_n}\right)$$

**例 5** 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} b_1 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1} b_2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} b_{n+1} & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n+1$.

**解** 考察此行列式每行元素按 $a_i$ 的降幂和 $b_i$ 的升幂排列，若 $a_i=1$ 或 $b_i=1(i=1,2,\cdots,n)$ 则此行列式就变为一个 $n+1$ 阶范得蒙行列式，考虑 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n+1)$ 分别从第一行提取因子 $a_1^n$，从第 2 行提取因子 $a_2^n$，从第 $n+1$ 行提取因子 $a_{n+1}^n$，就可以直接利用范得蒙行列式的结果.

$$D_{n+1}=a_1^n a_2^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$=a_1^n a_2^n\cdots a_{n+1}^n\prod_{1\leq j<i\leq n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$=\prod_{1\leq j<i\leq n+1}(b_i a_j-a_j b_i)$$

**例 6** 计算 $2n$ 阶行列式(行列式的空白处为零)

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\ \ddots\\ a\end{matrix}}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}b\\ \iddots\\ b\end{matrix}}\right\} n\text{ 行}\end{matrix}$$

**解** 按原式的第一列展开得递推关系式

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ & & a\ \ b & & & \\ & & b\ \ a & & & \\ & \iddots & & \ddots & & \\ b & & & & a & 0 \\ 0 & & & & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & & 0\ \ 0 & & \cdots & b \\ a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \vdots \\ & & a\ \ b & & & \vdots \\ & & b\ \ a & & & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & & \vdots \\ b & & & & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a^2D_{2n-2}-b^2D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-2}=(a^2-b^2)^2D_{2n-4}=\cdots\cdots$$

$$=(a^2-b^2)^{n-1}D_2=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n$$