科学版

大学数学习题精解系列

概率统计习题精解

程依明 张新生 周纪芗 编

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

概率统计习题精解

程依明　张新生　周纪芗　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要是通过例题讲解概率论与数理统计课程解题的思想方法与技巧. 主要内容为事件与概率,随机变量及其分布,数字特征,极限定理,抽样分布,参数估计,假设检验以及方差分析和回归分析等. 本书内容精练,编排合理,每一章节包含内容精析、典型例题和习题三部分.

读者对象为大学理工科学生与教师和有关科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计习题精解/程依明,张新生,周纪芗编. —北京:科学出版社,2002

(大学数学习题精解系列)

ISBN 7-03-010613-X

Ⅰ.概… Ⅱ.①程…②张…③周… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048484 号

责任编辑:吕 虹 / 责任校对:宋玲玲

责任印制:安春生 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2002年11月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2002年11月第一次印刷 印张:13 1/2

印数:1—5 000 字数:253 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序　言

本书主要是为数学专业的大学生学习概率论与数理统计课程而编写的参考书，也可以作为其它专业的学生学习该课程的参考书.

概率论与数理统计是一门讲述随机现象的课程，它有一些自己独特的思维方法和计算技巧. 初学这门课的学生做习题时常会犯惑、缺乏思路、难以下手. 这些都反映了学生尚不习惯概率论与数理统计独有的思维方式. 这时就可以通过多听、多看、多讨论来熟悉它特有的解题方法和技巧. 本书就想从这方面做一些努力，帮助学生尽快掌握此门课程的思维方法和计算技巧.

本书共分八章，每章包含了内容精析、典型例题和习题三部分. 在内容精析部分尽量概括了有关章节应该掌握的基本概念，在典型例题部分尽量概括了有关章节例题的主要类型与典型的解法，在习题部分包括了一些基本题和提高题.

科学出版社为本书的出版做了大量工作，在此表示感谢.

程依明编写了一、二、五章，张新生编写了三、四章，周纪芗编写了六、七、八章. 由于编者水平有限，错误与不到之处敬请提出宝贵意见.

程依明、张新生、周纪芗

2002 年 4 月于华东师范大学统计系

目　录

第一章 随机事件与概率

§1.1 事件与概率

一、内容精析

1. 随机事件

随机现象的某种结果称为随机事件(简称事件), 以 A, B, C, $\cdots$ 表示. A 不发生记为 $\overline{A}$. 不可能事件记为 $\varnothing$, 必然事件记为 Ω.

Ω 是随机试验的所有基本结果组成的集合, 也称 Ω 为样本空间. 随机事件是样本空间的子集.

2. 事件运算

事件的运算与集合的运算相当, 有并、交、差运算.

(1) A 与 B 的并, 记为 $A\cup B$. 其含义为

$$\text{“}A \text{ 与 } B \text{ 中至少有一个发生”}.$$

n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的并记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(2) A 与 B 的交, 记为 $A\cap B$, 或简记为 AB. 其含义为

$$\text{“}A \text{ 与 } B \text{ 同时发生”}.$$

n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3) A 与 B 的差, 记为 $A-B$, 或记为 $A\overline{B}$. 其含义为

$$\text{“}A \text{ 发生而 } B \text{ 不发生”}.$$

(4) **德莫根公式**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

德莫根公式可推广到多个事件:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

3. 事件间的关系

事件间的关系有包含关系、相等关系、对立关系和互不相容.

(1) **包含关系** 如果事件 A 发生必然导致 B 发生, 则称 A 被 B 包含, 记为 $A\subset B$.

(2) **相等关系** 如果 $A\subset B$, 且 $B\subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

(3) **对立关系** 如果 A, B 满足: $A\bigcap B=\varnothing$, 且 $A\bigcup B=\Omega$, 则称 A 与 B 互为对立事件, 记 $B=\overline{A}$, 或 $A=\overline{B}$. 对立事件也称为逆事件.

注意, 如果 A 与 B 为对立事件, 则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也为对立事件.

(4) **互不相容** 如果 $A\bigcap B=\varnothing$, 则称 A 与 B 不相容. 互不相容也称互斥.

(5) **分割** 如果 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 互不相容, 且 $A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n=\Omega$, 则称 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为 Ω 的一个分割 (也称划分). 注意, 如果 A 与 B 为对立事件, 则 A 与 B 为 Ω 的一个分割.

4. 概率的定义

概率是定义在事件上的一个非负实值函数, 它满足

(1) $P(A)\geq 0$.

(2) $P(\Omega)=1$.

(3) 若 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i). \qquad \text{(可列可加性)}$$

5. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性 若 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 若 $B\subset A$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(5) 若 $B\subset A$, 则 $P(A)\geq P(B)$.

(6) 任对 A, B, 有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(7) 任对 A, B, 有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. (加法公式)

6. 注意点

在事件运算和概率性质中, 初学者容易犯以下的错误.

(1) 由 $P(A)=0$, 误认为 $A=\varnothing$; 同理, 由 $P(B)=1$, 误认为 $B=\Omega$.

(2) 由 $P(AB)=0$, 误认为 A 与 B 互不相容. 这里犯错误的原因与上面 (1) 相同.

二、典型例题

例 1.1.1 口袋中有 a 只黑球，b 只白球，从中不返回地一只一只摸球. 以 A 记事件“最后摸出的若干个球全是黑球”，以 B 记事件“最后摸出的一只球是黑球”. 问 A 与 B 是否相等？

解 此题粗看似乎 A 与 B 是两个不同的事件，但只要设想将球全部摸完为止，则明显有：A 发生必然会导致 B 发生，即 $A \subset B$；反之 B 发生时 A 也必然会发生，即 $B \subset A$，由此得 $A = B$.

例 1.1.2 已知事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(\overline{A} \cap \overline{B}), \qquad \text{且 } P(A) = p,$$

试求 $P(B)$.

解 因为

$$\begin{aligned} P(AB) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB), \end{aligned}$$

由此得

$$1 - P(A) - P(B) = 0,$$

所以

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

评析 此题利用了对立事件的概率公式及事件并的加法公式.

例 1.1.3 已知

$$P(A) = 0.7, \qquad P(A - B) = 0.3,$$

试求 $P(\overline{AB})$.

解 因为

$$0.3 = P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.7 - P(AB),$$

即

$$P(AB) = 0.7 - 0.3 = 0.4,$$

所以

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.6.$$

评析　此题用到了任意两个事件差的概率公式及对立事件的概率公式. 例 1.1.2 与例 1.1.3 说明：在解题过程中要充分利用概率的各种性质.

三、习题

1. 化简以下事件:

(1) $(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})$.

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$.

(3) $(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$.

2. 设 A, B, C 为三事件，试表示下列事件:

(1) A, B, C 都发生或都不发生.

(2) A, B, C 中不多于一个发生.

(3) A, B, C 中不多于两个发生.

(4) A, B, C 中至少有两个发生.

3. 设 $\Omega=\{x|\ 0\le x\le 2\}$, $A=\{x|\ 0.5<x\le 1\}$, $B=\{x|\ 0.25\le x<1.5\}$, 写出下列各事件:

(1) $\overline{A}B$,　(2) $\overline{A}\cup B$,　(3) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$,　(4) $\overline{AB}$,　(5) $\overline{A\cup B}$.

4. 对飞机进行两次射击，每次射一弹，设 A={恰有一弹击中飞机 }, B={ 至少有一弹击中飞机 }, C={ 两弹都击中飞机 }, D={ 两弹都没击中飞机 }. 试问 A, B, C, D 中哪些是互不相容的事件？哪些是对立的事件？

5. 试求满足以下式子的事件 X:

(1) $\overline{X\cup A}\cup\overline{X\cup\overline{A}}=B$.

(2) $(A\cup\overline{X})(\overline{A}\cup\overline{X})\cup\overline{A\cup X}\cup\overline{\overline{A}\cup X}=B$.

6. 试问下列命题是否成立:

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$.

(2) 若事件 A, B, C 满足等式:　$A\cup C=B\cup C$, 则 $A=B$.

(3) 若事件 A, B, C 满足等式:　$A\cup C=B\cup C$, 而且 $A\cup\overline{C}=B\cup\overline{C}$, 则 $A=B$.

(4) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$, 则 $BC=\varnothing$.

(5) $(A\cup B)-B=A$.

(6) $(A-B)\cup B=A$.

(7) $(A\cup B)-B\subset A$.

7. 设 A, B 是两事件，且 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$, 问

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值，最小值是多少？

8. 设 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.6$, 试求 $P(A\overline{B})$.

9. 设

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},$$

$$P(AB)=P(BC)=0,\qquad P(AC)=\frac{1}{8}.$$

试求 $P(A\cup B\cup C)$.

10. 设 $P(AB)=0$, 则下列说法哪些是正确的?

(1) A 和 B 不相容.

(2) A 和 B 相容.

(3) AB 是不可能事件.

(4) AB 不一定是不可能事件.

(5) $P(A)=0$, 或 $P(B)=0$.

(6) $P(A-B)=P(A)$.

11. 当事件 A 与 B 不相容时, 能否得出结论 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

12. 一批产品分一、二、三级, 其中一级品是二级品的两倍, 三级品是二级品的一半, 从这批产品中随机地抽取一个, 试求取到二级品的概率.

13. 设 $P(A)=P(B)=1/2$, 试证 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

14. 对任意的事件 A, B, C, 证明

(1) $P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A)$.

(2) $P(AB)+P(AC)+P(BC)\ge P(A)+P(B)+P(C)-1$.

15. 设 A, B, C 为三个事件, 且

$$P(A)=a,\quad P(B)=2a,\quad P(C)=3a,$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=b.$$

证明 $a\le 1/4$, $b\le 1/4$.

16. 设事件 A, B, C 的概率都是 $1/2$, 且

$$P(ABC)=P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}),$$

证明

$$2P(ABC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-\frac{1}{2}.$$

§ 1.2 古典概型和几何概型

一、内容精析

1. 古典概型

如果一个随机现象满足以下条件:

(1) 只有有限个基本结果;

(2) 每个基本结果发生的可能性相等.

则称这种随机现象为古典概型.

2. 古典概型的计算

在古典概型场合, 事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所含基本结果的个数}}{\text{所有基本结果的个数}}.$$

3. 几何概型

如果一个随机试验的样本空间形成某个区域，并且任意一点落在度量(长度、面积或体积)相同的子区域内是等可能的，则称这种随机现象为几何概型.

4. 几何概型的计算

在几何概型场合，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega},$$

其中 S_A 是构成事件 A 的子区域的度量，S_Ω 是样本空间的度量.

二、典型例题

1. 样本空间的适当选取

适当的选取样本空间可以简化计算，以下例 1.2.1, 例 1.2.2, 例 1.2.3 说明了样本空间选取的重要性.

例 1.2.1　n 个人随机地围绕圆桌而坐，求其中甲、乙两人坐在一起的概率.

解　设甲已先坐好，考虑乙怎么坐法. 显然乙总共有 $n-1$ 个位置可坐，且这 $n-1$ 个位置都是等可能的，而乙坐在甲的边上有两个位置，因此所求概率为 $2/(n-1)$.

例 1.2.2　口袋中有 a 只黑球，b 只白球. 从中不返回地一只一只取球，求第 k 次 $(1\leq k\leq a+b)$ 取出的为黑球的概率.

解　此题可以用全概率公式，对 k 用归纳法，求得概率为 $a/(a+b)$. 但在此可用更简单的方法：把 $a+b$ 只球加以编号，前 a 只为黑球，后 b 只为白球. 以 ω_i 表示第 k 次取到第 i 号球，则样本空间可取为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{a+b}\}$，且基本事件 ω_i 发生的可能性相同. 所求的是事件 $A=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_a\}$ 的概率，所以 $P(A)=a/(a+b)$.

例 1.2.3　设有 $m\cdot n$ 只球，其中一只是黑球，一只是白球，其余 $m\cdot n-2$ 只是红球. 把这些球放入 m 个口袋中，每个口袋放 n 只球. 求黑球与白球放在同一口袋中的概率.

解　将此 $m\cdot n$ 只球依次排列，前 n 只球放入第一个口袋中，接下来的 n 只球放入第二个口袋中，如此下去. 设黑球已经放好，则白球的可能位置有 $m\cdot n-1$ 个，显然它们是等可能的，而白球与黑球放在同一口袋中的可能位置有 $n-1$ 个，因此所求概率为 $(n-1)/(mn-1)$.

2. 利用对称性

在实际问题中，有些名称是人为定义的，例如硬币的“正面”与“反面”. 我们也可以倒过来对其命名. 所以在掷均匀硬币的随机试验中，“出现正面”与“出

现反面”是对称的. 以下例 1.2.4, 例 1.2.5 就是巧妙地利用了对称性.

例 1.2.4　掷 n 次均匀硬币，求出现正面的次数多于出现反面的次数的概率.

解　以 A 记事件“出现正面的次数多于反面的次数”，以 B 记事件“出现反面的次数多于正面的次数”，由于正反面的地位是对称的，因此 $P(A) = P(B)$.

(1) 当 n 为奇数时，正面次数与反面次数不会相等，因此由 $P(A)+P(B) = 1$，得 $P(A) = P(B) = 0.5$.

(2) 当 n 为偶数时，正面次数与反面次数相等的概率为 $C_n^{n/2}0.5^n$，由 $P(A)+P(B) + C_n^{n/2}0.5^n = 1$，得 $P(A) = 0.5(1 - C_n^{n/2}0.5^n)$.

例 1.2.5　设甲掷均匀硬币 $n+1$ 次，乙掷 n 次. 求甲掷出正面的次数多于乙掷出正面的次数的概率.

解　记

$$A_1 = \text{甲掷出的正面数}, \qquad A_0 = \text{甲掷出的反面数},$$
$$B_1 = \text{乙掷出的正面数}, \qquad B_0 = \text{乙掷出的反面数}.$$

又记

$$E = \{A_1 > B_1\}, \qquad F = \{A_0 > B_0\},$$

由于正反面的地位是对称的，因此 $P(E) = P(F)$. 又因为

$$\begin{aligned} F &= \{A_0 > B_0\} = \{n+1-A_1 > n - B_1\} \\ &= \{A_1 - 1 < B_1\} = \{A_1 \leq B_1\} = \overline{E}, \end{aligned}$$

所以由 $P(E) = P(F) = P(\overline{E})$，得 $P(E) = 0.5$.

评析　如果将此题改成：甲掷 $n+2$ 次，乙掷 n 次，则不可仿照以上的解题步骤. 其原因在于：以上解题步骤中有 $\{A_1 - 1 < B_1\} = \{A_1 \leq B_1\}$，但 $\{A_1 - 2 < B_1\} \neq \{A_1 \leq B_1\}$. 对此只要注意下式：

$$\{A_1 - 2 < B_1\} \not\subset \{A_1 \leq B_1\}.$$

3. 用对立事件去考虑问题

有些事件直接考虑则较为复杂，而从其对立事件出发，则相对比较简单. 以下例 1.2.6 充分说明了这一点.

例 1.2.6　从数字 $1, 2, \cdots, 9$ 中可重复地任取 n 次，求 n 次所取数字的乘积能被 10 整除的概率.

解　乘积能被 10 整除必须既取到数字 5 (记为事件 A)，又要取到偶数 (记为事件 B)，我们的目的是求 $P(AB)$. 如果直接考虑 AB，则取到数字 5 和取到偶数

的次数又可多次，情况较复杂．而 A 及 B 的对立事件的概率容易求得

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{8}{9}\right)^n, \qquad P(\overline{B}) = \left(\frac{5}{9}\right)^n, \qquad P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

因此所求概率为

$$\begin{aligned} P(AB) &= 1 - P(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ &= 1 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\cap\overline{B})] \\ &= 1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}. \end{aligned}$$

4. 摸球模型

这是一种很典型的模型，许多场合可以直接利用这种模型，对此应该熟悉掌握．

例 1.2.7　口袋中有 n 只黑球，m 只白球，从中任取 a 只 (不返回)，求取出的 a 只球中有 b 只黑球的概率，$a \le n+m,\ b \le \min\{a,n\}, a-b \le m$.

解　只要记住：取出的 b 只黑球从 n 只黑球中取，$a-b$ 只白球从 m 只白球中取即可，因此所求概率为

$$\frac{C_n^b C_m^{a-b}}{C_{n+m}^a}.$$

5. 配对问题

有的学生看到求"至少有一个 ···"的概率时，总以为用对立事件公式去求较为方便，这种观点是错误的．对配对问题用概率的加法公式去展开求，反而方便．

例 1.2.8　把标有数字 1, 2, ···, n 的 n 只球任意地放入也标有数字 1, 2, ···, n 的 n 个盒子中，每个盒子放一只球．求至少有一个盒子的号码与放进这个盒子的球的号码一致的概率．

解　以 A_i 记事件"第 i 个盒子的球与盒子的号码相同"，$i = 1, \cdots, n$. 所求概率为 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$. 由例 1.2.2 的结果及同样的推理方法可知

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = \cdots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)},$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = \cdots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

所以由概率的加法公式

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n),$$

得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

6. 几何概型

求几何概型的关键是对样本空间和所求事件 A 用图形描述清楚（一般用平面或空间图形）. 然后计算出相关图形的度量（一般为面积或体积）.

例 1.2.9 在平面上画有间隔为 d 的等距平行线，向平面任意投掷一个边长为 a, b, c (均小于 d) 的三角形，求三角形与平行线相交的概率.

解 (1) 先考虑著名的“蒲丰投针问题”：平面上画有间隔为 d 的等距平行线，向平面任意投掷一长为 l(小于 d) 的针，求针与平行线相交的概率. 以 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离，φ 表示针与此直线间的交角，易知样本空间为

$$\Omega = \left\{ (x, \varphi) \mid 0 \le x \le \frac{d}{2},\ \ 0 \le \varphi \le \pi \right\},$$

且 Ω 的度量 $S_\Omega = d\pi/2$, 所求事件为

$$A = \left\{ (x, \varphi) \mid 0 \le x \le \frac{l \sin \varphi}{2},\ 0 \le \varphi \le \pi \right\},$$

则 A 的度量 $S_A = l$, 所以 $P(A) = (2l)/(d\pi)$.

(2) 再考虑三角形与平行线相交的概率. 以 P_a, P_b, P_c, P_{ab}, P_{ac}, P_{bc} 分别表示三角形的边 (也记为 a, b, c) a, b, c, ab, ac, bc 与平行线相交的概率. 则

$$P_a = \frac{2a}{d\pi}, \qquad P_b = \frac{2b}{d\pi}, \qquad P_c = \frac{2c}{d\pi}.$$

又因为

$$P_{ab} = P_a + P_b, \qquad P_{ac} = P_a + P_c, \qquad P_{bc} = P_b + P_c.$$

所以三角形与平行线相交的概率为

$$P_{ab} + P_{ac} + P_{bc} = \frac{1}{2}(P_a + P_b + P_c) = \frac{a+b+c}{d\pi}.$$

例 1.2.10 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

解 分别用 x, y 和 $a-x-y$ 表示线段被分成的三段长度，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,\ y)|\ 0<x<a,\ 0<y<a,\ 0<x+y<a\},$$

其面积为

$$S_{\Omega}=\int_0^a\left(\int_0^{a-x}dy\right)dx=\frac{a^2}{2}.$$

而有利于 A 的情形必须满足构成三角形的条件，即

$$A=\left\{(x,\ y)|\ 0<x<\frac{a}{2},\ 0<y<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}<x+y<a\right\},$$

其面积为

$$S_A=\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\int_{\frac{a}{2}-x}^{\frac{a}{2}}dy\right)dx=\frac{a^2}{8}.$$

所以 $P(A)=1/4$.

三、习题

1. 掷两颗骰子，求所得的两个点数中一个恰是另一个的两倍的概率.

2. 掷三颗骰子，求所得的三个点数中最大的一个恰是最小的一个的两倍的概率.

3. 从 0, 1, 2, $\cdots$, 9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

(1) A_1=\{ 三个数字中不含 0 和 5\}.

(2) A_2=\{ 三个数字中不含 0 或 5\}.

(3) A_3=\{ 三个数字中含 0 但不含 5\}.

4. 房间里有 10 个人，分别佩戴着从 1 到 10 号的纪念章，等可能地任选 3 人，记录其纪念章的号码，试求：

(1) 最小号码为 5 的概率.

(2) 最大号码为 5 的概率.

5. 把 10 本书任意地放在书架上，求其中指定的三本书放在一起的概率.

6. 从数字 1, 2, $\cdots$, 9 中任取两个（不重复），问其中一个小于 5 另一个大于 5 的概率是多少？

7. 口袋中有 5 个白球、 3 个黑球，从中任取两个，求取到的两个球颜色不同的概率.

8. 10 张奖券中有 3 张中奖的奖券，每人购买一张，求前 3 个购买者恰有一人中奖的概率.

9. 20 个运动队，任意分成甲乙两组（每组 10 队）进行比赛，已知其中有两个队是一级队，求这两个一级队

(1) 被分在不同组的概率.

(2) 被分在同一组的概率.

10. 某工厂一个班组共有男工 7 人、女工 4 人，现要选出 3 个代表，问选的 3 个代表中至少有 1 个女工的概率是多少？

11. 有三个人，每个人都以同样的概率 1/4 被分配到四个房间中的每一房间中，试求

(1) 三个人都分配到同一个房间的概率.

(2) 三个人分配到不同房间的概率.

12. 一个人把六根草紧握在手中，仅露出它们的头和尾. 然后随机地把六个头两两相接，六个尾也两两相接. 求放开手后六根草恰巧连成一个环的概率.

13. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$, 其中 B, C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

14. 把 n 个"0"与 n 个"1"随机地排列，求没有两个"1"连在一起的概率.

15. 口袋中有 n 个白球，n 个黑球，从中一个一个不返回地摸球，直至摸完为止. 求黑白球恰好相间取出的概率.

16. 口袋中有 a 个白球，b 个黑球，从中一个一个不返回地摸球，直至留在口袋中的球都是同一种颜色为止. 求最后是白球留在口袋中的概率.

17. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

18. 在 2000 张彩票中，中奖金额 100 元的 1 张，50 元的 4 张，20 元的 10 张，10 元的 20 张，5 元的 165 张，1 元的 400 张，其余无奖. 求购买一张彩票中奖不少于 10 元的概率.

19. 口袋中有 3 个白球，5 个黑球和 4 个红球，现从中一个一个地取出所有的球. 试求红球比白球出现得早的概率.

20. 一间宿舍内住有 6 位同学，求他们之中至少有 2 个人的生日在同一个月份的概率.

21. 在区间 (0, 1) 中随机地取两个数，求事件"两数之和小于 6/5"的概率.

22. 在半径为 R 的圆内画平行弦，如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的，即交点在直径上一个区间内的可能性与这区间的长度成比例，求任意画弦的长度大于 R 的概率.

23. 设一个质点落在 xoy 平面上由 x 轴 y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的三角形内，而落在这三角形内各点处的可能性相等，即落在这三角形内任何区域上的概率与这区域的面积成正比，此质点落在直线 $x=1/3$ 的左边的概率是多少?

24. 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时，乙船的停泊时间是两小时，它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

25. 设 $a>0$, 有任意两数 x, y, 且 $0<x<a$, $0<y<a$, 试求 $xy<a^2/4$ 的概率.

§ 1.3 条件概率

一、内容精析

1. 条件概率

若 $P(B)>0$, 称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为"在 B 发生的条件下 A 的条件概率".