

梅凤翔 编著

分析力学专题



ANALYTICAL
MECHANICAL
SPECIAL PROBLEM

● 北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书包括相对运动动力学、扰动理论、动力学控制、Lagrange 力学逆问题、刚体分析动力学和单面约束系统动力学等六个专题。

本书可作为高等院校力学专业研究生的教材，也可作为高等院校力学、数学、物理教师、力学工作者和有关科技人员的参考书。

分析力学专题

梅凤翔 编著

*

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
通县向阳印刷厂印刷

*

7850×1168毫米 32开本 12.25印张 315千字

1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷

ISBN7-81013-027-7/O·3

印数：1-5,000 册 定价：2.65元

前 言

《分析力学专题》包括相对运动动力学、扰动理论、动力学控制、Lagrange力学逆问题、刚体分析动力学和单面约束系统动力学等六个彼此独立的专题。

本书初稿成于1985年夏，并作为教材为北京工业学院应用力学系1985级和1986级研究生讲授这个课程。1986年9月在北京工业学院油印试版，共四个专题。这次修改又增加了刚体分析动力学和单面约束系统动力学两个专题。

北京工业学院应用力学系褚亦清教授和刘桂林副教授耐心仔细地审阅了书稿并提出宝贵意见，谨此致谢。

限于水平，难免有疏漏之处，敬请读者指正。

梅凤翔

1987年3月

目 录

第一章 相对运动动力学	(1)
§1.1 载体运动微分方程	(1)
§1.2 被载体相对运动微分方程	(11)
§1.3 相对平衡	(18)
§1.4 被载体相对运动微分方程的其他形式	(21)
§1.5 被载体相对运动微分方程的简单应用	(23)
§1.6 旋转软轴的平衡	(30)
§1.7 刚体的相对运动	(40)
§1.8 例子	(50)
§1.9 相对运动的正则方程	(61)
习题	(66)
参考文献	(67)
第二章 扰动理论	(68)
§2.1 常数变易法	(68)
§2.2 扰动运动的正则方程	(73)
§2.3 质点在旋转地球重力场中的运动	(75)
§2.4 质点在阻尼介质中的运动	(93)
§2.5 不平衡性对陀螺的影响	(95)
§2.6 人造地球卫星绕质心的转动	(103)
§2.7 扰动 Kepler 运动方程	(115)
§2.8 人造地球卫星的扰动运动	(127)
§2.9 变更方程	(134)
§2.10 关于变更方程的积分	(138)
§2.11 质点扰动运动方程	(140)
§2.12 圆轨道上扰动 Kepler 运动	(149)
习题	(158)

参考文献.....	(158)
第三章 动力学控制	(159)
§3.1 运动方程的研究.....	(159)
§3.2 刚体转动运动的控制.....	(182)
§3.3 刚体系统的控制.....	(188)
§3.4 位形空间和相空间中的控制.....	(197)
习题.....	(207)
参考文献.....	(209)
第四章 Lagrange 力学逆问题	(211)
§4.1 Newton 系统的基本形式和运动学形式.....	(212)
§4.2 自伴随与非自伴随的例子.....	(220)
§4.3 位形空间公式的基本解析定理.....	(222)
§4.4 构造 Lagrange 函数的 Santilli 方法.....	(231)
§4.5 构造 Lagrange 函数的其他方法.....	(238)
§4.6 例子.....	(239)
习题.....	(249)
参考文献.....	(250)
第五章 刚体分析动力学	(251)
§5.1 重刚体绕固定点运动方程.....	(251)
§5.2 Euler 角 · 正则变量 · Despris 变量.....	(257)
§5.3 第一积分、运动方程的降阶.....	(266)
§5.4 Jacobi 最后乘子 · Jacobi 定理.....	(284)
§5.5 Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形.....	(295)
§5.6 带陀螺静矩的重刚体绕固定点转动问题的若干精确解.....	(306)
习题.....	(314)
参考文献.....	(317)
第六章 单面约束系统动力学	(318)
§6.1 单面约束.....	(318)
§6.2 单面约束加在虚位移上的条件.....	(323)
§6.3 理想单面约束反力.....	(324)
§6.4 单面约束系统的 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移原理	(326)

§6.5 受单面完整约束的完整系统的运动方程.....	(335)
§6.6 受单面完整约束的非完整系统的运动方程.....	(356)
§6.7 单面非完整约束系统的运动方程.....	(373)
习题.....	(382)
参考文献.....	(382)

第一章 相对运动动力学

用分析力学的理论与方法研究力学系统的相对运动动力学，不仅可在表现形式上达到统一，而且对复杂系统显示出优越性。

在这一章里，我们研究载体的运动微分方程、被载体的相对运动微分方程、相对平衡、刚体的相对运动以及若干应用。

本世纪初，Whittaker研究了受匀速转动约束的完整系统的Lagrange方程^[1]。六十年代，苏联著名力学家Лурье.А.И在他的著作“分析力学”中研究了完整系统的一般相对运动动力学^[2]。近年，人们在将[1-2]中的结果推广到非完整系统方面也做了不少工作^[3-6]。

§ 1.1 载体运动微分方程

1. 问题的提出 我们研究一质点系，它由一个刚体(载体)和 N 个质点(被载体)组成。被载体相对于与载体相固联的坐标系 $ox'y'z'$ 的位置由 n 个独立的广义坐标 $q_s(s=1, \dots, n)$ 来确定。研究这样系统的运动可提出两类问题。第一，载体运动是已知的，需要确定被载体的运动，并且假定被载体的运动不改变载体事先给定的运动规律。当载体质量远远大于被载体质量时，被载体对载体运动的影响可以忽略。反之，则不然。例如，在研究陀螺运动时，它对地球运动的影响可略去，但地球运动却大大影响陀螺的运动。当然，载体的运动要靠外力来保证。第二，更一般的情形是载体运动规律未知，需由考虑到被载体来确定。此时系统的位置一般由 $n+6$ 个参数确定。

对两种情形，系统运动的确定可采用同一方法，并且第一种情形可由第二种情形用简单地去掉称之为载体运动方程的某些方

程的办法来得到。这一节我们导出载体运动方程。

2. 动能表达式的分解 载体运动由极点 o 的速度 $\mathbf{v}_0$ 和它的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 来确定。被载质点 M_i 相对惯性坐标系 $\overline{Oxyz}$ 的位置由矢径 $\mathbf{r}_i$ 确定, 相对与载体固联坐标系 $ox'y'z'$ 的位置由矢径 $\mathbf{r}'_i$ 确定。设在 $\mathbf{r}'_i$ 中不显含时间 t , 因此

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_i(q_s) \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (1.1.1)$$

用 $\mathbf{r}_0$ 表示载体极点 o 的矢径, 有

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i(q_s) \quad (1.1.2)$$

如果载体运动给定, 则 $\mathbf{r}_0$ 为时间的已知函数, 此时系统的约束是不稳定的。如果载体运动待定, 则 $\mathbf{r}_0$ 用给定极点位置的广义坐标来确定, 而约束将是稳定的。

由矢量绝对导数与相对导数间的关系, 有

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \overset{*}{\mathbf{r}}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (1.1.3)$$

其中 $\overset{*}{\mathbf{r}}'_i$ 表示相对导数。

系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i + \overset{*}{\mathbf{r}}'_i)^2 \\ &= T_e + T_m + T, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

其中牵连动能 T_e 为

$$T_e = \frac{1}{2} \{ M v_0^2 + 2M \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_0) + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} \} \quad (1.1.5)$$

这里 M 为系统总质量, $\boldsymbol{\theta}^0 = \sum m_i (r_i'^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i)$ 为系统在点 o 的惯量张量, $\mathbf{r}'_0$ 为系统质心在 $ox'y'z'$ 中的矢径。因为整个系统并不是一个刚体, 因此 $\boldsymbol{\theta}^0$ 和 $\mathbf{r}'_0$ 不是常数, 而是广义坐标 q_s 的函数。 T_e 不依赖于广义速度 $\dot{q}_s$ 。

而

$$T_m = \sum m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^*) \cdot \mathbf{r}_i^* \\ = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_r^0 \quad (1.1.6)$$

为混合动能, 其中 $\mathbf{Q}_r$ 为相对动量的主矢, $\mathbf{K}_r^0$ 为相对动量对极点 o 的主矩。 T_m 既依赖于确定载体运动的量 $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}$, 也依赖于被载体的相对运动。 T_m 是广义速度 $\dot{q}_s$ 的线性函数。

最后

$$T_r = \sum \frac{1}{2} m_i^* \dot{\mathbf{r}}_i^{*2}$$

为相对运动的动能, 它是广义速度的二次函数。

3. 载体运动微分方程 用 $\mathbf{v}_{0i}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_i (i=1, 2, 3)$ 标记矢量 $\mathbf{v}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 在与载体固联的坐标系 $ox'y'z'$ 上的投影。根据为确定载体运动的参数选取, 系统的动能 T 不依赖于广义坐标。于是可将运动微分方程分成两组, 一组是对准速度 $\mathbf{v}_{0i}, \boldsymbol{\omega}_i$ 的方程, 即与动轴理论相应的方程^[1], 或称为 Euler-Lagrange 方程; 一组是对广义坐标 q_s 的 Lagrange 方程。

由(1.1.2)和(1.1.3)知, 系统任何点 M_i 的虚位移为

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}_i' = \delta \mathbf{r}_0 + \sum_{s=1}^x \frac{\partial \mathbf{r}_i'}{\partial q_s} \delta q_s + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i' \quad (1.1.7)$$

这里 $\boldsymbol{\theta}$ 为载体的无限小转量矢量。加在载体和被载体上所有主动力在系统虚位移上的元功为

$$\delta' A = \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \\ = \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m}^0 + \sum_{s=1}^x Q_s \delta q_s \quad (1.1.8)$$

其中 $\mathbf{V} = \sum \mathbf{F}_i$ 为所有主动力的主矢, $\mathbf{m}^0 = \sum \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i$ 为所有主动力对极点 o 的主矩。

现在组成对准速度 $\mathbf{v}_{0i}, \boldsymbol{\omega}_i$ 的 Euler-Lagrange 方程。因 T_r 不依赖于准速度, 有

$$\frac{\partial T}{\partial v_{0i}} = \frac{\partial T_e}{\partial v_{0i}} + \frac{\partial T_m}{\partial v_{0i}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \frac{\partial T_e}{\partial \omega_i} + \frac{\partial T_m}{\partial \omega_i} \quad (1.1.9)$$

由(1.1.5), 有

$$\frac{\partial T_e}{\partial v_{01}} = M \mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial v_{01}} + M \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial v_{01}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial v_{02}} = M \mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial v_{02}} + M \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial v_{02}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial v_{03}} = M \mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial v_{03}} + M \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial v_{03}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c)$$

因

$$\mathbf{v}_0 = v_{01} \mathbf{i}' + v_{02} \mathbf{j}' + v_{03} \mathbf{k}'$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_3 \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{r}'_c = x'_c \mathbf{i}' + y'_c \mathbf{j}' + z'_c \mathbf{k}'$$

其中 $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ 为动系 $ox'y'z'$ 轴向单位矢量, 故有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial v_{01}} &= M(v_{01} + \omega_2 z'_c - \omega_3 y'_c) \\ \frac{\partial T_e}{\partial v_{02}} &= M(v_{02} + \omega_3 x'_c - \omega_1 z'_c) \\ \frac{\partial T_e}{\partial v_{03}} &= M(v_{03} + \omega_1 y'_c - \omega_2 x'_c) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

其中 x'_c , y'_c , z'_c 为整个系统质心相对坐标系 $ox'y'z'$ 的坐标。

类似地, 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial \omega_1} &= M(y'_c v_{03} - z'_c v_{02}) + \theta_{11}^0 \omega_1 + \theta_{12}^0 \omega_2 + \theta_{13}^0 \omega_3 \\ \frac{\partial T_e}{\partial \omega_2} &= M(z'_c v_{01} - x'_c v_{03}) + \theta_{21}^0 \omega_1 + \theta_{22}^0 \omega_2 + \theta_{23}^0 \omega_3 \\ \frac{\partial T_e}{\partial \omega_3} &= M(x'_c v_{02} - y'_c v_{01}) + \theta_{31}^0 \omega_1 + \theta_{32}^0 \omega_2 + \theta_{33}^0 \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

其中 θ_{ik}^0 为惯量张量在 o 点的分量。如前面指出的， x'_c ， y'_c ， z'_c ， θ_{ik}^0 应作为广义坐标的已知函数来研究。

由(1.1.6)，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_m}{\partial v_{01}} &= Q_{r1} = M \dot{x}'_c, & \frac{\partial T_m}{\partial v_{02}} &= Q_{r2} = M \dot{y}'_c, \\ \frac{\partial T_m}{\partial v_{03}} &= Q_{r3} = M \dot{z}'_c \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

以及

$$\frac{\partial T_m}{\partial \omega_1} = K_{r1}^0, \quad \frac{\partial T_m}{\partial \omega_2} = K_{r2}^0, \quad \frac{\partial T_m}{\partial \omega_3} = K_{r3}^0 \quad (1.1.13)$$

Euler-Lagrange 方程有与自由刚体同样的形式，即^{[1][2]}

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{01}} + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial v_{03}} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial v_{02}} = V_1 \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + v_{02} \frac{\partial T}{\partial v_{03}} \\ - v_{03} \frac{\partial T}{\partial v_{02}} = m_1^0 \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

将(1.1.10)和(1.1.12)代入方程(1.1.14)，得到

$$\begin{aligned} M\{\dot{v}_{01} + (\dot{\omega}_2 z'_c - \dot{\omega}_3 y'_c) + (\dot{\omega}_2 z'_c - \omega_3 \dot{y}'_c) \\ + (\omega_2 v_{03} - \omega_3 v_{02}) + [\omega_2(\omega_1 y'_c - \omega_2 x'_c) \\ - \omega_3(\omega_3 x'_c - \omega_1 z'_c)] + (\dot{x}'_c + \omega_2 \dot{z}'_c - \omega_3 \dot{y}'_c)\} = V_1 \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

其他两个方程由指标 1, 2, 3 轮换而得到。这三个方程写成矢量形式如下

$$M\{\overset{*}{v}_0 + \omega \times v_0 + \omega \times r'_c + \omega \times (\omega \times r'_c) + 2\omega \times \overset{**}{r}'_c + \overset{**}{r}'_c\} = V \quad (1.1.17)$$

它表示系统质心运动定理。括号中的项乃是系统质心的绝对加速度 a_a 。其中有牵连加速度

$$a_e = \overset{*}{v}_0 + \omega \times v_0 + \dot{\omega} \times r'_c + \omega \times (\omega \times r'_c) \quad (1.1.18)$$

式中前两项为极点加速度，第三项为旋转加速度，第四项为向心加速度。因动系与载体固联，动系有与载体同样的角速度，故

$$\dot{\omega} = \overset{*}{\omega} + \omega \times \omega = \overset{*}{\omega} \quad (1.1.19)$$

(1.1.17)中第五项为 Coriolis 加速度

$$a_{c.o.r} = 2\omega \times \overset{*}{r}'_c \quad (1.1.20)$$

而最后一项为相对加速度

$$a_o = \overset{**}{r}'_c \quad (1.1.21)$$

相对速度和相对加速度按下式计算

$$\overset{*}{r}'_c = \sum_{s=1}^n \frac{\partial r'_c}{\partial q_s} \dot{q}_s, \quad \overset{**}{r}'_c = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial r'_c}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r'_c}{\partial q_k \partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_s \right) \quad (1.1.22)$$

现在研究载体运动的第二组方程。将(1.1.10)—(1.1.13)代入(1.1.15)，并简化得

$$\begin{aligned} & M(y'_0 \dot{v}_{03} - z'_0 \dot{v}_{02}) + \theta_{11}^0 \dot{\omega}_1 + \theta_{12}^0 \dot{\omega}_2 + \theta_{13}^0 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \dot{\theta}_{11}^0 \\ & + \omega_2 \dot{\theta}_{12}^0 + \omega_3 \dot{\theta}_{13}^0 + K_{r1}^0 + M\{\omega_2(v_{02}x'_c \\ & - v_{01}y'_c) - \omega_3(z'_0 v_{01} - x'_c v_{03})\} + \omega_2(\theta_{31}^0 \omega_1 \\ & + \theta_{32}^0 \omega_2 + \theta_{33}^0 \omega_3) - \omega_3(\theta_{21}^0 \omega_1 + \theta_{22}^0 \omega_2 \\ & + \theta_{23}^0 \omega_3) + \omega_2 K_{r3}^0 - \omega_3 K_{r2}^0 + M\{v_{02}(\omega_1 y'_c \end{aligned}$$

$$-\omega_2 x'_c) - v_{03}(\omega_3 x'_c - \omega_1 z'_c)\} = m_1^0 \quad (1.1.23)$$

其他两个方程用指标 1, 2, 3 轮换得到。这三个方程可写成矢量形式

$$\begin{aligned} \theta^0 \cdot \dot{\omega} + \dot{\theta}^0 \cdot \omega + \omega \times \theta^0 \cdot \omega + K_r^0 + \omega \times K_r^0 \\ + M r'_c \times (\dot{v}_0 + \omega \times v_0) = m^0 \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

我们继续变换(1.1.24)。惯量张量定义为

$$\theta^0 = \sum m_i (r_i'^2 E - r_i' r_i') \quad (1.1.25)$$

故有

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^0 = 2 \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \sum_i m_i (E r_i' \cdot \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} - \frac{1}{2} r_i' \cdot \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} \cdot r_i') \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^0 \cdot \omega + \omega \times K_r^0 &= 2 \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \sum_i m_i \left\{ r_i' \cdot \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} \omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} r_i' \cdot \omega - \frac{1}{2} r_i' \cdot \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} \cdot \omega \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \omega \times (r_i' \times \frac{\partial r_i'}{\partial q_s}) \right\} \\ &= 2 \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \sum_i m_i r_i' \times \left(\omega \times \frac{\partial r_i'}{\partial q_s} \right) \\ &= 2 \sum_i m_i r_i' \times (\omega \times \dot{r}_i') \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

如将方程(1.1.24)左边这两项移至方程的右边, 它可当作 Coriolis 惯性力的矩

$$m_{c.o.r}^0 = -\dot{\theta}^0 \cdot \omega - \omega \times K_r^0 \quad (1.1.28)$$

这个力矩是加在载体上的, 它由与其相联的被载体的相对运动引起。

用(1.1.17)由(1.1.24)中可消去极点加速度, 结果有关系

$$\theta^c \cdot \dot{\omega} + \omega \times \theta^c \cdot \omega = m^c + m_{c \circ r}^c - \overset{*}{K}_r^c \quad (1.1.29)$$

这里 θ^c 为在质心的惯量张量

$$\theta^c = \theta^0 - M(\mathbf{E}r'_c \cdot r'_c - r'_c r'_c) \quad (1.1.30)$$

用 K_r^c 表示相对动量对质心的主矩, 有

$$K_r^c = K_r^0 - Mr'_c \times \overset{*}{r}'_c \quad (1.1.31)$$

并用 $m_{c \circ r}^c$ 表示 Coriolis 惯性力对质心的矩, 有

$$m_{c \circ r}^c = -\overset{*}{\theta}^c \cdot \omega - \omega \times K_r^c \quad (1.1.32)$$

最后, 用 m^c 表示主动力对质心的主矩, 即

$$m^c = m^0 - r'_c \times V \quad (1.1.33)$$

当然, 如果极点 O 与质心 C 重合, 那么方程(1.1.29)可直接由(1.1.24)得到。

这样, 我们解决了第一类问题——组成载体的运动方程组(1.1.17)和(1.1.24)或(1.1.17)和(1.1.29)。

上述方程组不封闭(它包含广义坐标 q_s 为参数), 为了求解还必须联合被载体的相对运动方程。当然, 在没有相对运动的情形, 方程(1.1.17)和(1.1.24)与刚体运动方程相合。

还需注意, 如果载体有一点相对惯性坐标系作匀速直线运动, 取该点为极点, 则方程(1.1.24)中左边最后一项为零, 这时载体运动可当作绕定点 o 的转动。运动方程有形式

$$\theta^0 \cdot \dot{\omega} + \omega \times \theta^0 \cdot \omega + \overset{*}{K}_r^0 = m^0 + m_{c \circ r}^c \quad (1.1.34)$$

4. 说明例子 为说明载体运动方程的应用, 我们举一简单例子。

质量为 M 、半径为 r 的匀质圆盘, 其质心 o 以速度 v_0 沿与圆盘平面相垂直的固定轴 oy 运动, 圆盘又以角速度 ω 绕轴 oy 运动。在圆盘上有一过质心的光滑圆管, 管内有一质量为 m 的小球。试建立载体的运动微分方程(图1-1)。

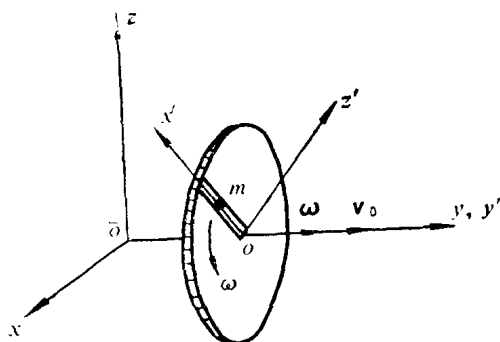


图1-1

取动坐标系 $ox'y'z'$ 与圆盘固联，使 ox' 沿圆管方向， oy' 与 oy 重合， oz' 与 ox' ， oy' 组成正交系。质点 m 在动坐标系中的位置由 $om=q$ 来表示。

系统质心运动定理给出的方程为(1.1.17)，即

$$(M+m)\{\dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c + \ddot{\mathbf{r}}'_c\} = \mathbf{V} \quad (1.1.35)$$

现计算(1.1.35)中各项。我们有

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega} \mathbf{j}', \quad \mathbf{r}'_c = \frac{mq}{M+m} \mathbf{i}'$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_c = -\frac{mq\dot{\omega}}{M+m} \mathbf{k}'$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) = \omega \mathbf{j}' \times (\omega \mathbf{j}' \times \frac{mq\mathbf{i}'}{M+m}) = -\frac{mq\omega^2 \mathbf{i}'}{M+m}$$

$$2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'_c = 2\omega \mathbf{j}' \times \frac{m\dot{q}}{M+m} \mathbf{i}' = -\frac{2mq\dot{\omega}}{M+m} \mathbf{k}'$$

$$\ddot{\mathbf{r}}'_c = \frac{m\ddot{q}}{M+m} \mathbf{i}'$$

将以上各式代入(1.1.35), 得到

$$(M+m)\{\dot{v}_0^* j' - \frac{mq\dot{\omega}}{M+m} k' - \frac{mq\omega^2}{M+m} i' \\ - 2\frac{mq\dot{\omega}}{M+m} k' + \frac{m\ddot{q}}{M+m} i'\} = V$$

这矢量方程可写成三个标量方程

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{q} - q\omega^2) &= V_1 \\ (M+m)\dot{v}_0^* &= V_2 \\ -m(q\dot{\omega} + 2\dot{q}\omega) &= V_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.36)$$

其中 V_1, V_2, V_3 为外力主矢 V 在 i', j', k' 方向的投影。

系统转动方程为(1.1.24), 即

$$\theta^0 \cdot \dot{\omega} + \dot{\theta}^0 \cdot \omega + \omega \times \theta^0 \cdot \omega + \dot{K}_r^0 + \omega \times K_r^0 \\ + (M+m)r_c' \times (\dot{v}_0^* + \omega \times v_0) = m^0 \quad (1.1.37)$$

现计算(1.1.37)中各项。我们有

$$\theta^0 = \frac{1}{4}Mr^2 i' i' + \frac{1}{2}Mr^2 j' j' + \frac{1}{4}Mr^2 k' k'$$

$$+mq^2 j' j' + mq^2 k' k'$$

$$\theta^0 \cdot \dot{\omega} = \left(\frac{1}{2}Mr^2 + mq^2 \right) \dot{\omega} j'$$

$$\dot{\theta}^0 = 2mq\dot{q} j' j' + 2mq\dot{q} k' k'$$

$$\dot{\theta}^0 \cdot \omega = 2mq\dot{q}\omega j'$$

$$\omega \times \theta^0 \cdot \omega = \left(-\frac{1}{4}Mr^2 k' i' + \frac{1}{4}Mr^2 i' k' \right.$$

$$\left. + mq^2 i' k' \right) \cdot \omega^2 j' = 0$$

$$K_r^0 = 0$$

$$\begin{aligned} & (M+m)r'_c \times (v_0 + \omega \times v_0) \\ &= (M+m) \cdot \frac{mq}{M+m} \mathbf{i}' \times (\mathbf{v} \mathbf{j}' + 0) = m q \mathbf{v}_0^* \mathbf{k}' \end{aligned}$$

将上述各式代入(1.1.37), 得到

$$\left(\frac{1}{2}Mr^2 + mq^2\right)\dot{\omega} \mathbf{j}' + 2mq\dot{q} \mathbf{j}' + m q \mathbf{v}_0^* \mathbf{k}' = m \mathbf{v}^0$$

将其投影于 $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ 上, 得

$$\left. \begin{aligned} 0 &= m_1^0 \\ \left(\frac{1}{2}Mr^2 + mq^2\right)\dot{\omega} + 2mq\dot{q} &= m_2^0 \\ m q \mathbf{v}_0^* &= m_3^0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.38)$$

§1.2 被载体相对运动微分方程

1. 被载体相对运动方程 我们由绝对运动的Lagrange方程出发来推导相对运动的Lagrange方程, 并阐明各项的力学意义。

设被载体在载体上的位置由 n 个广义坐标 $q_s (s=1, 2, \dots, n)$ 确定。绝对运动的Lagrange方程为

$$\varepsilon_s(T_e) + \varepsilon_s(T_m) + \varepsilon_s(T_r) = Q_s \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (1.2.1)$$

其中

$$\varepsilon_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$$

为Euler算子。

首先计算第一项。牵连运动动能 T_e 不依赖于广义速度 $\dot{q}_s$ 。因此